

*В. Д. Косенков, А. В. Горошко,  
А. С. Кашталян, В. Д. Бідюк*

# ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

**Навчальний посібник**

Видання 2-ге, виправлене і доповнене



**В. Д. Косенков, А. В. Горошко,  
А. С. Каштальян, В. Д. Бідюк**

# **ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ**

## **Навчальний посібник**

Видання 2-ге, виправлене і доповнене

*Рекомендовано Вченою радою  
Хмельницького національного університету  
як навчальний посібник для студентів  
закладів вищої освіти (лист 041/390 від  
08.05.2023)*

**2024**

УДК 621.3.011.7 (075.8)  
Т71

*Рекомендовано Вченою радою  
Хмельницького національного університету  
як навчальний посібник для студентів ЗВО  
(лист 041/390 від 08.05.2023)*

**Авторський колектив:**

**Косенков В. Д.**, канд. техн. наук, проф.,  
**Горошко А. В.**, д-р техн. наук, проф.,  
**Каштальян А. С.**, канд. техн. наук, доц.,  
**Бідюк В. Д.**

**Рецензенти:**

- Катеринчук І. С.** - д-р техн. наук, проф., Заслужений працівник освіти України, лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, професор кафедри загальнонаукових та інженерних дисциплін НАДПСУ імені Б. Хмельницького;
- Прохоренко С. В.** - д-р техн. наук, проф., професор кафедри інформаційно-вимірвальних технологій, Інститут комп'ютерних технологій, автоматики та метрології, Національний університет "Львівська політехніка";
- Мартинюк В. В.** - д-р техн. наук, проф., завідувач кафедри автоматизації, комп'ютерно-інтегрованих технологій та робототехніки, Хмельницький національний університет.

**АВТОРСЬКИЙ ОРИГІНАЛ-МАКЕТ**

Т71 **Теорія** електричних кіл : навч. посіб. / В. Д. Косенков, А. В. Горошко, А. С. Каштальян, В. Д. Бідюк. Хмельницький : ХНУ, 2024. 346 с.: іл.  
ISBN 978-966-8776-55-7

У навчальному посібнику викладено основні методи аналізу лінійних кіл при постійних, синусоїдальних та періодичних несинусоїдальних напругах, класичний та операторний методи аналізу перехідних процесів, усталені та перехідні процеси в довгих лініях. Розглянуті також особливості нелінійних кіл і методи їх аналізу.

Для студентів першого рівня освіти, які навчаються за спеціальностями «Комп'ютерна інженерія», «Телекомунікації та радіотехніка», «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», «Кібербезпека та захист інформації».

ISBN 978-966-8776-55-7

© Авторський колектив, 2024  
© ХНУ, оригінал-макет, 2024

## Зміст

Вступ	3
Розділ I. Параметри та закони електричних кіл.....	5
Розділ II. Методи аналізу електричних кіл постійного струму.	18
Розділ III. Електричні кола синусоїдального струму.....	41
Розділ IV. Резонанс в електричних колах, частотні характеристики кіл.....	64
Розділ V. Кола з взаємною індукцією.....	85
Розділ VI. Несинусоїдальні струми в електричних колах.....	102
Розділ VII. Перехідні процеси в електричних колах. Класичний метод аналізу.....	112
Розділ VIII. Операторний метод аналізу перехідних процесів.....	130
Розділ IX. Кола з розподіленими параметрами.....	140
Розділ X. Нелінійні кола при постійному струмі.....	165
Розділ XI. Нелінійні кола при змінному струмі.....	183
Розділ XII. Чотириполюсники.....	200
Розділ XIII. Вступ до теорії синтезу електричних кіл.....	217
Розділ XIV. Аналіз перехідних процесів часовим методом...	227
Розділ XV. Частотні електричні фільтри.....	242
Розділ XVI. Спектральний метод.....	258
Розділ XVII. Трифазні кола.....	267
Розділ XVIII. Метод симетричних складових.....	284
Розділ XIX. Модуляція.....	310
Додатки.....	317
Література.....	345

## ВСТУП

Запропонований увазі читача навчальний посібник розширює зміст навчального посібника Косенкова В.Д. «Теорія електричних кіл», який був написаний для напряму підготовки «Комп'ютерна інженерія» в 2018 році, і в невеликому обсязі він закривав питання робочої програми дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл».

У запропонованому посібнику «Теорія електричних кіл» авторським колективом збережено весь матеріал посібника «Теорія електричних кіл», але додали матеріал, який буде корисним для студентів спеціальностей «Телекомунікації та радіотехніка», «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», «Кібербезпека та захист інформації», і який поданий також в стислому обсязі, але з достатньою кількістю прикладів в кожному розділі. Це робить його корисним для студентів як денної, так і заочної форми навчання.

Автори розширили аналіз резонансних явищ в послідовних, паралельних та зв'язаних контурах, доповнили розділ чотиріполюсників аналізом складних чотиріполюсників.

Теорія частотних електричних фільтрів, а також аналіз перехідних процесів часовим методом подані окремими розділами в кінці посібника, як матеріал більш цікавий для спеціальності «Телекомунікації та радіотехніка».

У загальному випадку електромагнітні процеси електротехнічних пристроїв і систем описуються теорією електромагнітного поля. Використовуються поняття: густина струму  $\underline{\delta}$ , напруженість  $\underline{H}$ ,  $\underline{E}$ , магнітна індукція  $\underline{B}$ , електрична індукція  $\underline{D}$  та інші, тобто векторні величини, що характеризують поле у кожній його точці. Ця теорія базується на диференційних рівняннях Максвелла у часткових похідних. Розв'язок таких рівнянь дуже складний навіть для простих пристроїв. Тому теорія поля використовується на стадії проектування таких пристроїв, у яких поле розташовано в великих об'ємах, наприклад: антени, хвилеводи, електровакуумні прилади, трансформатори та ін. При цьому рівняння поля розв'язуються здебільшого наближено за допомогою ЕОМ.

У той же час, при розв'язуванні більшості наукових і технічних задач, електромагнітні процеси електротехнічних пристроїв та систем досить точно можна описати, користуючись інтегральними величинами поля: електричним струмом  $i = \int_S \underline{\delta} d\underline{S}$ , напругою

$$u = \int_l \underline{E} dl, \text{ зарядом } q = \int_s \underline{D} ds, \text{ потоком } \Phi = \int_s \underline{B} ds. \text{ Це пояснюється}$$

тим, що в електричних пристроях струми зосереджуються в провідниках, магнітні потоки – в основному в феромагнітних осердях.

Сукупність пристроїв, що утворюють шляхи для електричного струму, електромагнітні процеси в яких можна описати за допомогою понять електрорушійної сили, струму та напруги, називається *електричним колом*.

Сукупність пристроїв, що утворюють шляхи для магнітного потоку, електромагнітні процеси в яких можна описати за допомогою понять магніторушійна сила, потік, магнітна індукція, називається *магнітним колом*.

Авторами розширений аналіз резонансних явищ у послідовних колах, паралельних та зв'язаних контурах, розділ чотириполюсників доповнений аналізом складних чотириполюсників.

Авторський колектив вдячний докторам технічних наук, професорам О.М. Шинкаруку та В.М. Кичаку за надані рекомендації та поради до першого видання посібника та докторам технічних наук, професорам І.С. Катеренчуку та С.В. Прохоренку за рецензування другого видання посібника, а також доцентам Л.В. Скубію та Л.В. Пастернак та інженеру Я.М. Дубініній за підготовку рукопису до друку.

# І РОЗДІЛ

## ПАРАМЕТРИ ТА ЗАКОНИ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

### 1.1. ЕЛЕКТРИЧНЕ КОЛО

Основними елементами електричних кіл є джерела електроенергії, пристрої для її передавання та перетворення параметрів  $u$ ,  $i$ , а також приймачі електроенергії.

Джерелами електроенергії є пристрої, у яких інші види енергії перетворюються в електричну, а приймачі здійснюють зворотне перетворення.

Джерела та приймачі зв'язують за допомогою ліній електропередач (ЛЕП), трансформаторів, випрямлячів, інверторів тощо.

*Параметром елемента* називається коефіцієнт у рівнянні зв'язку між напругою  $u$  та струмом  $i$  на цьому елементі.

Якщо параметр не залежить від величини  $u$  чи  $i$ , то елемент називається *лінійним*, а якщо залежить – *нелінійним*.

Коло, яке містить тільки лінійні елементи, називається *лінійним*.

Якщо параметр є функцією часу, то елемент називається *параметричним*.

Розрізняють електричні кола із зосередженими та розподіленими параметрами.

До електричних величин, що характеризують коло, відносяться: електрорушійна сила (ЕРС), напруга, струм та потужність. Якщо вони не залежать від часу, то їх позначають великими літерами латинського алфавіту  $E$ ,  $U$ ,  $I$ ,  $P$ , а якщо залежать, то прописними літерами  $e$ ,  $u$ ,  $i$ ,  $p$  позначають їх миттєві значення.

### 1.2. ПАСИВНІ ЕЛЕМЕНТИ КІЛ

#### Резистивність або активний опір

Активний опір  $R$  – це ідеалізований елемент кола, у якому відбувається незворотне перетворення електричної енергії в інші види енергії, наприклад, в теплову. Якісні резистори наближено відповідають цьому визначенню.

Зв'язок між напругою  $u_R$  та струмом  $i$  в колі (рис. 1.1) з активним опором описується законом Ома

$$u_R = Ri. \quad (1.1)$$

Обернена до опору величина називається провідністю

$$\frac{1}{R} = G. \quad (1.2)$$

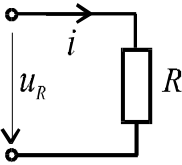


Рис. 1.1

Напруга вимірюється в вольтах (В), струм – в амперах (А), опір – в омах (Ом), провідність – в сіменсах (См).

Зовнішня характеристика елемента – це залежність напруги  $u$  на його затискачах від струму  $i$ , тобто це – вольт-амперна характеристика (ВАХ).

На рис. 1.2. показані вольт-амперні характеристики лінійного (рис. 1.2, а) та нелінійного (рис. 1.2, б) елементів.

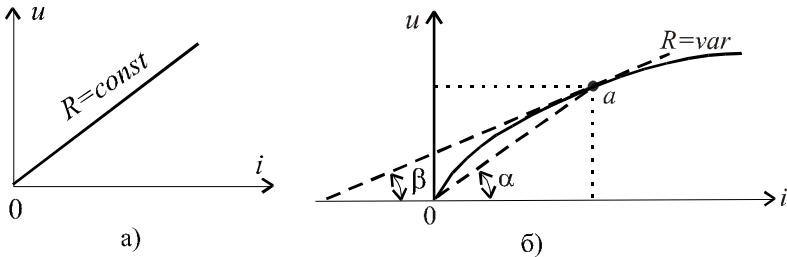


Рис. 1.2

Для нелінійного елемента використовуються поняття:

*статичний опір*

$$R_{cm} = \frac{u}{i} \cong \operatorname{tg}\alpha; \quad (1.3)$$

*динамічний опір*

$$R_o = \frac{du}{di} \cong \operatorname{tg}\beta. \quad (1.4)$$

Для кожної точки ВАХ характерні свої значення  $R_{cm}$  та  $R_o$ .

Миттєва потужність кола з активним опором



$$p_R = u_R \cdot i = R \cdot i^2 = \frac{u^2}{R} \geq 0. \quad (1.5)$$

Енергія кола з активним опором

$$W_R = \int_{-\infty}^t p_R dt = R \int_{-\infty}^t i^2 dt \geq 0. \quad (1.6)$$

**Висновок:** активний опір тільки споживає енергію, а віддати її в мережу ( $p < 0$  не буває) не може.

### Індуктивність

Індуктивність  $L$  – це ідеалізований елемент кола, в якому накопичується енергія магнітного поля.

Параметр  $L$  є коефіцієнтом пропорційності між струмом і потокозчепленням  $\Psi$  котушки (контуру)

$$\Psi = L \cdot i = w\Phi, \quad (1.7)$$

де  $w$  – кількість витків котушки (рис. 1.3).

Одиницею виміру індуктивності є генрі (Гн), а потоку - вебер (Вб).

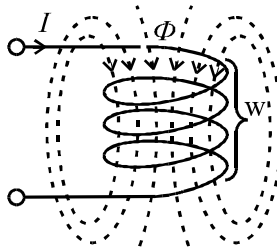


Рис. 1.3

В реальній котушці індуктивності окрім накопичення енергії магнітного поля проходить і незворотний процес перетворення електричної енергії в теплову. На високих частотах враховується перетворення електричної енергії в енергію електричного поля.

На рис. 1.4 показані вебер-амперні характеристики лінійної (а) та нелінійної (б) індуктивності.

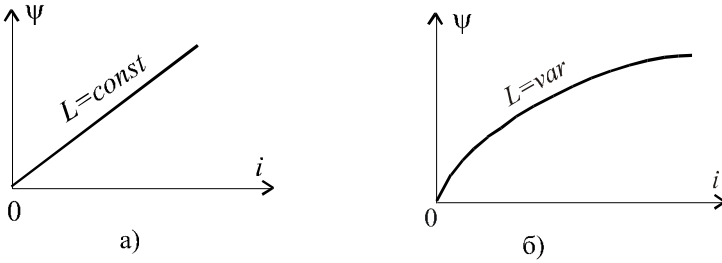


Рис. 1.4

Згідно з законом електромагнітної індукції (ЕМІ) при зміні струму в котушці наводиться ЕРС самоіндукції

$$e_L = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt}, \quad (1.8)$$

а при  $L = const$

$$e_L = -L \frac{di}{dt}. \quad (1.8, a)$$

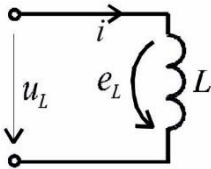


Рис. 1.5

Умовно-додатний напрям ЕРС  $e_L$  показують однонаправленим зі струмом  $i$ . Це пояснюється тим, що згідно з правилом Ленца ЕРС самоіндукції  $e_L$  протидіє зміні струму, і з урахуванням знака в (1.8) при виборі напрямку ЕРС приходимо до вказаного на рис. 1.5. Напряга на за тискачах котушки згідно з другим законом Кірхгофа

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt}. \quad (1.9)$$

Якщо через котушку протікає постійний струм  $i = I = const$ , то напряга на котушці  $u_L = 0$ , а це означає, що її опір постійному струму дорівнює нулю.

Миттєва потужність кола з індуктивністю

$$p_L = u_L i = L i \frac{di}{dt}. \quad (1.10)$$

Якщо  $p_L > 0$ , то енергія накопичується полем, а при  $p_L < 0$  – віддається джерелу.

Енергія, накопичена індуктивністю

$$W_L = \int_{-\infty}^t p_L dt = L \int_0^i idi = \frac{Li^2}{2}. \quad (1.11)$$

### Ємність

Ємність  $C$  – це ідеалізований елемент кола, який має властивість накопичувати енергію електричного поля. При цьому параметр  $C$  ємності є коефіцієнтом пропорційності між напругою та зарядом. Заряд вимірюється в кулонах (Кл), а ємність – в фарадах (Ф).

$$q = C \cdot u. \quad (1.12)$$

На рис. 1.6 показано умовне графічне зображення ємності, а на рис. 1.7 – кулон-вольтні характеристики лінійної та нелінійної ємностей.

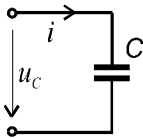


Рис. 1.6

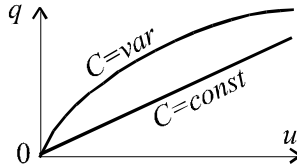


Рис. 1.7

Далі будемо розглядати кола з постійною ємністю  $C = const$ .

Якщо напруга змінна, то зміна заряду  $q$  приводить до появи струму

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c}{dt}. \quad (1.13)$$

Якщо  $u_c = const$ , то  $i = 0$ , тобто опір ємності постійному струму дорівнює нескінченності.

З (1.13) напруга

$$u_c = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t idt. \quad (1.14)$$

Якщо процес дослідження почався з  $t = t_0$ , то

$$u_C = u_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt . \quad (1.15)$$

Миттєва потужність кола з ємністю

$$p_C = u_C \cdot i = Cu_C \frac{du_C}{dt} . \quad (1.16)$$

Якщо  $p_C > 0$ , то проходить заряд ємності, а при  $p_C < 0$  – її розряд. Енергія накопичена ємністю

$$W_C = \int_{-\infty}^t p_C dt = C \int_0^{u_C} u_C du = \frac{Cu_C^2}{2} \geq 0 . \quad (1.17)$$

Ідеалізовані елементи електричного кола (індуктивності та ємності), які здатні накопичувати енергію магнітного або електричного полів, назвали *реактивними*. Накопичена ними енергія може бути віддана іншим елементам кола.

### 1.3. ЗАСТУПНІ СХЕМИ РЕАЛЬНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

При розгляданні ідеалізованих елементів відмічалось, що кожен з них відображає тільки одну головну особливість електромагнітного процесу, яка притаманна реальному елементу. Але в реальному елементі мають місце так звані паразитні процеси. Тому заступна схема реального елемента містить в собі декілька ідеалізованих елементів. При цьому заступна схема одного і того ж елемента залежить від діапазону частот.

Наприклад, на рис. 1.8 показані заступні схеми котушки індуктивності при низьких частотах (а) та при високих частотах (б) .

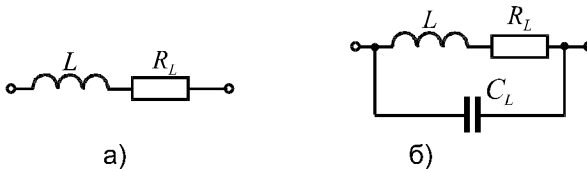


Рис. 1.8

На рис. 1.8 використані наступні позначення:  $R_L$  - активний опір котушки;  $C_L$  міжвиткова ємність.

Якщо потрібна більш висока точність розрахунків, то в заступну схему реального елемента потрібно ввести більшу кількість ідеальних елементів, наприклад врахувати опір ізоляції та інші фактори.

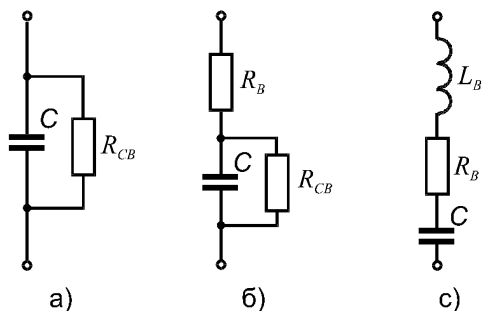


Рис. 1.9

Так на рис. 1.9 показані заступні схеми конденсатора на низьких (а), на середніх (б) та високих (с) частотах. На рис. 1.9 використані наступні позначення:  $R_{CB}$  - опір струму витoku;  $L_B$  - індуктивність відводів;  $R_B$  - опір відводів.

#### 1.4. АКТИВНІ ЕЛЕМЕНТИ КІЛ

Розглянемо спочатку ідеалізовані елементи. Сюди входять джерело напруги (ЕРС) та джерело струму.

В ідеального джерела ЕРС напруга між полюсами не залежить від навантаження (струму). На рис. 1.10 показані умовні позначення ідеального джерела змінної напруги (а), постійної напруги (б), та зовнішня характеристика ідеального джерела постійної напруги (в).

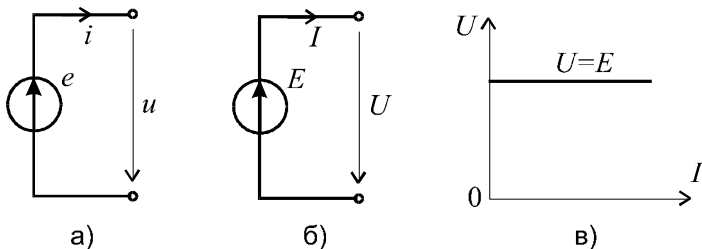


Рис. 1.10.

У джерела напруги  $u(i) = e$ , якщо внутрішній опір дорівнює нулю. При короткому замиканні  $i \rightarrow \infty$  і потужність  $p = u \cdot i \rightarrow \infty$ , а джерел нескінченної потужності у природі не існує. Тому схема реального джерела містить у собі внутрішній опір. На рис. 1.11, а показано заступну схему джерела постійної напруги, до якого підключено

навантаження з опором  $R_H$ , а на рис. 1.11, б – його зовнішня характеристика.

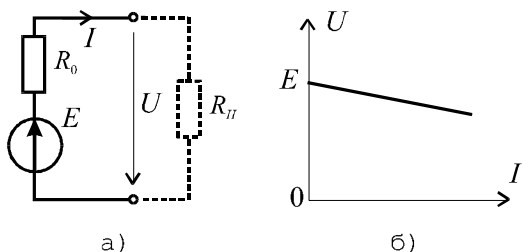


Рис. 1.11

Вихідна напруга джерела

$$U = E - IR_0. \quad (1.18)$$

Перейдемо до джерел струму. В ідеального джерела струму вихідний струм не залежить від навантаження (напруги між полюсами). На рис. 1.12 показані умовні позначення джерела змінного струму (а), постійного струму (б) та зовнішня характеристика ідеального джерела постійного струму (в).

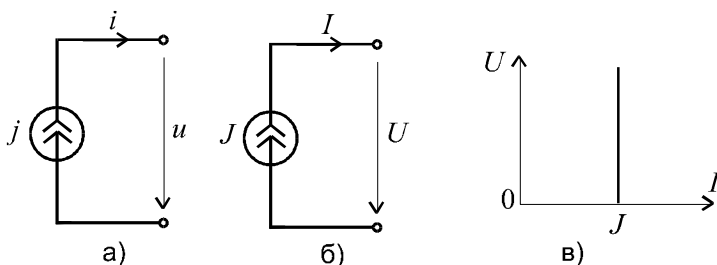


Рис. 1.12

Розглянемо джерело постійного струму при  $R_H \rightarrow \infty$ . У цьому випадку  $I = J = const$  не має сенсу. Тому заступна схема реального джерела постійного струму має вигляд, показаний на рис. 1.13, а. Його зовнішня характеристика показана на рис. 1.13, б.

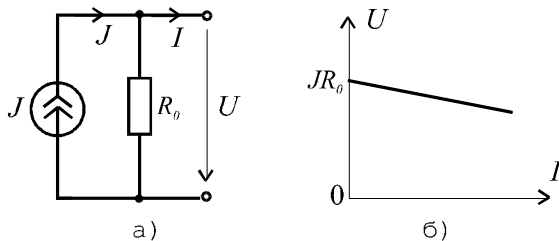


Рис. 1.13

Вихідна напруга джерела струму

$$U = (J - I) \cdot R_0 = JR_0 - IR_0. \quad (1.19)$$

Джерело напруги і джерело струму еквівалентні, якщо зовнішні характеристики однакові. Це має місце тоді, коли внутрішній опір джерела напруги (послідовний) дорівнює внутрішньому опору джерела струму (паралельному), а також справедливе співвідношення

$$E = JR_0. \quad (1.20)$$

Рис. 1.14 ілюструє еквівалентне перетворення джерела ЕРС у джерело струму.

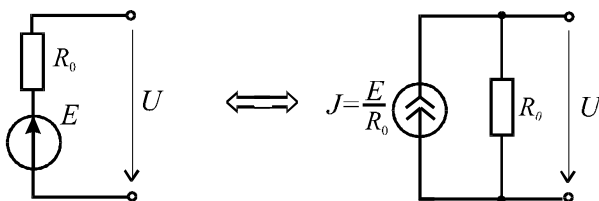


Рис. 1.14

**Зауваження:**

1. Джерело струму поняття розрахункове, тому що у природі існують джерела електричної енергії як джерела ЕРС (напруги).

2. Розглядалися некеровані джерела, які мають одну пару за- тискачів. У теорії кіл також використовується поняття керованих джерел, у яких вихідний параметр "у" є функцією струму чи напруги "х" будь - якої частки кола. Частіше використовуються лінійно-керовані джерела, у яких

$$y = k_y \cdot x, \quad (1.21)$$

де  $k_y$  - коефіцієнт керування.

Лінійно-керовані джерела не можуть віддавати енергію у відсутності керованої дії.

*Керовані елементи мають не два, а три або чотири полюси.* В якості прикладу на рис. 1.15 зображено еквівалентну схему біполярного транзистора на низьких частотах.

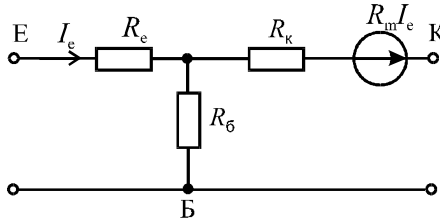


Рис. 1.15

### 1.5. СХЕМИ ТА ТОПОЛОГІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ СХЕМ

*Електрична схема* – це умовне графічне зображення електричного кола. Схеми бувають *структурними, принципovими та еквівалентними.*

*Структурні електричні схеми* – це графічне зображення кола, на якому відображено найважливіші частини кола та основні зв'язки між ними.

*Принципові електричні схеми* – графічне зображення кола, на якому відображено усі елементи кола, при цьому кожний реальний елемент має своє умовне позначення згідно з ЄСКД.

*Еквівалентні або розрахункові схеми* – тут кожний реальний елемент відображений його схемою заміщення. Ці схеми ми і будемо використовувати в розрахунках.

Основні елементи схеми: *вітка, вузол, контур.*

*Вітка* – частина кола, по якій проходить один і той же струм. *Вузол* – місце з'єднання трьох і більшої кількості віток. Якщо з'єднуються дві вітки, то маємо усунений вузол. *Контур* – замкнутий шлях, який проходить вітками схеми. Наприклад, схема рис. 1.16 має три вітки, два вузли, три контури.

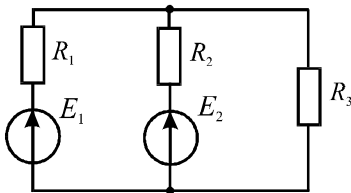


Рис. 1.16

З'єднання елементів, при якому по них тече один і той же струм, називається *послідовним.*

З'єднання елементів, при якому вони знаходяться під однією напругою, називається *паралельним.*



Комбінування цих з'єднань дає *змішане з'єднання*.

Зовнішні виводи схеми (кола) називаються *полюсами*. Залежно від кількості полюсів схеми (кола) розподіляють на *двополюсники та багатополіусники*.

*Граф* – це сукупність відрізків довільної довжини і форми, які називаються вітками (ребрами) графа, з'єднаних у вузли відповідно до схеми електричного кола. Розрізняють топологічні ненаправлені та направлені графи. У першому випадку ми маємо сукупність відрізків та вузлів, число яких співпадає з числом віток та вузлів схеми кола. У другому випадку відрізняють направлені топологічні графи і направлені графи проходження сигналів.

*Направлений топологічний граф* – це граф, на ребрах якого вказано напрям струму.

*Направлений граф проходження сигналів* – це наочне зображення системи рівнянь кола. Часто його ще називають сигнальним графом.

Графи бувають *планарні та непланарні*. *Планарний граф* може бути відображений на площині без «перемикача» віток.

*Шлях* – це сукупність віток на замкнутому шляху від одного вузла до другого (при цьому кожна вітка та вузол зустрічаються один раз на вибраному шляху).

*Дерево* – це підграф, який містить усі вузли, але не містить жодного контуру.

## 1.6. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА

*Компонентні рівняння* (рівняння віток) – встановлюють зв'язок між струмом і напругою кожної вітки.

Якщо вітка містить у собі один елемент, то рівняння віток будуть такі:  $u_R = Ri$ ;  $u_L = L \frac{di}{dt}$ ;  $u_c = \frac{1}{C} \int idt$ . Якщо вітка включає де-

кілька елементів, то в рівняння вітки входить сукупність цих рівнянь.

*Топологічні рівняння* – відображають властивості кола, що визначаються тільки її топологією (незалежно від елементів віток). Це, зокрема, рівняння, складені за першим і другим законами Кірхгофа.

*Перший закон Кірхгофа* має визначення: алгебраїчна сума миттєвих значень струмів усіх віток у вузлі дорівнює нулю у будь який момент часу

$$\sum i_k = 0. \quad (1.22)$$

Для наведеної на рис. 1.17 схеми можна записати

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0 \text{ або } i_1 + i_2 = i_3.$$

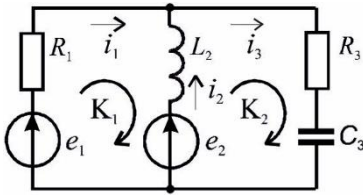


Рис. 1.17

Оскільки в схемі електричного кола кожен струм один раз виходить з певного вузла і один раз входить в інший вузол, то в рівняннях він записується один раз зі знаком *плюс* і один раз зі знаком *мінус*.

Тобто алгебраїчна сума всіх рівнянь тотожно дорівнює нулю; тому в сукупності  $q$  вузлових рівнянь тільки  $(q - 1)$  з них лінійно незалежні.

*Другий закон Кірхгофа* формулюється таким чином: алгебраїчна сума миттєвих значень напруг всіх віток, що входять у контур, дорівнює нулю у будь-який момент часу

$$\sum u_k = 0. \quad (1.23)$$

Якщо розглядати не вітки, а елементи та взяти до уваги, що напруга і ЕРС джерела мають протилежні напрями, то другий закон Кірхгофа можна записати у вигляді

$$\sum u_k = \sum e_k, \quad (1.24)$$

де  $u_k$  - напруга на  $k$ -му елементі контуру;  $e_k$  -  $k$ -та ЕРС контуру.

В контурному рівнянні напруга  $u_k$  та ЕРС  $e_k$  записуються зі знаком *плюс*, якщо їх напрям співпадає з напрямом обходу контуру. Наприклад, для першого контуру схеми рис. 1.17

$$i_1 R_1 - L_2 \frac{di_2}{dt} = e_1 - e_2.$$

При визначенні кількості незалежних контурів (або контурних рівнянь) можна користуватися таким правилом: достатньою умовою незалежності контуру є те, що кожний наступний контур повинен відрізнятися від попередніх хоча б одним новим ребром графа (віткою кола).

Цю вимогу задовольняє найпростіша система незалежних контурів, що відповідає коміркам графа.

Систему незалежних контурів можна отримати і за допомогою графа кола.

Розглянемо цей підхід на прикладі графа кола, зображеного на рис. 1.18, а. Спочатку зображається одне з дерев графа, наприклад, дерево згідно з рис. 1.18, б.

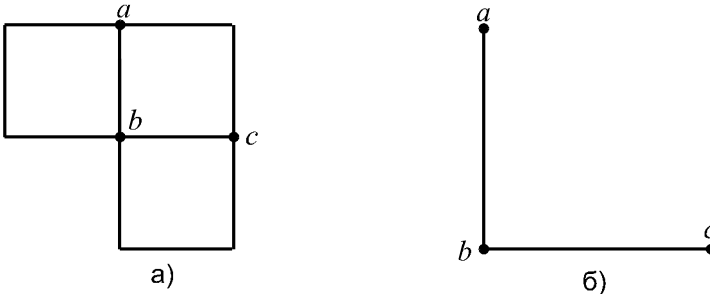


Рис.1.18

Далі кожне приєднання нового ребра (вітки) графа створює незалежний контур. Для цього дерева ми прийдемо до системи елементарних контурів. Для інших дерев це буде інша система трьох незалежних контурів.

### КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 1

1. Формула зв'язку між струмом і напругою:
  - на активному опорі;
  - на індуктивності;
  - на ємності.
2. Схеми заміщення реальних джерел напруги та струму.
3. Зовнішні характеристики реальних джерел напруги та струму.
4. Еквівалентні перетворення джерел напруги та струму.
5. Перший закон Кірхгофа.
6. Другий закон Кірхгофа.

# II РОЗДІЛ

## МЕТОДИ АНАЛІЗУ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

### 2.1. ПОСТІЙНИЙ СТРУМ. ПАРАМЕТРИ $R, L, C$ У КОЛІ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

*Постійним* називається струм, який не змінюється з часом. Графіки постійних ЕРС та струм показані на рис. 2.1

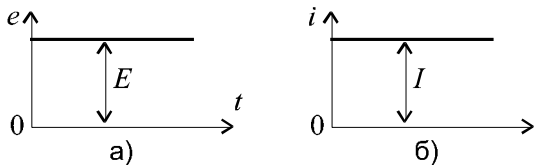


Рис. 2.1

Постійні струм, напругу, ЕРС позначають:  $I, U, E$ .

Якщо  $i(t) = I = const$ , то  $u_L = L \frac{di}{dt} = 0$ . Це означає, що ідеальна індуктивність не має опору постійному струму. Таким чином, індуктивність в будь-якому колі при підключенні кола до джерела постійної напруги слід замінити перемичкою, а потім здійснювати розрахунок кола.

Якщо  $u(t) = U = const$ , то  $i_C = C \frac{du}{dt} = 0$ . Це означає, що ємність не пропускає постійний струм. Тому, якщо коло містить ємність, то при розрахунку кола в разі дії джерела постійної напруги вітку з ємністю слід вважати розірваною.

Для довільного кола (рис. 2.2) його розрахункова схема при постійній напрузі приведена на рис. 2.3.

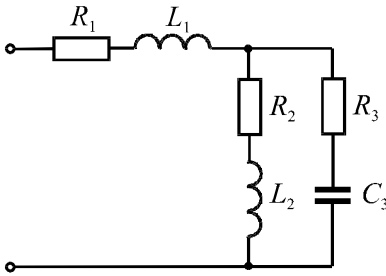


Рис. 2.2

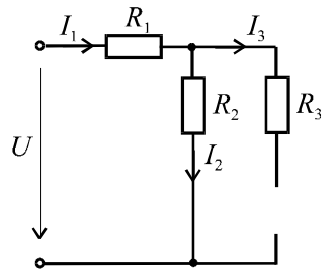


Рис. 2.3

Для схеми рис. 2.3 струми та напруги визначаються:

$$I_1 = I_2 = \frac{U}{R_1 + R_2}; \quad I_3 = 0; \quad U_{C_3} = I \cdot R_2.$$

Таким чином, аналіз електричних кіл постійного струму проводиться за схемами та рівняннями, які враховують ЕРС і активні опори  $R$ .

Рівняння законів мають вигляд:

1. Закон Ома для ділянки кола

Для  $k$ -тої ділянки кола струм визначається за формулою

$$I_k = \frac{U_k}{R_k}. \quad (2.1)$$

2. Закон Ома для ділянки кола з ЕРС

В загальному вигляді струм ділянки кола з ЕРС визначається за формулою

$$I_k = \frac{U_{ab} \pm E_k}{R_k}. \quad (2.2)$$

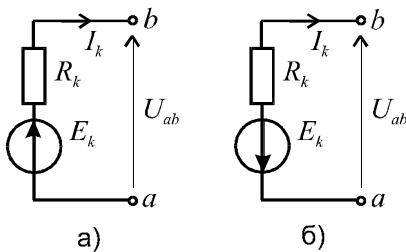


Рис. 2.4

Знак плюс відповідає схемі рис. 2.4, а, а знак мінус - схемі рис. 2.4, б.

3. Закон Ома для замкнутого кола

Для замкнутого кола, схема якого зображена на рис. 2.5, струм визначається за формулою

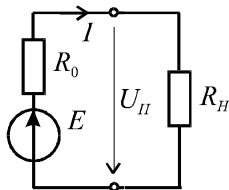


Рис. 2.5

$$I = \frac{E}{R_0 + R_H} . \quad (2.3)$$

4. Законы Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \sum I_k &= 0; \\ \sum I_k R_k &= \sum E_k . \end{aligned} \quad (2.4)$$

5. Закон Джоуля-Ленца

$$P = I^2 R = UI . \quad (2.5)$$

## 2.2. РЕЖИМИ РОБОТИ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА

Виділяють чотири характерних режими роботи: неробочий режим, режим короткого замикання, узгоджений та номінальний. Розглянемо характеристики цих режимів, користуючись схемою рис. 2.5.

### Неробочий режим

В цьому режимі опір навантаження  $R_H = \infty$ , отже струм  $I = 0$ . Напруга на навантаженні  $U_H = E - I \cdot R_0 = E$ .

Коефіцієнт корисної дії (ККД) джерела

$$\eta = \frac{P_H}{P_E} = \frac{U_H \cdot I}{E \cdot I} = \frac{U_H}{E} = 1 ,$$

але потужність в навантаженні  $P_H = U_H \cdot I = 0$ .

### Режим короткого замикання

Тут опір навантаження  $R_H = 0$  (полюси джерела закорочені) і струм в колі має максимально можливе значення

$$I_{кз} = \frac{E}{R_0} .$$

Як правило, такий струм є небезпечним для джерела чи провідників, і в коло включаються спеціальні пристрої для захисту від струмів короткого замикання, наприклад, запобіжники.

Інші характеристики режиму:

$$U_H = I_{кз} \cdot R_H = 0;$$

$$\eta = \frac{U_H \cdot I_{кз}}{E \cdot I_{кз}} = 0;$$

$$P_H = U_H \cdot I_{кз} = 0.$$

### Узгоджений режим

Це такий режим роботи, в якому при заданих величинах  $E$  та  $R_0$  в навантаженні виділяється максимальна потужність.

Визначимо опір  $R_H$ , який відповідає цьому режиму, для чого запишемо вираз для потужності  $P_H$  та проведемо дослідження функції на екстремум:

$$P_H = I^2 R_H = \frac{E^2 R_H}{(R_0 + R_H)^2};$$

$$\frac{dP_H}{dR_H} = E^2 \frac{(R_0 + R_H)^2 - 2(R_0 + R_H)R_H}{(R_0 + R_H)^4} = 0,$$

звідки випливає умова узгодженого режиму роботи  $R_H = R_0$ .

Кажуть, що в такому випадку навантаження узгоджено з джерелом.

В цьому режимі:

$$I = \frac{E}{2R_0} = \frac{I_{кз}}{2}, \quad U_H = \frac{E}{2}, \quad \eta = \frac{P_H}{P_E} = \frac{U_H}{E} = \frac{1}{2}.$$

Робота з таким ККД підходить до кіл з малими струмами, де на перше місце виходить потужність на навантаженні, а ККД – на другому місці, у зв'язку з тим, що абсолютні значення потужностей невеликі. При великих струмах ККД повинен бути значно вищим, а це має місце при  $R_H \gg R_0$

$$\eta = \frac{U_H I}{EI} = \frac{U_H}{E} = \frac{E \cdot R_H}{(R_0 + R_H)E} = \frac{R_H}{R_0 + R_H}.$$

### Номінальний режим

Це режим, на який розраховується устаткування. Якщо навантаження відповідає номінальному, то устаткування може працювати при цьому декілька років однозмінної або двозмінної роботи (або і трьохзмінної – наприклад, трансформатор).

Режим характеризується номінальними значеннями  $P_H, U_H, I_H, \eta_H$ .

### 2.3. АНАЛІЗ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ З ОДНИМ ДЖЕРЕЛОМ ЕНЕРГІЇ. ЕКВІВАЛЕНТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ СХЕМ

Еквівалентним будемо називати таке перетворення частини кола, в результаті якого струми та напруги в тій частині кола, яка не перетворюється, не змінюються.

#### Послідовне з'єднання елементів

Приклад послідовного включення елементів в електричне коло показано на рис. 2.6

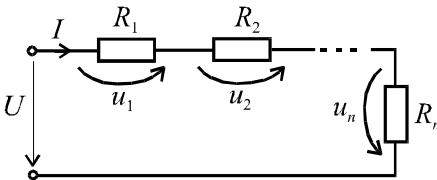


Рис. 2.6

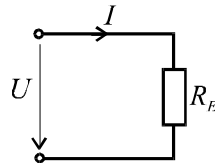


Рис. 2.7

За другим законом Кірхгофа

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n = IR_1 + IR_2 + \dots + IR_n = \\ = I(R_1 + R_2 + \dots + R_n) = IR_E, \quad (2.6)$$

$$\text{де } R_E = R_1 + R_2 + \dots + R_n. \quad (2.7)$$

Таким чином, при послідовному з'єднанні еквівалентний опір дорівнює арифметичній сумі опорів. Еквівалентне перетворення дає можливість перейти до схеми рис. 2.7, звідки струм

$$I = \frac{U}{R_E}. \quad (2.8)$$

Якщо праву та ліву частини (2.6) помножити на струм  $I$ , то отримаємо рівняння балансу потужностей

$$UI = U_1I + U_2I + \dots - +U_nI = I^2R_1 + I^2R_2 + \dots + I^2R_n, \quad (2.9)$$



тобто:  $P_{дж} = \sum_{k=1}^n P_{к.пр}$ .

*Потужність джерела дорівнює арифметичній сумі потужностей всіх приймачів.*

### Паралельне з'єднання елементів

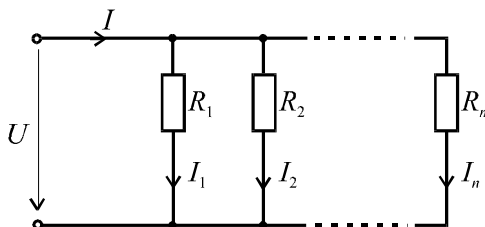


Рис.2.8

Приклад паралельного включення елементів в електричне коло показано на рис. 2.8.

За першим законом Кірхгофа

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_n} = \quad (2.10)$$

$$= U \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) = U \frac{1}{R_E},$$

$$\text{де } \frac{1}{R_E} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (2.11)$$

або  $G_E = G_1 + G_2 + \dots + G_n$ .

Отже при паралельному з'єднанні еквівалентна провідність кола дорівнює арифметичній сумі провідностей всіх віток.

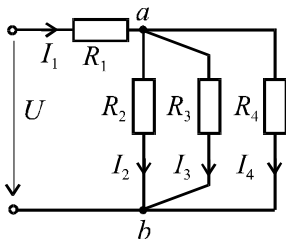
Еквівалентний опір паралельного з'єднання

$$R_E = \frac{1}{G_E} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}}. \quad (2.12)$$

Після еквівалентного перетворення паралельного з'єднання можна перейти до схеми рис 2.7.

### Змішане з'єднання елементів

Схема змішаного з'єднання елементів наведена на рис. 2.9. Задані напруга джерела і всі опори. Треба визначити струми віток.



Паралельно з'єднані опори  $R_1, R_2$  та  $R_3$  заміняємо еквівалентним опором

$$R_{234} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}.$$

Тепер від схеми рис. 2.9 можна перейти до схеми рис. 2.10

Для послідовного з'єднання

$$R_E = R_1 + R_{234}.$$

За законом Ома струм джерела  $I_1 = \frac{U}{R_E}$ .

Для схеми рис. 2.10 знаходимо напруги

$$U_1 = I_1 R_1; U_{ab} = U_{234} = I_1 \cdot R_{234}.$$

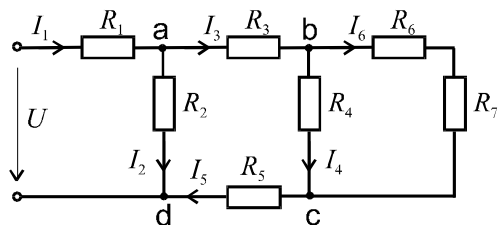
Значення струмів віток схеми (рис. 2.9) визначаються за формулами

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2}; \quad I_3 = \frac{U_{ab}}{R_3}; \quad I_4 = \frac{U_{ab}}{R_4}.$$

Баланс потужностей

$$UI_1 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4.$$

**Приклад 2.1.** Для схеми рис. 2.11 відомі ЕРС та величини опорів. Визначити струми віток.



$$U = 48 \text{ В}; R_1 = 4 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 8 \text{ Ом}; R_5 = 5 \text{ Ом};$$

$$R_3 = 2 \text{ Ом}; R_6 = 6 \text{ Ом}.$$

Рис. 2.11

Розв'язок.

Задамо напрям струмів віток. Опори  $R_6$  та  $R_7$  з'єднані послідовно, тому  $R_{67} = R_6 + R_7 = 6 + 6 = 12 \text{ Ом}$ .

Опори  $R_4$  та  $R_{67}$  з'єднані паралельно, тому

$$R_{467} = \frac{R_4 \cdot R_{67}}{R_4 + R_{67}} = \frac{6 \cdot 12}{6 + 12} = 4 \text{ Ом.}$$

Переходимо до схеми рис. 2.12.

Для послідовного з'єднання

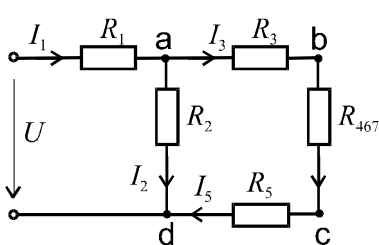


Рис. 2.12

$$R_{34675} = R_3 + R_{467} + R_5 = 2 + 4 + 2 = 8 \text{ Ом}$$

Опори  $R_2$  та  $R_{34675}$  з'єднані паралельно, тому опір ділянки

$$ad : R_{ad} = \frac{R_2 \cdot R_{34675}}{R_2 + R_{34675}} = \frac{8 \cdot 8}{8 + 8} = 4 \text{ Ом.}$$

Після проведення розрахунків схема (рис. 2.12) набуде вигляду рис. 2.13.

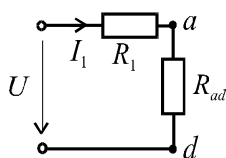


Рис. 2.13

Еквівалентний опір кола

$$R_E = R_1 + R_{ad} = 4 + 4 = 8 \text{ Ом.}$$

$$\text{Струм джерела } I_1 = \frac{U}{R_E} = \frac{48}{8} = 6 \text{ А.}$$

Напруга на ділянці  $ad$

$$U_{ad} = I_1 \cdot R_{ad} = 6 \cdot 4 = 24 \text{ В.}$$

Повертаємось до схеми рис. 2.12, і знаходимо струми:

$$I_2 = \frac{U_{ad}}{R_2} = \frac{24}{8} = 3 \text{ А}; I_3 = I_1 - I_2 = 6 - 3 = 3 \text{ А.}$$

Напруга на ділянці  $bc$ :  $U_{bc} = I_3 \cdot R_{467} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ В}$ , а струми віток схеми рис. 2.11 будуть:

$$I_4 = \frac{U_{bc}}{R_4} = \frac{12}{6} = 2 \text{ A}; \quad I_6 = I_3 - I_4 = 3 - 2 = 1 \text{ A}.$$

Задачу можна також розв'язати методом пропорційного пере-рахунку без перетворень схеми. Для цього задаємо довільно величину струму вітки, найбільш віддаленої від джерела. Наприклад за-дамо  $I'_6 = 2 \text{ A}$ .

Тоді струми та напруги визначаються:

$$U'_{bc} = I'_6 \cdot R_{67} = 2 \cdot 12 = 24 \text{ В};$$

$$I'_4 = U'_{bc} / R_4 = 24 / 6 = 4 \text{ А};$$

$$I'_3 = I'_4 + I'_6 = 4 + 2 = 6 \text{ А};$$

$$U'_{ad} = I'_3 R_3 + U'_{bc} + I'_3 R_5 = 6 \cdot 2 + 24 + 6 \cdot 2 = 48 \text{ В};$$

$$I'_2 = U'_{ad} / R_2 = 48 / 8 = 6 \text{ А};$$

$$I'_1 = I'_2 + I'_3 = 6 + 6 = 12 \text{ А};$$

$$U' = I'_1 R_1 + U'_{ad} = 12 \cdot 4 + 48 = 96 \text{ В}.$$

Враховуючи, що задана напруга вдвічі менша, всі струми треба вдвічі зменшити.

### Перетворення зірки та трикутника опорів

Еквівалентні перетворення трикутника опорів (рис. 2.14) на зірку опорів (рис. 2.15) або навпаки дозволяють звести схему всього кола до сукупності послідовно-паралельних з'єднань.

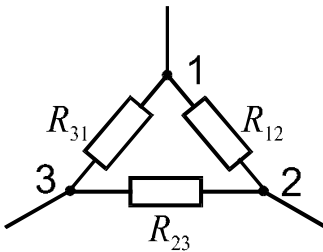


Рис. 2.14

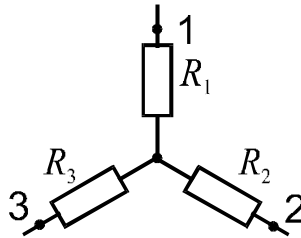


Рис. 2.15

Запишемо формули еквівалентних перетворень без обґрунтування.

Перетворення трикутника на зірку ( $\Delta \rightarrow Y$ ):

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{31} + R_{23}}; R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{31} + R_{23}}. \quad (2.13)$$

Тобто при перетворенні можна використовувати мнемонічне правило: опір вітки зірки, наприклад  $R_1$ , дорівнює добутку опорів віток трикутника, приєднаних до вузла 1, поділеному на суму опорів трикутника.

Перетворення зірки на трикутник ( $Y \rightarrow \Delta$ ):

$$\begin{aligned} R_{12} &= R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}; \\ R_{23} &= R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}; \\ R_{31} &= R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

**Правило.** Опір вітки трикутника, приєднаної до двох вузлів, дорівнює сумі опорів віток зірки, приєднаних до цих вузлів, плюс їх добуток, поділений на опір третьої вітки зірки.

**Приклад 2.2.** Для схеми рис. 2.16 відомі ЕРС та величини опорів. Визначити струм джерела.

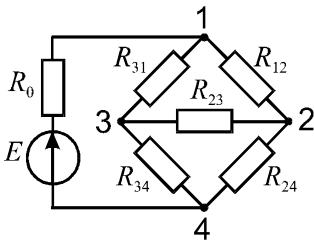


Рис 2.16

$$E = 24\text{В}; R_0 = 1\text{Ом};$$

$$R_{12} = R_{23} = R_{31} = 3\text{Ом};$$

$$R_{24} = 5\text{Ом}; R_{34} = 11\text{Ом}.$$

**Розв'язок**

Перетворюємо трикутник опорів  $R_{12}, R_{23}, R_{31}$  на зірку:

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{31} + R_{23}} = \frac{3 \cdot 3}{3 + 3 + 3} = 1 \text{ Ом};$$

$$R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{31} + R_{23}} = \frac{3 \cdot 3}{3 + 3 + 3} = 1 \text{ Ом};$$

$$R_3 = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{31} + R_{23}} = \frac{3 \cdot 3}{3 + 3 + 3} = 1 \text{ Ом}.$$

Переходимо до схеми рис. 2.17.

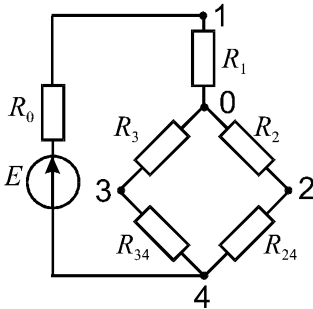


Рис. 2.17

Переходимо до схеми рис. 2.18.

Знаходимо еквівалентний опір паралельного з'єднання ділянки 04:

$$\begin{aligned} R_{04} &= \frac{(R_2 + R_{24})(R_3 + R_{34})}{R_2 + R_{24} + R_3 + R_{34}} = \\ &= \frac{(1+5)(1+11)}{1+5+1+11} = 4 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

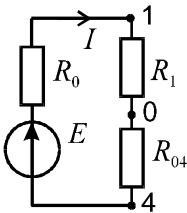


Рис. 2.18

Струм джерела

$$I = \frac{E}{R_0 + R_1 + R_{04}} = \frac{24}{1+1+4} = 4 \text{ А}.$$

Далі розглянемо основні методи аналізу складних електричних кіл, до яких відносяться розгалужені кола з декількома джерелами.

#### 2.4. МЕТОД РІВНЯНЬ КІРХГОФА

Метод базується на безпосередньому застосуванні 1-го та 2-го законів Кірхгофа. Розглянемо коло, схема якого наведена на рис.2.19. Задані всі ЕРС та опори, треба визначити струми віток.

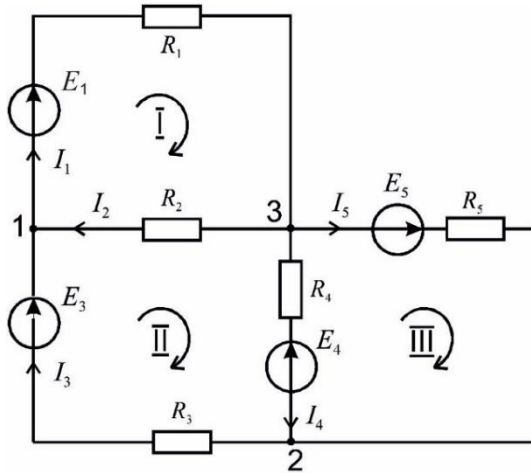


Рис. 2.19

Схема має 5 віток, отже число невідомих струмів  $p = 5$ . Для їх визначення потрібно скласти систему з 5-ти рівнянь. Методика їх складання така.

1. Довільно задаємо напрями струмів віток.

2. Для схеми, яка має три вузла ( $q = 3$ ), складаємо за першим законом Кірхгофа  $q - 1 = 2$  рівняння. При цьому струми, які направлені до вузла, беремо з одним знаком, а які направлені від вузла – з протилежним. Рівняння для першого і другого вузла будуть мати відповідно вигляд:

$$\begin{aligned}
 -I_1 + I_2 + I_3 &= 0; \\
 -I_3 + I_4 + I_5 &= 0.
 \end{aligned}$$

3. Ще три рівняння ( $p - (q - 1) = 5 - 2 = 3$ ) складаємо за другим законом Кірхгофа

$$\sum I_k R_k = \sum E_k.$$

При цьому рівняння складають для взаємонезалежних контурів. Достатньою умовою незалежності контурів є та обставина, що кожен контур містить хоча б одну нову вітку, яка не увійшла в інші контури. Елементарні контури відповідають цій умові. Отже обираємо в якості незалежних елементарні контури.

4. Задаємо довільно напрями обходу контурів (наприклад, всі – за рухом годинникової стрілки) і записуємо три рівняння:

$$\text{контур I} \quad I_1 R_1 + I_2 R_2 = E;$$

$$\text{контур II} \quad -I_2 R_2 + I_4 R_4 + I_3 R_3 = E_3 - E_4;$$

$$\text{контур III} \quad -I_4 R_4 + I_5 R_5 = E_4 + E_5.$$

Тут  $I_k R_k$  та  $E_k$  враховується зі знаком «+», якщо напрям  $I_k$  та  $E_k$  співпадає з напрямом обходу контуру.

5. Розв'язуємо систему 5-ти рівнянь і знаходимо струми  $I_1, I_2, \dots, I_5$ .

*Примітка 1.* Якщо струм має від'ємне значення, то його дійсний напрям протилежний обраному в П.1.

*Примітка 2.* Якщо в схемі є джерело струму, то його струм враховується в рівняннях першого закону Кірхгофа, а при складанні контурних рівнянь вітку з джерелом струму слід вважати розірваною. Можна також до складання рівнянь перетворити джерело струму в джерело ЕРС.

Для перевірки правильності розрахунку використовують рівняння балансу потужностей джерел та приймачів:

$$\sum P_{k.дж.} = \sum P_{k.пр.} \quad \text{або} \quad \sum E_k I_k = \sum I_k^2 R_k. \quad (2.18)$$

В лівій частині рівняння добуток  $E_k I_k$  беремо з знаком «+», якщо напрями  $E_k$  та  $I_k$  співпадають.

Так для схеми рис. 2.19

$$E_1 I_1 + E_3 I_3 - E_4 I_4 + E_5 I_5 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5$$

Основним недоліком методу рівнянь Кірхгофа є велика кількість рівнянь стану кола, які треба розв'язувати разом. Тому в теоретичній електротехніці розроблені методи аналізу, в яких стан кола описується меншою кількістю рівнянь. Основними з таких методів є метод контурних струмів та метод вузлових потенціалів.

## 2.5. МЕТОД КОНТУРНИХ СТРУМІВ

Цей метод розроблений Д. Максвеллом. В розрахунках вводяться так звані контурні струми і число рівнянь кола зводиться до числа рівнянь, які складені за другим законом Кірхгофа. По визначеним контурним струмам визначаються потім струми віток.



## Обґрунтування методу

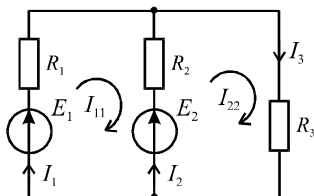


Рис. 2.20

Запишемо рівняння Кірхгофа для схеми рис. 2.20.

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0;$$

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = E_1 - E_2;$$

$$I_2 R_2 + I_3 R_3 = E_2.$$

За допомогою першого рівняння виключаємо струм  $I_2$  вітки, загальної для двох контурів, і отримаємо систему

$$\left. \begin{aligned} I_1 R_1 - (I_3 - I_1) R_2 &= E_1 - E_2; \\ (I_3 - I_1) R_2 + I_3 R_3 &= E_2 \end{aligned} \right\}$$

або

$$\left. \begin{aligned} I_1 (R_1 + R_2) - I_3 R_2 &= E_1 - E_2; \\ -I_1 R_2 + I_3 (R_2 + R_3) &= E_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Бачимо, що в системі (2.19)  $I_1$  відіграє роль контурного струму 1-го контуру, а  $I_3$  – другого контуру. Позначимо контурні струми двох контурів відповідно  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ , тобто  $I_{11} = I_1$ , а  $I_{22} = I_3$ , а струм вітки загальної для двох контурів:  $I_2 = I_{22} - I_{11}$ .

Остаточно система рівнянь для контурних струмів в загальному вигляді має вид

$$\left. \begin{aligned} I_{11} \cdot R_{11} + I_{22} \cdot R_{12} &= E_{11}; \\ I_{11} \cdot R_{21} + I_{22} \cdot R_{22} &= E_{22}, \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

де:  $R_{11} = R_1 + R_2$ ;  $R_{22} = R_2 + R_3$  контурні опори;

$R_{12} = R_{21} = -R_2$  взаємний опір двох контурів;

$E_{11} = E_1 - E_2$ ;  $E_{22} = E_2$  контурні ЕРС.

Відмітимо, що при однаковому напрямку контурних струмів (наприклад, за рухом годинникової стрілки) взаємні опори будуть від'ємними.

*Методика застосування методу контурних струмів*

1. Задаємо напрям контурних струмів незалежних контурів. Краще в їх якості обрати елементарні контури, а напрями струмів – однаковими, що забезпечить однотипність рівнянь.

2. Записуємо контурні рівняння для контурних струмів (система (2.20) в прикладі), обравши напрями обходу контурів, які співпадають з контурними струмами. При цьому в контурному рівнянні завжди з знаком "+" записується струм контуру, який розглядається, помножений на контурний опір, а зі знаком "-" струм суміжного контуру, помножений на їх загальний опір.

3. Розв'язуємо систему рівнянь відносно контурних струмів  $I_{11}, I_{22}, \dots$

4. Задаємо напрями струмів віток.

5. Розраховуємо струми віток через контурні струми. При цьому струм вітки, по якій проходить один контурний струм, визначається цим струмом (дорівнює йому з знаком «+», якщо їх напрями співпадають), а струм вітки, загальної для двох контурів, – алгебраїчною сумою контурних струмів.

*Приклад 2.3.* Для схеми рис. 2.19 скласти контурні рівняння та записати струми віток через контурні.

*Розв'язок*

Запишемо контурні рівняння

$$\left. \begin{aligned} I_{11}(R_1 + R_2) - I_{22} \cdot R_2 - I_{33} \cdot 0 &= E_1; \\ -I_{11} \cdot R_2 + I_{22}(R_2 + R_3 + R_4) - I_{33} \cdot R_4 &= E_3 - E_4; \\ -I_{11} \cdot 0 - I_{22} \cdot R_4 + I_{33}(R_4 + R_5) &= E_4 + E_5. \end{aligned} \right\}$$

Цю систему рівнянь можна записати і в матричній формі

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2) & -R_2 & 0 \\ -R_2 & (R_2 + R_3 + R_4) & -R_4 \\ 0 & -R_4 & (R_4 + R_5) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ (E_3 - E_4) \\ (E_4 + E_5) \end{bmatrix}.$$

Для розв'язку системи використовуємо метод визначників або метод послідовного виключення невідомих.

Визначивши  $I_{11}, I_{22}, I_{33}$ , знаходимо струми віток:

$$I_1 = I_{11}; I_2 = I_{11} - I_{22}; I_3 = I_{22};$$

$$I_4 = I_{22} - I_{33}; I_5 = I_{33}.$$

*Примітка.* Якщо в схемі є джерело струму, то до складання рівнянь його можна перетворити в джерело ЕРС. Однак рівняння можна скласти і без перетворення. Для цього треба так обрати незалежні контури, щоб по вітці з джерелом струму проходив тільки один контурний струм. Тоді цей контурний струм буде відомим і дорівнювати струму джерела струму.

## 2.6. МЕТОД ВУЗЛОВИХ ПОТЕНЦІАЛІВ

Вперше метод був обґрунтований Д. Максвеллом. Метод базується на першому законі Кірхгофа та законі Ома. Невідомими тут є потенціали вузлів, які визначаються відносно базисного вузла, потенціал якого приймається рівним нулю. Таким чином, кількість рівнянь стану кола відносно потенціалів вузлів буде дорівнювати кількості рівнянь, які складені за першим законом Кірхгофа. Визначивши потенціали вузлів, за законом Ома визначаємо струми віток.

### *Обґрунтування методу*

Прийемо для схеми рис. 2.19 в якості базисного вузол 3, для якого  $\varphi_3 = 0$ .

За першим законом Кірхгофа для вузлів 1 та 2 маємо

$$\left. \begin{aligned} -I_1 + I_2 + I_3 &= 0; \\ -I_3 + I_4 + I_5 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Струми віток за законом Ома

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{\varphi_1 + E_1}{R_1}; I_2 = \frac{-\varphi_1}{R_2}; I_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + E_3}{R_3}; \\ I_4 &= \frac{-\varphi_2 - E_4}{R_4}; I_5 = \frac{E_5 - \varphi_2}{R_5}. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Підставивши 2.22 в 2.21, дістанемо

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \varphi_2 \cdot \frac{1}{R_3} &= -\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_3}{R_3}; \\ -\varphi_1 \frac{1}{R_3} + \varphi_2 \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) &= -\frac{E_4}{R_4} + \frac{E_5}{R_5} \end{aligned} \right\} (2.23)$$

або:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(G_1 + G_2 + G_3) - \varphi_2 G_3 &= -E_1 G_1 + E_3 G_3; \\ -\varphi_1 G_3 + \varphi_2(G_3 + G_4 + G_5) &= -E_4 G_4 + E_5 G_5, \end{aligned} \right\} (2.24)$$

де:  $G_1 + G_2 + G_3 = G_{11}$ ;  $G_3 + G_4 + G_5 = G_{22}$  - вузлові провідності, які дорівнюють сумі провідностей віток, що сходяться в вузлі;  $G_{12} = G_{21} = -G_3$  - взаємна провідність між двома вузлами (провідність вітки (віток), яка з'єднує вузли і взята зі знаком "-");  $-E_1 G_1 + E_3 G_3 = J_1$ ;  $-E_4 G_4 + E_5 G_5 = J_2$  - вузлові струми.

Бачимо, що в рівнянні для вузла потенціал цього вузла, помножений на вузлову провідність, записується з знаком "+", а потенціал суміжного вузла, помножений на взаємну провідність, записується з знаком "-". В правій частині  $E_k G_k$  записується з знаком "+", якщо ЕРС направлена до вузла, який розглядаємо.

### *Методика застосування методу вузлових потенціалів*

1. Довільно обирається базисний вузол.
2. Складаються рівняння відносно потенціалів вузлів (системи 2.24 в прикладі), керуючись для кожного  $i$  - того вузла рівнянням  $\varphi_i G_{ii} + \sum \varphi_k G_{ik} = I_i$ .
3. Визначаються потенціали вузлів.
4. Задається довільний напрям струмів віток.
5. За законом Ома визначається струм віток (рівняння 2.22 в прикладі).

*Примітка 1.* Якщо в схемі є джерела струму то їх струми враховуються правою частиною вузлових рівнянь з знаком «+», якщо струм направлений до вузла.

*Примітка 2.* Якщо в схемі є вітка з ідеальним джерелом ЕРС, то за базисний треба обрати один з двох вузлів, до яких приєднана ця вітка. Тоді потенціал другого вузла стане відомим (він відрізняється від потенціалу базисного вузла на величину ЕРС) і кількість рівнянь зменшується на одиницю.

Приклад 2.4. Для схеми рис. 2.21 скласти систему вузлових рівнянь.

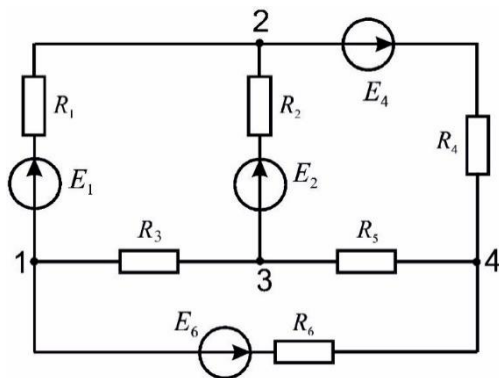


Рис. 2.21

*Розв'язок.*

Якщо прийняти  $\varphi_4 = 0$ , то отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \varphi_1(G_1 + G_3 + G_6) - \varphi_2 G_1 - \varphi_3 G_3 &= -E_1 G_1 - E_6 G_6; \\ -\varphi_1 G_1 + \varphi_2(G_1 + G_2 + G_4) - \varphi_3 G_2 &= E_1 G_1 + E_2 G_2 - E_4 G_4; \\ -\varphi_1 G_3 - \varphi_2 G_2 + \varphi_3(G_2 + G_3 + G_5) &= -E_2 G_2. \end{aligned}$$

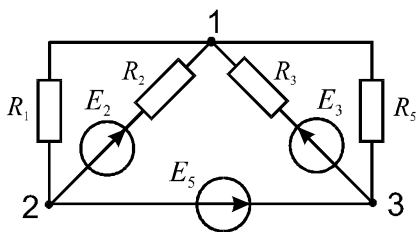


Рис. 2.22

Приклад 2.5. Для схеми рис. 2.22 скласти систему вузлових рівнянь.

*Розв'язок*

Прийнявши  $\varphi_2 = 0$ , отримаємо  $\varphi_3 = E_5$ .

Невідомим є потенціал вузла 1, тобто треба скласти одне рівняння:

$$\varphi_1(G_1 + G_2 + G_3 + G_5) - \varphi_3(G_3 + G_5) = E_2G_2 + E_3G_3.$$

Визначивши  $\varphi_1$ , за законом Ома визначаємо струми віток. Струм вітки з ЕРС  $E_5$ , опір якої дорівнює нулю, визначаємо за першим законом Кірхгофа для вузла 2 або для вузла 3. Відмітимо, що для цієї схеми за методом рівнянь Кірхгофа потрібно скласти та розв'язати систему з п'яти рівнянь, а за методом контурних струмів – систему з трьох рівнянь.

### 2.7. ПОРІВНЯННЯ МЕТОДІВ РОЗРАХУНКУ КІЛ

*Приклад 2.6.* Для схеми рис. 2.23 відомі ЕРС та величини опорів. Визначити струми віток методом контурних струмів та методом вузлових потенціалів, скласти баланс потужностей.

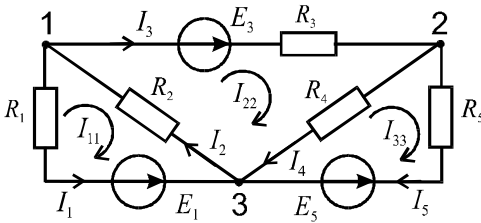


Рис. 2.23

$$\begin{aligned} E_1 &= E_3 = 10 \text{ В}; \\ R_1 &= 9 \text{ Ом}; R_2 = 5 \text{ Ом}; \\ R_3 &= 10 \text{ Ом}; R_4 = 2 \text{ Ом}; \\ R_5 &= 3 \text{ Ом}; E_5 = 8 \text{ В}. \end{aligned}$$

**Розв'язок методом контурних струмів**

1. Задаємо напрями контурних струмів  $I_{11}, I_{22}, I_{33}$  за рухом годинникової стрілки.

2. Записуємо систему контурних рівнянь

$$\begin{aligned} I_{11}(R_1 + R_2) - I_{22}R_2 &= -E_1; \\ -I_{11} \cdot R_2 + I_{22}(R_2 + R_3 + R_4) - I_{33}R_4 &= E_3; \\ -I_{22}R_4 + I_{33}(R_4 + R_5) &= -E_5. \end{aligned}$$

Підставимо числові дані

$$\begin{aligned}
 14I_{11} - 5I_{22} &= -10; \\
 -5I_{11} + 17I_{22} - 2I_{33} &= 10; \\
 -2I_{22} + 5I_{33} &= -8.
 \end{aligned}$$

3. Розв'язуємо систему рівнянь методом визначників:

- визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 14 & -5 & 0 \\ -5 & 17 & -2 \\ - & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1009;$$

- контурні струми:

$$I_{11} = \frac{\begin{vmatrix} -10 & -5 & 0 \\ 10 & 17 & -2 \\ -8 & -2 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-640}{1009} = -0,635 \text{ A};$$

$$I_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 14 & -10 & 0 \\ -5 & 10 & -2 \\ 0 & -8 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{226}{1009} = 0,225 \text{ A};$$

$$I_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 14 & -5 & -10 \\ -5 & 17 & 10 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-1524}{1009} = -1,520 \text{ A}.$$

4. Задаємо напрями струмів віток  $I_1, I_2, \dots, I_5$ .

5. Визначаємо струми віток через контурні струми:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= -I_{11} = -(-0,635) = 0,635 \text{ A}; \\
 I_3 &= I_{22} = 0,225 \text{ A}; \quad I_5 = I_{33} = -1,52 \text{ A}; \\
 I_2 &= I_{22} - I_{11} = 0,225 - (-0,635) = 0,86 \text{ A}; \\
 I_4 &= I_{22} - I_{33} = 0,225 - (-1,52) = 1,745 \text{ A}.
 \end{aligned}$$

Дійсний напрям струму  $I_5$  протилежний обраному в П. 4.

6. Складемо баланс потужностей для вказаних на схемі напрямів струмів віток:

$$\begin{aligned}
 E_1 I_1 + E_3 I_3 - E_5 I_5 &= I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5; \\
 10 \cdot 0,635 + 10 \cdot 0,225 - 8 \cdot (-1,52) &= 0,635^2 \cdot 9 + 0,86^2 \cdot 5 + \\
 + 0,225^2 \cdot 10 + 1,745^2 \cdot 2 + 1,52^2 \cdot 3; \\
 20,76 \text{ Вт} &= 20,80 \text{ Вт},
 \end{aligned}$$

тобто баланс виконується.

#### Розв'язок методом вузлових потенціалів

1. Обираємо в якості базисного вузол 3. Потенціал цього вузла приймемо рівним нулю, тобто  $\varphi_3 = 0$ .

2. Складаємо систему рівнянь відносно потенціалів вузлів:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \varphi_2 \frac{1}{R_3} &= -E_1 \frac{1}{R_1} - E_3 \frac{1}{R_3}. \\
 -\varphi_1 \frac{1}{R_3} + \varphi_2 \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) &= E_3 \frac{1}{R_3} + E_5 \frac{1}{R_5}.
 \end{aligned}$$

3. Підставимо числові значення:

$$\begin{aligned}
 0,41\varphi_1 - 0,1\varphi_2 &= -2,11; \\
 -0,1\varphi_1 + 0,93\varphi_2 &= 3,67.
 \end{aligned}$$

4. Розв'язуючи систему рівнянь, отримаємо:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= -4,29 \text{ В}; \\
 \varphi_2 &= 3,48 \text{ В}.
 \end{aligned}$$



5. Визначаємо струми віток:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 + E_1}{R_1} = \frac{-4,29 + 10}{9} = 0,634 \text{ A};$$

$$I_2 = -\frac{\varphi_1}{R_2} = \frac{-(-4,29)}{5} = 0,858 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_3}{R_3} = \frac{-4,29 - 3,48 + 10}{10} = 0,224 \text{ A};$$

$$I_4 = -\frac{\varphi_2}{R_4} = \frac{3,48}{2} = 1,740 \text{ A};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_2 + E_5}{R_5} = \frac{3,48 - 8}{3} = -1,510 \text{ A}.$$

Бачимо, що другим методом отримані практично ті самі значення струмів (незначні розходження обумовлені округленнями в розрахунках), але тут кількість рівнянь в системі менша. В методі рівнянь Кірхгофа кількість рівнянь для цієї схеми дорівнює 5.

Методи контурних струмів та вузлових потенціалів відносяться до машинних методів аналізу електричних кіл. Крім цих основних методів у практиці аналізу кіл знаходять застосування метод накладання та метод еквівалентного генератора.

Метод накладання передбачає розрахунок кола для кожної ЕРС окремо (інші ЕРС при цьому вважаються закороченими), а дійсні струми віток визначаються сумою часткових складових струмів від окремих ЕРС. Застосування методу накладання буде розглянуто в 6-ому розділі.

У методі еквівалентного генератора все електричне коло по відношенню до вітки, струм якої потрібно визначити, замінюється еквівалентним джерелом ЕРС з внутрішнім опором. Приклад 10.3 ілюструє застосування цього методу.

Детально методика аналізу за методами контурних струмів та вузлових потенціалів, методом накладання, методом еквівалентного генератора та методом взаємності з прикладами розглянута в навчальному посібнику [2].

## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 2

1. Закон Ома для ділянки кола.
2. Закон Ома для замкнутого кола.
3. Перший та другий закони Кірхгофа для кіл постійного струму.
4. Закон Джоуля – Ленца.
5. Режим роботи електричного кола.
6. Кількість рівнянь, що складається за першим законом Кірхгофа.
7. Кількість рівнянь, що складається за другим законом Кірхгофа.
8. Рівняння балансу потужностей.
9. Правило складання контурних рівнянь за методом контурних струмів.
10. Методика застосування методу контурних струмів.
11. Методика застосування методу вузлових потенціалів.
12. Правило складання вузлових рівнянь.
13. Сутність методу накладання.
14. Сутність методу еквівалентного генератору.
15. Сутність методу взаємності.

# III РОЗДІЛ

## ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА СИНУСОЇДАЛЬНОГО СТРУМУ

### 3.1. СИНУСОЇДАЛЬНИЙ СТРУМ ТА ЙОГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

*Причини широкого застосування синусоїдального струму:*

1. Генератори синусоїдального струму, які виробляють практично всю електричну енергію, більш прості та дешевші порівняно з генераторами постійного струму.
2. Синусоїдальний струм легко перетворюється з однієї величини напруги на іншу.
3. Трифазний асинхронний двигун (змінного струму) вигідно відрізняється від всіх електричних двигунів.

Миттєві значення синусоїдальних ЕРС, напруг та струмів описуються функціями:

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e); \quad u = U_m \sin(\omega t + \psi_u); \quad i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Миттєві значення на хвильових діаграмах можна зобразити як функції часу (рис. 3.1), так як і функції кута (рис. 3.2).

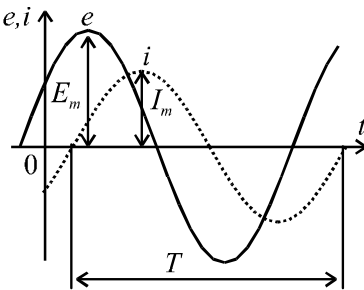


Рис. 3.1

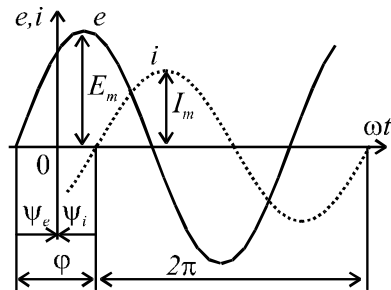


Рис. 3.2

*Характеристики синусоїдальних функцій часу*

$E_m, I_m$  – амплітуди ЕРС та струму;

$(\omega t + \psi_e)$ ,  $(\omega t + \psi_i)$  – повні фази, або просто фази;

$\psi_e, \psi_i$  – початкові фази;  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$  – кутова частота, ( $c^{-1}$ );

$T$  – період (с) та  $f = \frac{1}{T}$  – частота (Гц).

Промислова частота у країнах Європи  $f = 50 \text{ Гц}$ .

Різниця фаз ЕРС і струму  $\varphi = \psi_e - \psi_i$  називається *зсувом фаз*. Якщо  $\varphi = 0$ , то функції співпадають по фазі (збігаються за фазою); якщо  $\varphi = \pm\pi$ , то функції знаходяться в протифазі.

*Амплітуда, частота та початкова фаза повністю характеризують синусоїдальну функцію часу.*

До інших характеристик синусоїдальних функцій відносяться *середні та діючі значення*.

Враховуючи те, що середнє значення синусоїдальній функції за період дорівнює нулю, користуються їх середнім значенням за половину періоду

$$I_{\text{сеп}} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} I_m. \quad (3.1)$$

Аналогічно:  $E_{\text{сеп}} = \frac{2}{\pi} E_m$ ;  $U_{\text{сеп}} = \frac{2}{\pi} U_m$ .

Діюче значення змінного струму чисельно дорівнює такому значенню постійного струму, який за період  $T$  виділяє таку саму кількість енергії в опорі  $R$ , що і змінний струм:

$$RI^2T = \int_0^T Ri^2 dt.$$

Для синусоїдального струму  $i = I_m \sin \omega t$  отримаємо

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (3.2)$$

Таким чином  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,7 I_m$ .

Аналогічно розраховуються діючі значення ЕРС і напруги.

При змінному струмі і напрузі в розрахунках треба буде враховувати всі параметри кола ( $R, L, C$ ), а закони Кірхгофа – записувати для миттєвих значень з врахуванням того, що:

$$u_R = R \cdot i; \quad u_L = L \frac{di}{dt}; \quad i_c = C \frac{du_c}{dt}.$$

### 3.2. ВЕКТОРНІ ДІАГРАМИ

Додавання синусоїдальних функцій однакової частоти можна здійснити аналітично. Наприклад, для двох струмів:

$$i = i_1 + i_2 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + I_{2m} \cdot \sin(\omega t + \psi_2) = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Тобто результатом буде синусоїдальна функція тієї ж частоти, а її амплітуда та початкова фаза визначаються формулами:

$$I_m = \sqrt{\underbrace{(I_{1m} \cos \psi_1 + I_{2m} \cos \psi_2)}_A^2 + \underbrace{(I_{1m} \sin \psi_1 + I_{2m} \sin \psi_2)}_B^2};$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{B}{A}.$$

Однак, при числі струмів або напруг більше двох при аналізі електричних кіл доцільніше застосувати векторні діаграми.

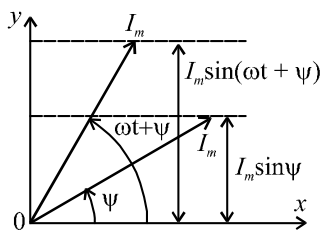


Рис. 3.3

На площині зобразимо вектор, який обертається з кутовою частотою  $\omega$  синусоїдальної функції. Модуль вектора дорівнює амплітуді функції  $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$ . Початкове положення вектора при  $t = 0$  буде під кутом  $\psi$  до осі  $x$ . Dodatній відлік кута  $\psi$  здійснюється проти руху годинникової стрілки (рис. 3.3). Проекція вектора  $I_m$

на вісь "y" дорівнює миттєвому значенню синусоїдального струму. Розглянемо струми  $i_1 = I_{1m} \sin \omega t$  та  $i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + 45^\circ)$ .

Зобразимо вектори  $\underline{I}_{1m}, \underline{I}_{2m}$  при  $t = 0$  на векторній діаграмі (рис. 3.4). Якщо ці два вектори будуть обертатись з однаковою частотою, то зі зміною часу кут між ними не змінюється і буде рівним  $45^\circ$ .

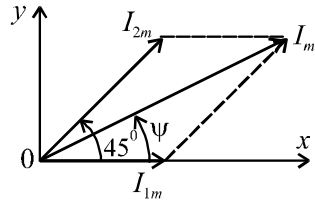


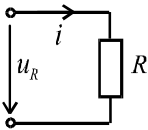
Рис. 3.4.

Відомо, що сума проєкцій векторів на будь-яку вісь дорівнює проєкції геометричної суми цих векторів. В нашому випадку результуючий синусоїдальний струм зобразиться вектором, який дорівнює геометричній сумі двох векторів. З діаграми знаходимо  $I_m, \psi$ .

Оскільки взаємне положення векторів при обертанні не змінюється, то їх зображують для  $t = 0$ . Далі буде показано, що математичний опис векторних величин та операції над ними здійснюються за допомогою комплексних чисел.

### 3.3. АКТИВНИЙ ОПІР У КОЛІ СИНУСОЇДАЛЬНОГО СТРУМУ

Розглянемо схему, представлену на рис. 3.5.



Якщо струм описується виразом  $i = I_m \sin \omega t$ , то миттєве значення напруги на опорі

$$u_R = Ri = RI_m \sin \omega t = U_{Rm} \sin \omega t,$$

Рис. 3.5 де  $U_{Rm} = RI_m$ . Після ділення на  $\sqrt{2}$  отримаємо закон Ома для діючих значень напруги та струму

$$U_R = RI. \quad (3.3)$$

Миттєві значення напруги та струму на резисторі  $R$  співпадають по фазі. Цьому відповідає векторна діаграма рис. 3.6.

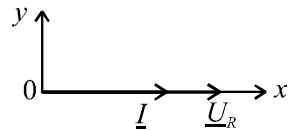


Рис. 3.6

Миттєва потужність

$$p_R = u_R i = U_{Rm} I_m \sin^2 \omega t = U_R I - U_R I \cos 2\omega t.$$

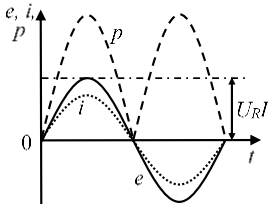


Рис. 3.7

З цієї формули та рис. 3.7 видно, що  $P_R \geq 0$ . Це свідчить про один напрямок передачі енергії – від джерела до резистивного навантаження.

Середнє значення потужності визначається:

$$P_{\text{сеп}} = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = U_R I = RI^2, \quad (3.4)$$

тобто середня потужність на  $R$  дорівнює активній потужності.

### 3.4. ІНДУКТИВНІСТЬ ПРИ СИНУСОЇДАЛЬНОМУ СТРУМІ

Розглянемо електричне коло з індуктивністю  $L$  (рис. 3.8).

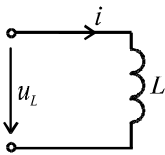


Рис. 3.8

Якщо струм описується виразом  $i = I_m \cdot \sin \omega t$ , то миттєве значення напруги

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \omega L \cdot I_m \cdot \cos \omega t = U_{Lm} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}).$$

Аналіз одержаного виразу для напруги  $u_L$  дозволяє зробити наступні висновки:

1. Амплітуди напруги та струму зв'язані законом Ома

$$U_{Lm} = \omega L \cdot I_m = X_L \cdot I_m,$$

де  $X_L = \omega L$  – індуктивний опір.

Після ділення амплітудних значень на  $\sqrt{2}$  отримаємо закон Ома для діючих значень напруги та струму

$$U_L = X_L \cdot I. \quad (3.5)$$

2. Миттєве значення напруги  $u_L$  випереджає струм на кут  $\frac{\pi}{2}$ . Цьому відповідає векторна діаграма рис. 3.9.

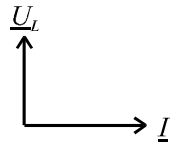


Рис. 3.9

Миттєва потужність

$$p_L = u_L \cdot i = U_{Lm} \cdot I_m \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t = \frac{U_{Lm} \cdot I_m}{2} \sin 2\omega t = U_L \cdot I \cdot \sin 2\omega t = Q_L \cdot \sin 2\omega t.$$

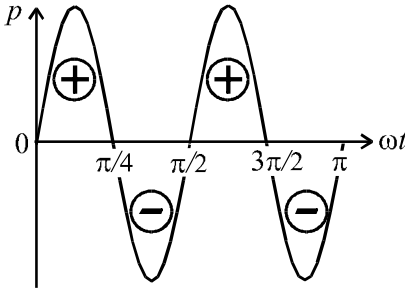


Рис. 3.10

З рис. 3.10 видно, що середнє значення потужності за період  $T$  дорівнює нулю ( $P_{сеп} = 0$ ), тобто індуктивність не споживає активної енергії.

На протязі чверті періоду  $p_L > 0$ , що свідчить про надходження енергії від джерела і накопичування її в магнітному полі, а на протязі другої чверті

періоду  $p_L < 0$  - енергія повертається до джерела. Так як  $p_L = \frac{dW}{dt}$

, то миттєва потужність  $p_L$  характеризує швидкість надходження енергії в магнітне поле чи з нього до джерела. Як міру швидкості цього обміну енергії використовують амплітуду потужності  $p_L$ , яка називається реактивною потужністю і визначається:

$$Q_L = U_L \cdot I = I^2 \cdot X_L. \quad (3.6)$$

З точки зору фізики це умовна потужність тому, що не здійснюється робота. Щоб відрізнити її від активної потужності одиницею її виміру є вольт-ампери реактивні (Вар).

### 3.5. ЄМНІСТЬ ПРИ СИНУСОЇДАЛЬНОМУ СТРУМІ

Розглянемо електричне коло з ємністю  $C$  (рис. 3.11).

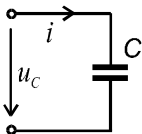


рис. 3.11

Якщо  $i = I_m \cdot \sin \omega t$ , то

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt = -\frac{1}{\omega C} \cdot I_m \cos \omega t = U_{Cm} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}).$$

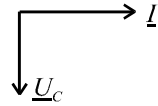
Отже і для ємності амплітуди та діючі значення напруги та струму також зв'язані законом Ома



$$U_{Cm} = \frac{1}{\omega C} \cdot I_m = X_C \cdot I_m \Rightarrow U_C = X_C \cdot I, \quad (3.7)$$

де  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  - ємнісний опір.

Миттєве значення напруги відстає від струму на кут  $\frac{\pi}{2}$ . Це ілюструється векторною діаграмою рис.



3.12.

Миттєва потужність

Рис. 3.12

$$p_C = u_C i = -U_{Cm} I_m \cos \omega t \sin \omega t = -U_C I \sin 2\omega t = -Q_C \sin 2\omega t$$

Середня потужність для ємності  $P_{сеп} = 0$ . В цьому колі також відбувається періодичний обмін енергіями між джерелом та електричним полем ємності. Реактивна потужність ємності визначається

$$Q_C = U_C \cdot I = I^2 X_C.$$

### 3.6. УСТАЛЕНИЙ РЕЖИМ RLC КОЛА СИНУСОЇДАЛЬНОГО СТРУМУ

Розглянемо електричне коло, до складу якого входить ємність  $C$ , індуктивність  $L$  та опір  $R$  (рис. 3.13). Задано струм в колі  $i = I_m \sin \omega t$ , та параметри  $R$ ,  $L$ ,  $C$ . Потрібно визначити напругу на вході кола, тобто знайти її амплітуду та початкову фазу.

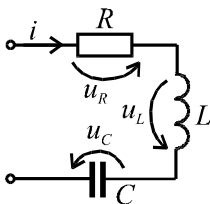


Рис. 3.13

За другим законом Кірхгофа

$$\begin{aligned} u &= u_R + u_L + u_C = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = \\ &= RI_m \sin \omega t + \omega LI_m \cos \omega t - \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t = \\ &= U_{Rm} \sin \omega t + U_{Lm} \cos \omega t - U_{Cm} \cos \omega t. \end{aligned}$$

Замість рівняння для миттєвих значень запишемо рівняння для векторів напруг  $\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C$ . Цьому рівнянню відповідає векторна діаграма рис. 3.14.

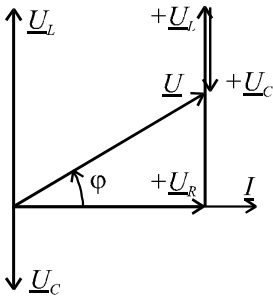


Рис. 3.14

З векторної діаграми діюче значення напруги та її фаза визначаються:

$$\begin{aligned}
 U &= \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \\
 &= \sqrt{(IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2} = \\
 &= I \cdot \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I \cdot Z; \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

$$\varphi = \arctg \frac{U_L - U_C}{U_R} = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}; \quad (3.9)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad (3.10)$$

де:  $Z$  - повний опір кола (імпеданс);  $R$  - активний опір (резистанс);  $X = X_L - X_C$  - реактивний опір (реактанс).

З формули (3.10) виходить, що опори  $R, X, Z$  зв'язані між собою як сторони прямокутного трикутника (рис. 3.15).

Часткові випадки:

- 1)  $X_L > X_C$  - напруга, випереджає струм на кут  $\varphi$ ;
- 2)  $X_L < X_C$  - напруга, відстає від струму на кут  $\varphi$ ;
- 3)  $X_L = X_C$  - напруга, співпадає по фазі зі струмом і кут  $\varphi = 0$  (цей випадок має назву резонансу напруг).

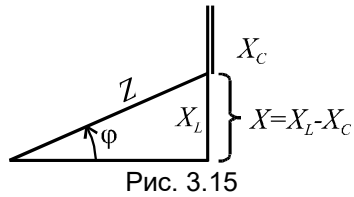


Рис. 3.15

#### Зауваження

1. Якщо у колі декілька резисторів, конденсаторів та індуктивностей, то у формулу для  $Z$  підставляються значення:

$$R = \sum R_k, \quad X_L = \sum X_{L_k}, \quad X_C = \sum X_{C_k}.$$

2. У послідовному колі  $RLC$  напруга на окремих елементах може значно перевищувати напругу джерела, чого немає у колі постійного струму.

Наприклад, якщо для схеми рис.3.13 задані напруга  $U = 10\text{В}$

та опори  $R = 3 \text{ Ом}$ ;  $X_L = 104 \text{ Ом}$ ;  $X_C = 100 \text{ Ом}$ , то струм  $I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{10}{\sqrt{3^2 + (104 - 100)^2}} = 2 \text{ А}$ , а напруга на ємності  $U_C = I \cdot X_C = 2 \cdot 100 = 200 \text{ В}$ .

### 3.7. АНАЛІЗ ЛІНІЙНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА СИНУСОЇДАЛЬНОГО СТРУМУ В ЗАГАЛЬНОМУ ВИПАДКУ

При синусоїдальних струмах у колі, яке містить елементи  $R, L, C$ , контурні рівняння Кірхгофа будуть інтегро - диференціальними. Розглянемо схему рис. 3.16.

Система рівнянь для цього кола:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0; \\ i_1 R_1 + i_2 R_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt = e_1; \\ i_3 R_3 + L_3 \frac{di_3}{dt} + i_2 R_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt = e_2. \end{cases}$$

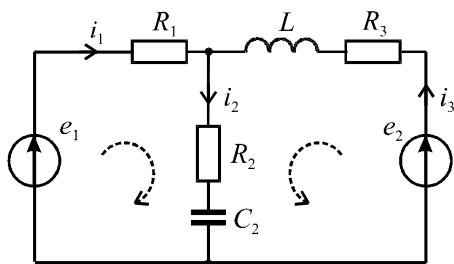


Рис. 3.16

Для отримання розв'язку відносно будь-якого струму треба із цієї системи спочатку отримати диференціальне рівняння для цього струму та розв'язати його. При цьому для синусоїдальних ЕРС струми також будуть синусоїдальними

$i_k = I_{km} \sin(\omega t + \psi_k)$ , тобто тієї ж частоти, що і ЕРС (при  $t = \infty$ ).

Отже завдання зводиться до знаходження  $I_{km}$  та  $\psi_k$ .

У загальному випадку складного електричного кола такий спосіб знаходження струмів в усталеному режимі є дуже громіздким.

### 3.8. СИМВОЛІЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ СИНУСОЇДАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ, ЇХ ІНТЕГРАЛІВ І ПОХІДНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Суть символічного (комплексного) методу аналізу полягає в тому, що розв'язок з області дійсної змінної  $t$  переноситься в область комплексної змінної  $j\omega$ . При цьому інтегро - диференційні рівняння перетворюються в алгебраїчні. Далі знаходиться розв'язок цих рівнянь відносно змінної  $j\omega$  (тобто знаходяться  $I_k(j\omega)$ ), а потім переходимо в область дійсної змінної  $t$  (знаходимо  $i_k(t)$ ).

#### Відомості з математики

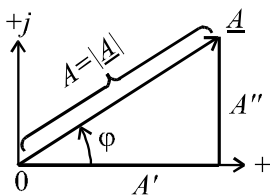


Рис. 3.17

Вектор  $\underline{A}$  на комплексній площині (рис. 3.17) можна описати у показниковій (полярній) формі

$$\underline{A} = Ae^{j\psi} = A\angle\psi, \quad (3.11)$$

де:  $A$  - модуль;  $\psi$  - аргумент;  $j = \sqrt{-1}$ .

Згідно формули Ейлера

$$\begin{aligned} e^{j\psi} &= \cos\psi + j\sin\psi; \\ (e^{-j\psi} &= \cos\psi - j\sin\psi). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Тоді в алгебраїчній формі вектор

$$\underline{A} = A\cos\psi + jA\sin\psi = A' + jA''. \quad (3.13)$$

Перехід від алгебраїчної (3.13) до показникової (3.11) форми здійснюється за допомогою формул:

$$A = \sqrt{(A')^2 + (A'')^2}; \quad (3.14)$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{A''}{A'} \quad \text{якщо } A' > 0,$$

та 
$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{A''}{A'} \pm 180^\circ \quad \text{якщо } A' < 0. \quad (3.15)$$

#### Примітки

1. Множенню вектора на  $e^{j\psi}$  відповідає поворот вектора на кут  $\psi$ .

2. Множенню вектора на  $j$  відповідає поворот вектора на кут

$$\frac{\pi}{2}.$$

3. При діях з комплексними числами часто використовують наступні тотожності:  $e^{\pm j90^\circ} = \pm j$ ;  $e^{\pm j180^\circ} = -1$ ;  $e^{\pm j2\pi} = 1$ .

4. Додавання комплексних чисел здійснюють у алгебраїчній формі, а множення (ділення) – у показниковій формі.

5. Прийоми позбавлення від ірраціональності у знаменнику:

$$\frac{1}{a + jb} = \frac{1 \cdot (a - jb)}{(a + jb) \cdot (a - jb)} = \frac{a - jb}{a^2 + b^2}$$

або

$$\frac{1}{a + jb} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2} e^{j\varphi}} = \frac{1 \cdot e^{-j\varphi}}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

де  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ ;

$$\frac{1}{j} = \frac{1}{j} \cdot \frac{j}{j} = \frac{j}{j^2} = \frac{j}{-1} = -j.$$

Розглянемо обертовий вектор  $\underline{u} = U_m e^{j(\omega t + \psi)}$  (рис. 3.18).

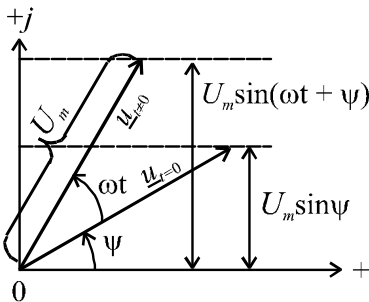


Рис. 3.18

Згідно формули Ейлера

$$\underline{u} = U_m e^{j(\omega t + \psi)} = U_m \cos(\omega t + \psi) + jU_m \sin(\omega t + \psi),$$

а це значить, що проекція обертового вектора на вісь  $j$  відповідає миттєвому значенню синусоїдальної напруги  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ , тобто ця функція є уявною частиною комплексної функції часу  $\underline{u}$

$$u = \operatorname{Im}(\underline{u}) = \operatorname{Im}(U_m e^{j(\omega t + \psi)}) = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

Позначення  $\operatorname{Im}$  походить від французького *Imaginer* (уявний). Таке зображення функції часу називається символічним.

Таким чином:

$$u = \text{Im}(U_m e^{j(\omega t + \psi)}) = \text{Im}(U_m e^{j\psi} \cdot e^{j\omega t}) = \text{Im}(\underline{U}_m e^{j\omega t}),$$

$$\text{де: } \underline{U}_m = U_m e^{j\psi} \text{ – комплексна амплітуда; } \quad (3.16)$$

$$\underline{U} = U e^{j\psi} \text{ – комплексне діюче значення. } \quad (3.17)$$

Якщо, наприклад, напруга описується виразом  $u = 282 \sin(\omega t + \pi/4)$  В, то:

$$U_m = 282 \text{ В}; \quad \underline{U}_m = 282 e^{j\pi/4} \text{ В}; \quad U = \frac{282}{\sqrt{2}} = 200 \text{ В}; \quad \underline{U} = 200 e^{j\pi/4} \text{ В}.$$

Розглянемо зображення похідної та інтегралу функції часу:

Якщо  $u \div \text{Im}(\underline{U}_m e^{j\omega t})$ , то:

$$\frac{du}{dt} \div \frac{d}{dt} \text{Im}(\underline{U}_m e^{j\omega t}) = j\omega \cdot \text{Im}(\underline{U}_m e^{j\omega t});$$

$$\int u dt \div \int \text{Im}(\underline{U}_m e^{j\omega t}) dt = \frac{1}{j\omega} \text{Im}(\underline{U}_m e^{j\omega t}).$$

Тобто диференціюванню оригіналу відповідає множення його зображення на  $j\omega$ , а інтегруванню – ділення на  $j\omega$ .

Враховуючи те, що усі струми і напруги в рівняннях Кірхгофа містять множник  $e^{j\omega t}$ , його можливо виключити з зображень, а також, при переході до діючих значень струмів і напруг, відповідність оригіналів та зображень приймає вид:

$$\left. \begin{aligned} u &= U_m \sin(\omega t + \psi) \div \underline{U} = U e^{j\psi}; \\ \frac{du}{dt} &\div j\omega \cdot \underline{U}; \\ \int u \cdot dt &\div \frac{1}{j\omega} \underline{U}. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

### 3.9. КОМПЛЕКСНІ ЗАСТУПНІ СХЕМИ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ. ЗАКОНИ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ У КОМПЛЕКСНІЙ ФОРМІ

#### Активний опір $R$ .

Нехай в схемі рис. 3.5 струму  $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$  відповідає зображення  $\underline{I}$ . Тоді напрузі  $u_R$  буде відповідати зображення  $\underline{U}_R$

$$u_R = Ri = RI_m \sin(\omega t + \psi) \div \underline{U}_R = R \cdot \underline{I}.$$

Тобто закон Ома для комплексних діючих значень струму та напруги має такий же вигляд, як і для їх миттєвих значень, отже схемі кола для миттєвих значень (рис. 3.5) відповідає комплексна заступна схема (рис. 3.19).

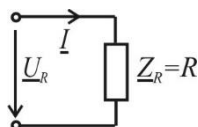


Рис. 3.19

#### Індуктивність $L$

Покажемо перехід від схеми кола для миттєвих значень (рис. 3.8) до комплексної заступної схеми (рис. 3.20).

Використавши формулу зв'язку між миттєвими значеннями струму та напруги  $u_L = L \frac{di}{dt}$ , а також зображення синусоїдального струму  $i \div \underline{I}$  та його похідної  $\frac{di}{dt} \div j\omega \underline{I}$ , отримаємо в комплексній формі

$$\underline{U}_L = j\omega L \underline{I} = jX_L \underline{I} = \underline{Z}_L \underline{I}.$$

Отже індуктивність на комплексній заступній схемі можна зобразити комплексним опором  $jX_L$  (рис. 3.20, а) або комплексним опором  $\underline{Z}_L$  (рис. 3.20, б) у вигляді прямокутника.

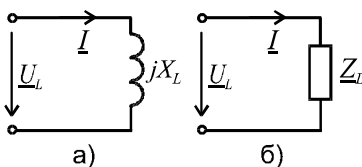


Рис. 3.20

#### Ємність $C$ .

Перейдемо від схеми кола (рис. 3. 11) для миттєвих значень струму та напруги, які зв'язані формулою  $u_c = \frac{1}{C} \int idt$ , до комплекс-

ної заступної схеми (рис. 3. 21). Враховуючи зображення синусоїдального струму  $i \div \underline{I}$  та його інтегралу  $\int idt \div \frac{1}{j\omega} \underline{I}$ , отримуємо зображення напруги на ємності

$$\underline{U}_C = -j \frac{1}{\omega C} \underline{I} = -j X_C \underline{I} = \underline{Z}_C \cdot \underline{I},$$

де  $\underline{Z}_C = -j X_C$ .

Отже ємність на комплексній заступній схемі можна зобразити комплексним опором  $-j X_C$  (рис. 3.21, а) або комплексним опором  $\underline{Z}_C$  (рис. 3.21, б) у вигляді прямокутника.

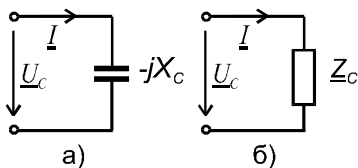


Рис. 3.21

### Закони кіл в комплексній формі

Розглянемо послідовний контур (рис. 3.13) і запишемо рівняння напруг:

$$u = u_R + u_L + u_C = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt$$

або у комплексній формі:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = R \underline{I} + j X_L \underline{I} - j X_C \underline{I} = \underline{Z} \underline{I}, \quad (3.19)$$

де:

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = R + jX = Z \cdot e^{j\varphi}; \quad (3.20)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2};$$

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R}.$$

Тут:  $\underline{Z}$  - повний комплексний опір кола;  $Z$  - його модуль;  $\varphi$  - аргумент.

Якщо  $X_L > X_C$ , то  $\varphi > 0$  – опір кола має активно-індуктивний характер.

Величину обернену повному комплексному опорю кола



$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} = G - jB \quad (3.21)$$

називають повною комплексною провідністю (адмітансом),

де:  $G = \frac{R}{R^2 + X^2}$  – активна провідність;

$B = \frac{X}{R^2 + X^2}$  – реактивна провідність.

Таким чином закон Ома у комплексній формі має такий же вигляд, що і для кола постійного струму, тільки з іншими позначеннями:

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \quad \text{та} \quad \underline{U}_k = \underline{Z}_k \cdot \underline{I}_k \quad (\text{для ділянки кола}).$$

Аналогічно закони Кірхгофа в комплексній формі будуть мати вид:

$$\sum i_k = 0 \rightarrow \sum \underline{I}_k = 0;$$

$$\sum u_k = \sum e_k \rightarrow \sum \underline{U}_k = \sum \underline{E}_k \quad \text{або} \quad \sum \underline{I}_k \underline{Z}_k = \sum \underline{E}_k.$$

### 3.10. АНАЛІЗ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ СИМВОЛІЧНИМ МЕТОДОМ

#### Методика аналізу

1. Переходимо до комплексної заступної схеми кола.
2. Складаємо рівняння електричної рівноваги кола у символічній формі (закон Ома, закони Кірхгофа або інші методи на них засновані). Це будуть алгебраїчні рівняння. Методика їх складання така ж, як і для кола постійного струму з врахуванням замін:

$$E_k \rightarrow \underline{E}_k; \quad I_k \rightarrow \underline{I}_k; \quad R_k \rightarrow \underline{Z}_k.$$

3. Розв'язуємо ці рівняння відносно комплексних струмів (напруг). Пам'ятаємо, що ми знаходимо розв'язок відносно нової змінної -  $j\omega$ , тобто знаходимо зображення струму, а не оригінал. Але це зображення містить в собі діюче значення оригіналу і його початкову фазу.

4. Здійснюємо перехід від зображення до оригіналу (при необхідності).

## Приклади розв'язування задач

Приклад 3.1. Для схеми рис. 3.22 відомі напруга та опори елементів. Визначити комплекси діючих значень струмів віток, записати миттєве значення струму джерела, побудувати векторну діаграму.

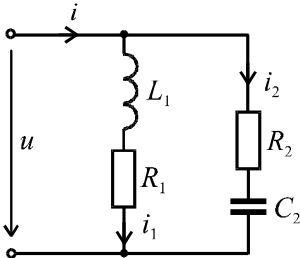


Рис. 3.22

$$u = 14,1 \sin \omega t \text{ В}; \quad R_1 = 6 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 8 \text{ Ом}; \quad X_{L_1} = 8 \text{ Ом};$$

$$X_{C_2} = 6 \text{ Ом}.$$

### Розв'язок

1. Рисуємо комплексну заступну схему (рис. 3.23).

Величини напруги та опорів комплексної заступної схеми:

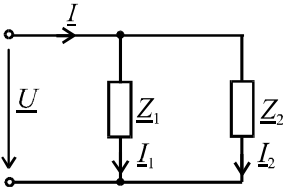


Рис. 3.23

$$\underline{U} = \frac{14,1}{\sqrt{2}} = 10 \text{ В};$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{L_1} = 6 + j8 = 10e^{j53^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{C_2} = 8 - j6 = 10e^{-j37^\circ} \text{ Ом}.$$

2. Визначаємо струми віток:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} = \frac{10}{10e^{j53^\circ}} = 1e^{-j53^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = \frac{10}{10e^{-j37^\circ}} = 1e^{j37^\circ} \text{ А};$$

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 1e^{-j53^\circ} + 1e^{j37^\circ} = 1\cos 53^\circ - j1\sin 53^\circ + \\ &+ 1\cos 37^\circ + j1\sin 37^\circ = 0,6 - j0,8 + 0,8 - j0,6 = \\ &= 1,4 - 0,2j = 1,41e^{-j7^\circ} \text{ А}. \end{aligned}$$

3. Миттєве значення струму джерела:

$$i = 1,41\sqrt{2}\sin(\omega t - 7^\circ) = 2\sin(\omega t - 7^\circ) \text{ А}$$

*Примітка.* Якщо  $\omega$  підставляти в радіанах на секунду, то

такий запис буде некоректним.

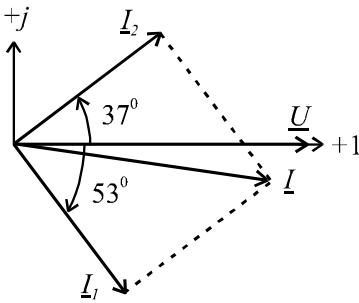


Рис. 3.24

Для побудови хвильової діаграми необхідно початкову фазу перевести в радіани або значення  $\omega t$  підставляти в градусах.

Діючі значення струмів:  $I_1 = 1 \text{ A}$ ;  
 $I_2 = 1 \text{ A}$ ;  $I = 1,41 \text{ A}$ .

Векторна діаграма приведена на рис. 3.24, для якої використовуються масштаби:  $m_U = 2,5 \text{ В/см}$ ;  
 $m_I = 0,4 \text{ А/см}$ .

**Приклад 3.2.** Для схеми рис. 3.25 відомі напруга та опори елементів. Розрахувати комплексні діючі значення струмів, напругу на ємності  $C_1$ .

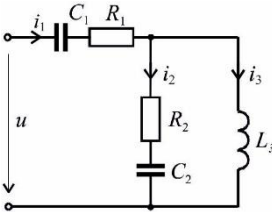


Рис. 3.25

$U = 20 \text{ В}$ ;  $R_1 = 2 \text{ Ом}$ ;

$X_{C_1} = 26 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ;

$X_{C_2} = X_{L_3} = 10 \text{ Ом}$ .

**Розв'язок**

1. Рисуємо комплексну заступну схему (рис. 3.26).

Величини напруги та опорів комплексної заступної схеми:

$$\underline{U} = 20 \text{ В};$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 - jX_{C_1} = 2 - j26 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 - jX_{C_2} = 10 - j10 = 10\sqrt{2}e^{-j45^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = jX_{L_3} = j10 = 10e^{j90^\circ} \text{ Ом}.$$

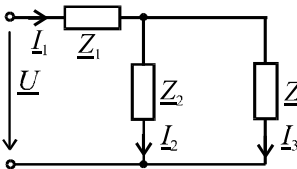


Рис. 3.26

2. Вхідний опір кола та струм джерела:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{BX} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = 2 - j26 + \frac{(10 - j10)(j10)}{10 - j10 + j10} = \\ &= 2 - j26 + 10 + j10 = 12 - j16 = 20e^{-j53^0} \text{ Ом}; \\ \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{BX}} = \frac{20}{20e^{-j53^0}} = 1e^{j53^0} \text{ А.} \end{aligned}$$

3. Напряга на ділянці  $ab$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{23} &= \underline{U}_{ab} = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_{23} = 1e^{j53^0} \cdot (10 + j10) = \\ &= 1 \cdot e^{j53^0} \cdot 14e^{j45^0} = 14e^{j98^0} \text{ В.} \end{aligned}$$

4. Струми паралельних віток:

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_2} = \frac{14e^{j98^0}}{14e^{-j45^0}} = 1e^{j43^0} \text{ А}; \\ \underline{I}_3 &= \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_3} = \frac{14e^{j98^0}}{10e^{j90^0}} = 1,4e^{j8^0} \text{ А.} \end{aligned}$$

5. Напряга на ємності  $C_1$  :

$$\underline{U}_{C_1} = \underline{I}_1(-jX_{C_1}) = 1e^{j53^0} \cdot 26e^{-j90^0} = 26e^{-j37^0} \text{ В.}$$

Із розрахунків видно, що  $U_{C_1} > U$ . Це можливо, якщо у колі є елементи  $L$  та  $C$ .

Приклад 3.3. Для схеми (рис. 3.27) задано:

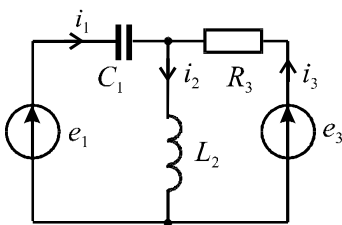


Рис. 3.27

$$e_1 = 14,1\sin(\omega t - 45^0) \text{ В};$$

$$e_3 = 14,1\sin(\omega t + 45^0) \text{ В};$$

$$R_3 = X_{L_2} = X_{C_1} = 10 \text{ Ом.}$$

Розрахувати комплексні значення струмів віток, діючи значення струмів, записати вирази для миттєвих значень струмів.

### Розв'язок

1. Схемі рис. 3.27 буде відповідати комплексна заступна схема рис. 3.28.

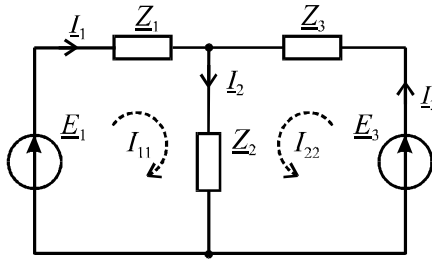


Рис. 3.28

Величини ЕРС та опорів комплексної заступної схеми:

$$\underline{E}_1 = \frac{14,1}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ} = 10e^{-j45^\circ} \text{ В}; \quad \underline{E}_3 = \frac{14,1}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} = 10e^{j45^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{Z}_1 = -jX_{C_1} = -j10 = 10e^{-j90^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = jX_{L_2} = j10 = 10e^{j90^\circ} \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_3 = R_3 = 10 \text{ Ом}.$$

2. Задачу розв'яжемо методом контурних струмів:

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_{11}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) + \underline{I}_{22}\underline{Z}_2 &= \underline{E}_1; \\ \underline{I}_{11}\underline{Z}_2 + \underline{I}_{22}(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) &= \underline{E}_3. \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{I}_{11}(-j10 + j10) + j10\underline{I}_{22} = 10e^{-j45^\circ}; \\ j10\underline{I}_{11} + (10 + j10)\underline{I}_{22} = 10e^{j45^\circ}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 + j10\underline{I}_{22} = 10e^{-j45^\circ}; \\ j10\underline{I}_{11} + 10\sqrt{2}e^{j45^\circ}\underline{I}_{22} = 10e^{j45^\circ}. \end{cases}$$

$$\text{З першого рівняння } \underline{I}_{22} = \frac{10e^{-j45^\circ}}{j10} = 1e^{-j135^\circ} \text{ А.}$$

З другого рівняння визначаємо  $\underline{I}_{11}$

$$j10\underline{I}_{11} + 14e^{j45^0} \cdot 1 \cdot e^{-j135^0} = 10e^{j45^0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{I}_{11} = \frac{10e^{j45^0} - 14e^{-j90^0}}{j10} = \frac{7 + j7 + j14}{j10} = \frac{7 + j21}{j10}$$

$$= \frac{22e^{j71^0}}{10e^{j90^0}} = 2,2e^{-j19^0} \text{ A.}$$

3. Комплексні діючі значення струмів:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{11} + \underline{I}_{22} = 2,2e^{-j19^0} + 1e^{-j135^0} =$$

$$= 2,1 - j0,7 - 0,7 - j0,7 = 1,4 - j1,4 = 2e^{-j45^0} \text{ A;}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11} = 2,2e^{-j19^0} \text{ A;}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{22} = 1e^{-j135^0} \text{ A.}$$

4. Діючі значення струмів:

$$I_1 = 2,2 \text{ A; } I_2 = 2 \text{ A; } I_3 = 1 \text{ A.}$$

5. Миттєві значення струмів:

$$i_1 = 2,2\sqrt{2}\sin(\omega t - 19^0) \text{ A;}$$

$$i_3 = 1\sqrt{2}\sin(\omega t - 135^0) \text{ A;}$$

$$i_2 = 2\sqrt{2}\sin(\omega t - 45^0) \text{ A;}$$

### 3.11. ПОТУЖНОСТІ КОЛА СИНУСОЇДАЛЬНОГО СТРУМУ

Нехай на вході пасивного двополюсника відомі напруга та струм:

$$u = U_m \sin \omega t; \quad i = I_m \sin(\omega t - \varphi).$$

Миттєва потужність

$$p = ui = U_m I_m \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi) =$$

$$= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi).$$

Середня потужність

$$P = \frac{1}{T} \cdot S = \int_0^T p dt = UI \cos \varphi. \quad (3.24)$$

Якщо еквівалентний двополюсник зобразити двоелементною схемою з активно-реактивним опором, то  $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$ .

$$\text{Тоді } P = UI \cos \varphi = UI \frac{R}{Z} = I^2 R.$$

*Тобто, середня потужність – це активна потужність кола.*

*УВАГА: Порівняно з колом постійного струму добуток  $UI$  на  $I$  не дорівнює активній потужності, тут слід врахувати  $\cos \varphi$ . Тому добуток  $UI$  назвали повною потужністю*

$$S = UI. \quad (3.25)$$

Це умовна потужність, бо вона не характеризує здійснювану роботу. Одиницею виміру потужності  $S$  є вольт-ампер (ВА). Відношення активної до повної потужностей

$$\frac{P}{S} = \frac{UI \cos \varphi}{UI} = \cos \varphi \quad (3.26)$$

називається коефіцієнтом потужності.

На практиці електротехнічні пристрої проектують таким чином, щоб отримати  $\cos \rightarrow 1$ .

По аналогії з (3.24) реактивну потужність (також умовну потужність) визначаємо

$$Q = UI \sin \varphi, \quad (3.27)$$

або через параметри двополюсника

$$Q = UI \sin \varphi = UI \frac{X}{Z} = I^2 X = I(X_L - X_C) = Q_L - Q_C. \quad (3.28)$$

*Тобто реактивні потужності додають алгебраїчно.*

Нагадаємо, що одиницею вимірювання реактивної потужності є вольт-ампери реактивні – ВАр.

З порівняння (3.24), (3.25) та (3.27) видно, що потужності  $P$ ,  $Q$ ,  $S$  зв'язані між собою як сторони прямокутного трикутника (рис. 3.29):

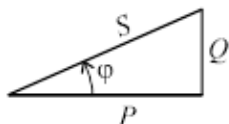


Рис. 3.29

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (3.29)$$

Покажемо, що потужності можна отримати і через комплексні струми та напруги. Аргумент їх добутку, тобто зсув фаз  $\varphi = \psi_u - \psi_i$ , ми отримуємо при множенні комплексу напруги  $\underline{U}$  на спряжений комплекс струму  $\underline{I}^*$ , де  $\underline{I} = Ie^{-j\psi_i}$ , якщо  $\underline{I} = Ie^{j\psi_i}$ .

Повна комплексна потужність

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \underline{I}^* = Ue^{j\psi_u} \cdot Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = UIe^{j\varphi} = \\ &= UI \cos\varphi + jUI \sin\varphi = P + jQ. \end{aligned} \quad (3.30)$$

*Примітка 1.* Можна зустріти такі позначення потужностей:  $P$  - повна ( $S$ );  $P_a$  - активна ( $P$ );  $P_p$  - реактивна ( $Q$ ).

*Примітка 2.* Рівняння балансу потужностей для кола з одним джерелом можна записати у вигляді:

$$UI \cos\varphi + jUI \sin\varphi = \sum_{k=1}^n I_k^2 R_k + j \sum_{k=1}^n I_k^2 X_k \quad (3.31)$$

або:

$$\text{для активної потужності } UI \cos\varphi = \sum_{k=1}^n I_k^2 R_k;$$

$$\text{для реактивної потужності } UI \sin\varphi = \sum_{k=1}^n I_k^2 X_k.$$

В останньому виразі  $X_k$  враховується зі знаком "+", якщо це індуктивний опір, та зі знаком "-", якщо ємнісний.

Для складного кола з декількома джерелами рівняння балансу потужностей має вид

$$\sum_{k=1}^n \underline{E}_k \underline{I}_k^* = \sum_{k=1}^n I_k^2 R_k + j \sum_{k=1}^n I_k^2 X_k. \quad (3.32)$$



Приклад 3.4. Перевірити виконання балансу потужностей для схеми рис. 3.25.

#### Розв'язок

1. Повна комплексна потужність джерела

$$\underline{S}_{ДЖ} = \underline{U} \underline{I}_1^* = 20 \cdot 1e^{-j53^\circ} = 20\cos 53^\circ - j20\sin 53^\circ = 12 - j16 \text{ ВА}$$

Отже активна та реактивна потужність джерела мають значення:

$$P_{ДЖ} = 12 \text{ Вт}; \quad Q_{ДЖ} = -16 \text{ ВАр}.$$

2. Активна та реактивна потужності приймачів:

$$P_{ПР} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R^2 = 1^2 \cdot 2 + 1^2 \cdot 10 = 12 \text{ Вт};$$

$$Q_{ПР} = I_1^2 (-X_{C_1}) + I_2^2 (-X_{C_2}) + I_3^2 \cdot X_{L_3} = \\ = 1^2 (-26) + 1^2 (-10) + 1,4^2 \cdot 10 = -16 \text{ ВАр}.$$

3. Порівняння даних П.1 та П.2 свідчить, що баланс потужностей виконується:

$$P_{ДЖ} = P_{ПР};$$

$$Q_{ДЖ} = Q_{ПР}.$$

### КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 3

1. Характеристики синусоїдального струму.
2. Діюче значення синусоїдального струму
3. Закон Ома для діючих значень струму та напруги на R, L, C.
4. Формули індуктивного та ємнісного опорів.
5. Фазові співвідношення між струмами та напругами на R, L, C.
6. Векторні діаграми.
7. Закон Ома для кола з послідовним з'єднанням R, L, C.
8. Потужності кола синусоїдального струму P, Q, S.
9. Комплексні зображення синусоїдальних струмів та напруг, їх похідних та інтегралів.
10. Комплексні схеми заміщення.
11. Методика розрахунку кіл синусоїдального струму символьним методом.

# IV РОЗДІЛ

## РЕЗОНАНС В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ, ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КІЛ

### 4.1. ПОСЛІДОВНИЙ КОЛИВАЛЬНИЙ КОНТУР. РЕЗОНАНС НАПРУГ

Явище, коли струм  $i$  напруга в колі, незважаючи на наявність у ньому реактивних елементів, збігаються у фазі ( $\varphi = 0$ ), називають резонансом. Це так званий фазовий резонанс, а іноді розглядають амплітудний резонанс, умові налаштування на який відповідає найбільша амплітуда коливань. Таким чином, при фазовому резонансі вхідний опір або провідність кола мають чисто резистивний характер.

Частоти, на яких спостерігається це явище, називаються резонансними. Дослідження резонансних явищ – це визначення резонансної частоти (частот)  $\omega_p$ , залежностей від частоти струмів, напруг, опорів, а також визначення параметрів  $L$  та  $C$ , які задовольняють умові резонансу.

У колі з послідовним з'єднанням елементів  $R, L, C$  (рис. 4.1) може спостерігатись резонанс напруг.

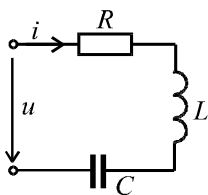


Рис. 4.1

Повний комплексний опір кола

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = R + jX.$$

Зсув фаз  $\varphi = 0$ , якщо  $X = 0$ . Таким чином, умова резонансу:

$$X_L = X_C; \quad (4.1)$$

$$\underline{Z} = R. \quad (4.2)$$

З умови (4.1) резонансна частота

$$\omega_p L = \frac{1}{\omega_p C} \Rightarrow \omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0, \quad (4.3)$$

тобто при резонансі частота джерела  $\omega_p$  дорівнює частоті власних коливань контуру  $\omega_0$ .

Опір реактивного елементу ( $L$  або  $C$ ) на резонансній частоті називається характеристичним опором контуру

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho. \quad (4.4)$$

Згідно з рівнянням  $\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C$  на рис. 4.2. побудована векторна діаграма при резонансі.

Відношення напруги на реактивному елементі до напруги джерела при резонансі називають добротністю контуру.

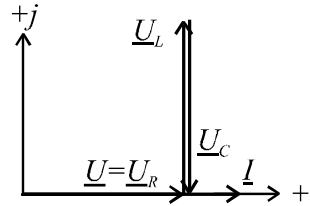


Рис. 4.2

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\rho I}{RI} = \frac{\rho}{R}. \quad (4.5)$$

В якісних контурах добротність досягає 100..200 одиниць.

У резонансному режимі обміну енергією між джерелом та контуром немає ( $Q_L - Q_C = 0$ ). Обмін енергією здійснюється тільки між ємністю та індуктивністю. Повна потужність кола дорівнює активній потужності

$$S = P = I^2 R. \quad (4.6)$$

Залежність опорів  $X(\omega)$ ,  $Z(\omega)$ , (рис. 4.3) та аргументу  $\varphi(\omega)$  (рис. 4.4) від частоти називають частотними характеристиками кола.

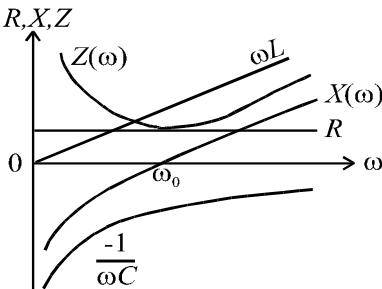


Рис. 4.3

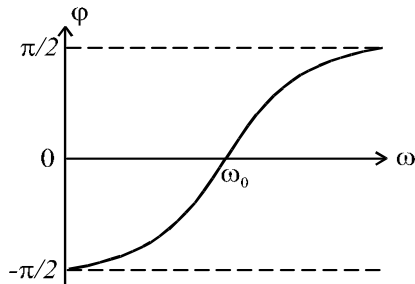


Рис. 4.4

Опори  $X(\omega)$ ,  $Z(\omega)$  та аргумент  $\varphi(\omega)$  визначаються за формулами:

$$X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C}; \quad Z(\omega) = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Крім частотних характеристик будують резонансні криві  $I(\omega)$ ,  $U_L(\omega)$ ,  $U_C(\omega)$  (рис. 4.5).

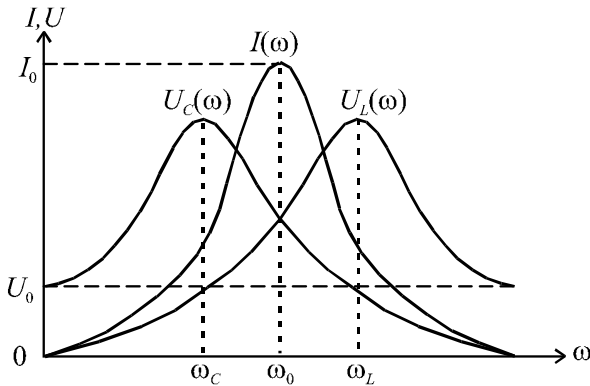


Рис. 4.5

Для їх побудови використовуються формули:

$$I(\omega) = \frac{U}{Z(\omega)} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}};$$

$$U_L(\omega) = I(\omega) \cdot \omega L;$$

$$U_C(\omega) = I(\omega) \cdot \frac{1}{\omega C}.$$

Частоти  $\omega_L$  та  $\omega_C$ , які відповідають максимумам кривих  $U_L(\omega)$  та  $U_C(\omega)$ , визначаються з рівнянь:

$$\frac{dU_L}{d\omega} = 0; \quad \frac{dU_C}{d\omega} = 0.$$

Розглянемо більш детально залежність  $I(\omega)$ .

Якщо перетворити  $I(\omega)$  до вигляду:

$$I = \frac{U}{R \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad (4.7)$$

і побудувати  $I(\omega)$  для різних  $Q$ , то побачимо, що при збільшенні добротності крива  $I(\omega)$  стає гострішою (рис. 4.6).

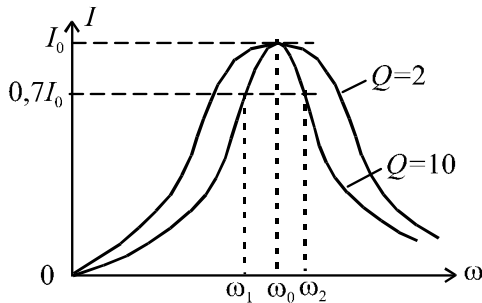


Рис. 4.6

Діапазон частот  $\omega_1 \dots \omega_2$ , де  $\frac{I}{I_0} > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , називають смугою

пропускання контуру. В смузі пропускання опір контуру малий. Отже, чим більша добротність, тим вужча смуга пропускання і кращі вибіркові властивості контуру.

Смуга пропускання пропорційна резонансній частоті і обернено пропорційна добротності

$$\Pi_{\omega_{0.7}} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} = \omega_0 d, \quad (4.8)$$

де:  $\frac{1}{Q} = d$  – затухання контуру. (4.9)

При заданій частоті резонанс можна забезпечити, наприклад, зміною ємності. На рис. 4.7. наведена резонансна крива  $I(C)$  при  $U = const$  та  $f = const$ .

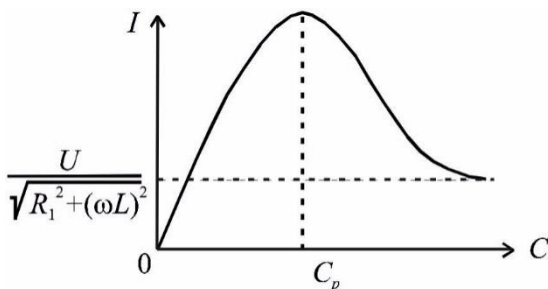


Рис. 4.7

Частотні характеристики  $Z(\omega)$ ,  $\varphi(\omega)$  або  $Y(\omega)$ ,  $\Psi(\omega)$  містять декілька параметрів ( $R, Q, \omega_0, \dots$ ) і не зручні для використання. Тому в радіотехніці застосовують нормовані вхідні характеристики, де в якості аргументу використовують узагальнене розстроювання

$$\xi = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right).$$

Також використовується абсолютне розстроювання

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0,$$

відносне розстроювання  $\delta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$  та нормовану частоту

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Наприклад

$$\bar{Y} = \frac{Y(\omega)}{Y(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \bar{Y}(\xi). \quad (4.10)$$

На рис.4.8 наведена залежність нормованої провідності  $\bar{Y}$  від  $\xi$ .

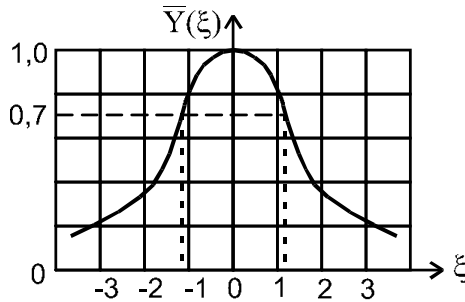


Рис. 4.8.

Розглянемо вплив на добротність опору навантаження та внутрішнього опору джерела, які показані на рис. 4.9.

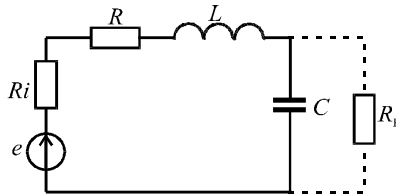


Рис. 4.9.

Опір  $Ri$  увімкнуто послідовно з опором  $R$  котушки, тому еквівалентна добротність зменшується.

$$Q_{EK} = \frac{\rho}{R + Ri} \quad (4.11)$$

Якщо перетворити паралельне з'єднання  $R_H$  та  $C$  в еквівалентну послідовну схему, то при  $\omega R_H C \gg 1$  вносимий послідовний

опір  $R'_H = \frac{\rho^2}{R_H}$ , а еквівалентна добротність

$$Q_{EK} = \frac{\rho}{R + R'_H} = \frac{\rho}{R + \frac{\rho^2}{R_H}} = \frac{Q}{1 + Q \frac{\rho}{R_H}} \quad (4.12)$$

*Примітка.* Вибіркові властивості контуру оцінюють в разях

або децибелах.

Нехай вихідним сигналом є напруга на конденсаторі. Тоді вибіркковість представляє відношення напруги на конденсаторі при резонансній частоті  $U_{C_0}$  до напруги  $U_C$  при заданому розстроюванні  $\xi$  :

$$U_C = \frac{U_{C_0}}{\sqrt{1+\xi^2}}. \quad A = \frac{U_{C_0}}{U_C} = \sqrt{1+\xi^2}.$$

В децибелах  $B = 20\lg A = 20\lg \sqrt{1+\xi^2}$ .

На граничній частоті смуги пропускання

$$B = 20\lg \sqrt{1+1} = 3 \text{ дБ.}$$

Тобто смуга пропускання – це діапазон частот, де ослаблення сигналу не перевищує 3 дБ. На практиці не говорять: "підсилювач з коефіцієнтом підсилювання 1000", а "підсилювач з коефіцієнтом підсилювання  $B = 20\lg 1000 = 60$  дБ."

#### Приклад 4.1

В послідовному колі  $R = 100 \text{ Ом}$ ,  $L = 100 \text{ мкГн}$ ,  $C = 100 \text{ нФ}$ . Яку вибіркковість забезпечить контур при розстроюванні  $\Delta f = 50 \text{ кГц}$ ?

*Розв'язок*

1. Резонансна частота

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2 \cdot 3.14 \sqrt{100 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^{-12}}} = 1,59 \cdot 10^6 \text{ Гц.}$$

2. Добротність контуру

$$Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{\sqrt{100 \cdot 10^{-6} / 100 \cdot 10^{-12}}}{10} = 100.$$

3. Узагальнене розстроювання  $\xi = Q \frac{2\Delta f}{f_0} = 100 \frac{2 \cdot 50}{1590} = 6,28$ .



Тут враховано, що при малих розстроюваннях

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} = \frac{2\Delta f}{f_0}.$$

4. Вибірковість:

В разях  $A = \sqrt{1 + \xi^2} = \sqrt{1 + 6,28^2} = 6,3.$

в децибелах  $B = 20 \lg A = 20 \lg 6,3 = 16 \text{ дБ}.$

Тобто сигнал зменшиться в 6,3 рази або на 16 дБ.

#### *Приклад 4.2*

Для схеми (рис. 4.1) задано параметри контуру:  $R = 1 \text{ Ом};$   
 $L = 10 \text{ мГн}; C = 1 \text{ мкФ}.$  Визначити резонансну частоту, характеристи-  
стичний опір, добротність та смугу пропускання контуру.

*Розв'язок*

1. Резонансна частота

$$\omega_p = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-2} \cdot 10^{-6}}} = 10^4 \text{ с}^{-1}.$$

2. Характеристичний опір

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{10^{-2}}{10^{-6}}} = 100 \text{ Ом}.$$

3. Добротність

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{100}{1} = 100.$$

4. Смуга пропускання

$$\Pi_{\omega_{0,7}} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{10^4}{100} = 100 \text{ с}^{-1}.$$

#### 4.2. ПАРАЛЕЛЬНИЙ КОЛИВАЛЬНИЙ КОНТУР. РЕЗОНАНС СТРУМІВ

На рис. 4.10. представлено паралельний коливальний контур основного виду, в якому може спостерігатись резонанс струмів.

За умовою резонансу реактивна складова вхідного опору або провідності дорівнює нулю.

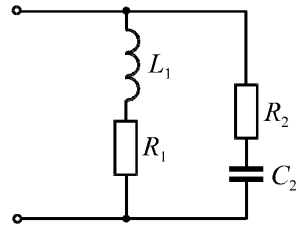


Рис. 4.10

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R_1 + jX_L} + \frac{1}{R_2 - jX_C} = \\ &= \left( \frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + X_C^2} \right) - j \left( \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} - \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2} \right) = G - jB, \quad (4.13) \end{aligned}$$

де:  $G = G_1 + G_2$  – активна провідність кола;

$B = B_L - B_C$  – реактивна провідність кола.

$$\text{Отже,} \quad B = 0 \quad \text{чи} \quad B_L - B_C = 0 \quad (4.14)$$

і є умова резонансу.

Підставивши всі параметри в (4.14), отримаємо рівняння, яке зв'язує  $R_1, R_2, L, C, \omega$  при резонансі

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} - \frac{1/\omega C}{R_2^2 + (1/\omega C)^2} = 0. \quad (4.15)$$

Резонанс можна забезпечити зміною параметрів або частоти. При цьому розв'язок рівняння (4.15) відносно  $L$  або  $C$  може мати два дійсних значення, одне або жодного. Розв'язок відносно резонансної частоти має вигляд

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}. \quad (4.16)$$

Тут слід відмітити, що в реальних контурах  $\rho > R_1$  та  $\rho > R_2$ . В якісних радіотехнічних контурах  $\rho \gg R_1$  та  $\rho \gg R_2$ , тому

$$\omega_p \approx \omega_0.$$

На рис. 4.11 приведена векторна діаграма реального контуру при резонансі.

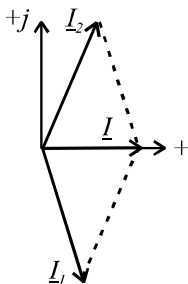


Рис. 4.11

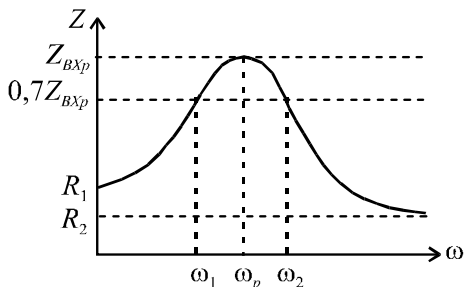


Рис. 4.12

Для побудови резонансних кривих  $I(\omega)$  та  $U(\omega)$  використано частотну характеристику  $Z_{BX}(\omega)$ . Для отримання аналітичної залежності  $Z_{BX}(\omega)$ , запишемо комплексний вхідний опір кола

$$\underline{Z}_{BX} = \frac{(R_1 + j\omega L)(R_2 - j\frac{1}{\omega C})}{R_1 + R_2 + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}.$$

Модуль цього опору

$$\begin{aligned} Z_{BX} &= \frac{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2} \cdot \sqrt{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(R_1^2 + \omega^2 L^2) \cdot (R_2^2 \omega^2 C^2 + 1)}{(R_1 + R_2)^2 \omega^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

На рис. 4.12 приведена залежність  $Z_{BX}(\omega)$ , з якої видно, що при резонансі опір має найбільше значення. За цією залежністю можна визначити смугу пропускання контуру. Так, якщо до кола приєднано джерело синусоїдального струму, у якого діюче значення

струму  $I = const$ , а частота може змінюватись, то крива  $U(\omega)$  буде повторювати, в іншому масштабі, криву  $Z_{BX}(\omega)$ .

Якщо до кола приєднано джерело напруги, то резонансна крива струму описується формулою  $I(\omega) = U / Z_{BX}(\omega)$ . Таку криву показано на рис. 4.13.

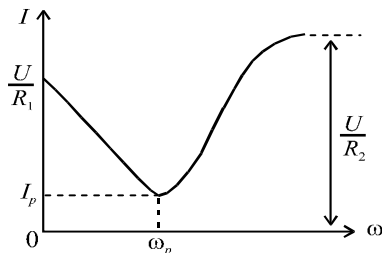


Рис. 4.13

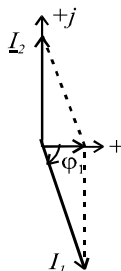


Рис. 4.14

Слід відзначити, що при  $R_1 \neq 0$  та  $R_2 \neq 0$  мінімальне значення струму кривої  $I(\omega)$  не відповідає частоті  $\omega_p$ , тобто  $I_{\min} \neq I_p$ , але ця різниця невелика і нею нехтують на практиці при налаштуванні контуру на резонанс.

При  $R_2 = 0$  (що дуже близько до реальності)  $I_{\min} = I_p$ . Векторна діаграма для цього випадку приведена на рис. 4.14, а крива  $I(\omega)$  при  $\omega \rightarrow \infty$  (рис. 4.13) прямує в нескінченність.

Добротність паралельного контуру – це відношення реактивної складової струму гілки до загального струму при резонансі:

$$Q = \frac{I_{1p}}{I} = \frac{I_{2p}}{I}. \quad (4.18)$$

При  $R_2 = 0$  добротність

$$Q = \frac{I_1 \cdot \sin \varphi_1}{I_1 \cdot \cos \varphi_1} = \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{X_L}{R_1}. \quad (4.19)$$

До речі, при  $R_2 = 0$  вхідний опір на резонансній частоті визначається формулою

$$Z_{BX.p} = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_1 \cos \varphi_1} = \frac{R_1^2 + (\omega_p L)^2}{R_1}, \quad (4.20)$$

а з урахуванням формули (4.13) отримаємо

$$Z_{BX.p} = \frac{L}{C \cdot R_1} = \frac{\rho^2}{R_1} = \rho \cdot Q. \quad (4.21)$$

Тобто, вхідний опір при резонансі більше характеристичного опору в  $Q$  разів.

Якщо резонанс досягається зміною ємності (при  $R_2 = 0$ ), то така залежність  $I(C)$  має вигляд (рис. 4.15).

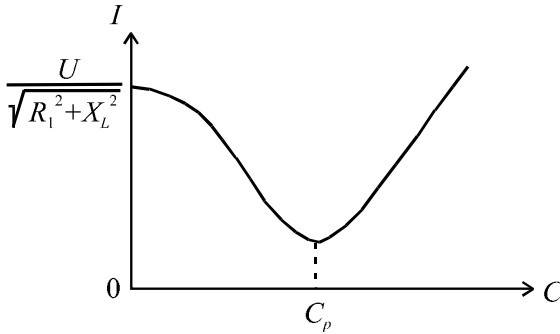


Рис. 4.15

Якщо до контуру приєднано паралельно опір навантаження  $R_H$ , та ще джерело має внутрішній опір  $R_i$  (у джерела напруги він послідовний, а у еквівалентного джерела струму – паралельний такої ж величини), то еквівалентна добротність для схеми рис. 4.16 визначається формулою:

$$Q_{EKB} = \frac{Q}{1 + \frac{Z_p}{R_i} + \frac{Z_p}{R_H}} \quad (4.22)$$

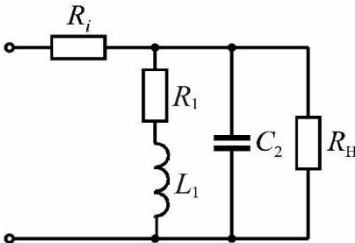


Рис. 4.16

З формули  $Q_{EKB}$  випливає, що для того, щоб не було суттєвого зменшення добротності, потрібно щоб  $R_i \gg R_1$  та  $R_H \gg R_1$ . Тоді контур буде забезпечувати вибірковість по

напрузі (а струм на вході буде практично незмінним при великих  $R_i$ ). Тому часто такі паралельні контури включають у вихідне коло польових транзисторів, які мають великий вихідний опір – сотні кОм.

Якщо  $R_i$  недостатньо велике порівняно з  $R_{BX.P}$ , то для збереження добротності можна використати неповне включення котушки або конденсатора і отримати паралельні контури 2-го та 3-го видів, які зображені на рис. 4.17а та 4.17б.

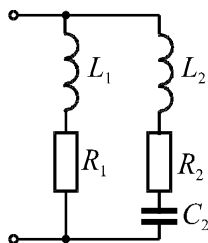


Рис. 4.17а

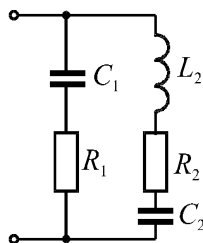


Рис. 4.17б

В схемі рис. 4.17а коефіцієнт включення

$$p_L = \frac{L_1}{L_1 + L_2}. \quad (4.23)$$

В схемі рис. 4.17б коефіцієнт включення

$$p_C = \frac{C_2}{C_1 + C_2}. \quad (4.24)$$

Для двох схем  $\omega_p$ ,  $\rho$ ,  $Q$  розраховується за формулами послідовного коливального контуру і не залежить від коефіцієнта включення (тут  $R = R_1 + R_2$ ;  $L = L_1 + L_2$ ;  $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ , але вхідний опір зменшується:

$$Z_{BX.P_L} = Z_{BX.0} \cdot p_L^2, \quad (4.25)$$

$$Z_{BX.P_C} = Z_{BX.0} \cdot p_C^2, \quad (4.26)$$

де  $Z_{BX.0}$  – вхідний опір схеми рис.4.10 при резонансі.

Струми віток при резонансі:

$$I_1 = I_2 = p_L Q \cdot I_0, \quad (4.27)$$

$$I_1 = I_2 = p_C Q \cdot I_0, \quad (4.28)$$

де  $I_0$  – струм при резонансі в нерозгалуженій частині кола.

*Приклад 4.3.*

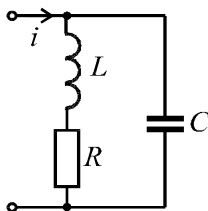


Рис. 4.18

В паралельному контурі (рис.4.18) з параметрами  $R = 10 \text{ Ом}$ ,  $L = 1 \text{ мГн}$ ,  $C = 1 \text{ мкФ}$  на резонансній частоті струм джерела  $I = 10 \text{ мА}$ .

Визначити струм контуру, добротність, резонансну частоту, вхідний опір контуру, напругу на контурі.

*Розв'язок*

1. Характеристичний опір  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{10^{-2}}{10^{-6}}} = 100 \text{ Ом}$ .

2. Добротність  $Q = \frac{\rho}{R} = \frac{100}{1} = 100$ .

3. Резонансна частота при такому значенні добротності

$$\omega_p = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-2} \cdot 10^{-6}}} = 10^4 \text{ с}^{-1}.$$

4. Струм в контурі

$$I_L = I_C = Q \cdot I = 10^2 \cdot 100 = 1 \text{ А}.$$

5. Вхідний опір

$$Z_{BX.P} = \rho \cdot Q = 100 \cdot 100 = 10^4 \text{ Ом.}$$

5. Напряга на контурі

$$U = I \cdot Z_{BX.P} = 10^{-2} \cdot 10^4 = 100 \text{ В.}$$

*Приклад 4.4.* Активно-індуктивне навантаження з послідовно з'єднаними опорами  $R = 3 \text{ Ом}$  та  $X_L = 4 \text{ Ом}$  приєднано до мережі з напругою  $U = 220 \text{ В}$ . Визначити, на скільки ампер зміниться струм в мережі, якщо паралельно приєднати конденсатор, налаштований на резонанс, а також величину ємнісного опору  $X_{C \text{ рез}}$ .

*Розв'язок.*

1. Струм в мережі до приєднання конденсатора

$$I_{(1)} = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{220}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 44 \text{ А.}$$

2. Умова резонансу струмів  $B_L = B_C$  або  $\frac{X_L}{R^2 + X_L^2} = \frac{1}{X_C}$ ,

тобто  $X_{C \text{ рез}} = \frac{R^2 + X_L^2}{X_L} = \frac{3^2 + 4^2}{4} = 6,25 \text{ Ом.}$

3. З векторної діаграми рис. 4.14 загальний струм

$$I = I_{(1)} \cdot \cos \varphi_1 = I_{(1)} \cdot \frac{R}{Z_1} = 44 \cdot \frac{3}{5} = 26,4 \text{ А.}$$

4. Струм в мережі зменшився на величину

$$\Delta I = I_{(1)} - I = 44 - 26,4 = 17,6 \text{ А.}$$

*Приклад 4.5*

Для схеми кола рис. 4.10 задано опори:  $X_L = X_C = 10 \text{ Ом}$ ;

$R_1 = R_2 = 0$ . Визначити вхідний опір кола.

*Розв'язок*



1. Для паралельного з'єднання вхідний опір

$$\underline{Z}_{BX} = \frac{jX_L \cdot (-jX_C)}{jX_L - jX_C} = \frac{j10 \cdot (-j10)}{j10 - j10} = \infty.$$

Отже, струм джерела у паралельному резонансному контурі без втрат дорівнює нулю. Це ілюструє векторна діаграма на рис. 4.19 ( $\underline{I} = \underline{I}_L + \underline{I}_C = 0$ ).

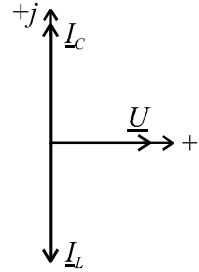


Рис. 4.19

### 4.3. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ ПРО АНАЛІЗ РЕЗОНАНСНИХ ЯВИЩ У РОЗГАЛУЖЕНИХ КОЛАХ

#### Порядок аналізу

- записується вираз  $Z_{BX}(j\omega)$ ;
- шляхом перетворень розділяємо його на дійсну та уявну частини  $Z_{BX}(j\omega) = R_{BX}(\omega) + jX_{BX}(\omega)$ ;
- розв'язується рівняння  $X_{BX}(\omega) = 0$  і визначаються параметри, які задовольняють умові резонансу.

#### Приклад 4.6

Для схеми на рис. 4.20 задано  $R = 10$  Ом;  
 $X_L = 5$  Ом;  $f = const$ . Визначити опір  $X_C$ , який задовольняє умові резонансу.

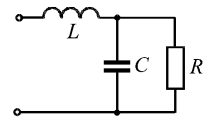


Рис. 4.20

#### Розв'язок.

1. Записуємо вираз для комплексного вхідного опору та виділяємо його дійсну та уявні частини.

$$\underline{Z}_{BX}(j\omega) = j\omega L + \frac{R\left(\frac{1}{j\omega C}\right)}{R + \frac{1}{j\omega C}};$$

$$\underline{Z}_{BX} = j5 + \frac{10(-jX_C)}{10 - jX_C} = j5 + \frac{-j10X_C}{10 - jX_C} \cdot \frac{10 + jX_C}{10 + jX_C} =$$

$$= j5 + \frac{-j100X_C}{100 + X_C^2} + \frac{10X_C^2}{100 + X_C^2} = \frac{10X_C^2}{100 + X_C^2} + j\left(5 - \frac{100X_C}{100 + X_C^2}\right) =$$

$$= R_{BX} + jX_{BX}$$

2. Розв'язуємо рівняння  $X_{BX} = 0$  відносно  $X_C$

$$5 - \frac{100X_C}{100 + X_C^2} = 0 \Rightarrow X_{Cрез} = 10 \text{ Ом},$$

тобто при заданих значеннях опорів  $R$  та  $X_L$  умові резонансу відповідає одне значення ємнісного опору.

#### 4.4. КОМПЛЕКСНІ ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДОВІЛЬНИХ КІЛ

При розгляді послідовного та паралельного контурів вже розглядалися частотні характеристики кіл у вигляді залежності вхідного опору від частоти.

В цьому параграфі дається загальне визначення комплексної частотної характеристики кола (КЧХ), як для двохполюсників, так і для чотирьохполюсників.

КЧХ – це відношення комплексної амплітуди вихідної величини до комплексної амплітуди вхідної величини (або те саме до комплексів діючих значень):

$$\underline{H} = \frac{\underline{X}_{mBIX}}{\underline{X}_{mBX}} = \frac{\underline{X}_{BIX}}{\underline{X}_{BX}}. \quad (4.29)$$

В показниковій формі КЧХ у функції частоти записується у вигляді:

$$\underline{H} = H(\omega) \cdot e^{j\Theta(\omega)}. \quad (4.30)$$

На вході двохполюсника є дві електричні величини – струм та напруга, тому в якості КЧХ може бути залежність вхідного опору від частоти або залежність вхідної провідності від частоти. Все залежить від того, що є вхідною, а що – вихідною величинами. Якщо вхідна величина струм, а вихідна – напруга, то КЧХ – вхідний опір:

$$\underline{H} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z} = Z(j\omega) = Z(\omega) \cdot e^{j\Theta(\omega)}. \quad (4.31)$$

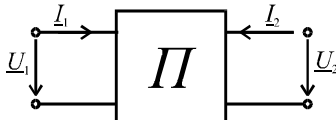


Рис. 4.21

Для чотириполюсника (рис.4.21) є дві пари електричних величин, які зв'язують його вхід та вихід, тому тут в якості КЧХ можуть бути комплексний передаточний опір  $\left(\frac{U_2}{I_1}\right)$ ,

комплексна передаточна провідність  $\left(\frac{I_2}{U_1}\right)$ , комплексний коефіцієнт

передачі по струму  $\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$  та комплексний коефіцієнт передачі по на-

прузі  $\left(\frac{U_2}{U_1}\right)$ .

Для чотирьохполюсника найбільший практичний інтерес представляє КЧХ у вигляді комплексного коефіцієнта передачі по напрузі:

$$\underline{H} = \frac{U_2}{U_1} = \underline{K}_U = K(\omega) \cdot e^{j\Theta(\omega)} . \quad (4.32)$$

Отже, модуль КЧХ  $K(\omega)$  – це відношення амплітуди (діючого значення) вихідної напруги до амплітуди (діючого значення) вхідної напруги в функції частоти. Формула

$$U_2(\omega) = K(\omega) \cdot U_1(\omega) \quad (4.33)$$

дозволяє визначити вихідну напругу на довільній частоті. Якщо вхідний сигнал має амплітуду 1 В, то  $K(\omega)$  характеризує залежність амплітуди вихідного сигналу від частоти.

Аргумент КЧХ  $\Theta(\omega)$  характеризує різницю фаз між вихідною та вхідною напругами, тобто показує як змінюється фаза вхідного сигналу при його проходженні крізь чотириполюсник.

Залежність модуля КЧХ  $H(\omega)$  та аргумента  $\Theta(\omega)$  від частоти називається амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ) та фазочастотною характеристикою (ФЧХ) кола.

Хоча в визначенні КЧХ кола присутні такі електричні величини як струм та напруга, але для будь-якого лінійного кола КЧХ залежить тільки від параметрів кола, його структури та частоти і не залежить від вхідного сигналу.

Приклад 4.7

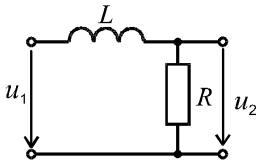


Рис.4.22

Для схеми рис.4.22 визначити  $K(j\omega)$ ,  $K(\omega)$ ,  $\Theta(\omega)$ . Побудувати графіки  $K(\omega)$ ,  $\Theta(\omega)$ .

Розв'язок.

$$1. K(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{I \cdot R}{U_1} = \frac{\frac{U_1}{Z_1} R}{U_1} = \frac{R}{Z_1} = \frac{R}{R + j\omega L}.$$

2. Записуємо  $K(j\omega)$  в показниковій формі:

$$K(j\omega) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (j\omega L)^2}} e^{-j \arctg \frac{\omega L}{R}},$$

$$\text{Отже, АЧХ кола } K(\omega) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (j\omega L)^2}}.$$

3. Графіки залежностей  $K(\omega)$ ,  $\Theta(\omega)$  зображені на рис. 4.23 та 4.24.

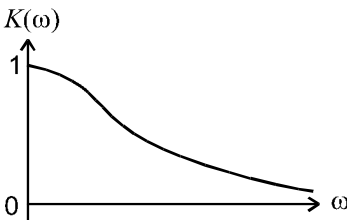


Рис.4.23

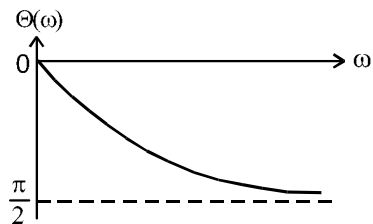


Рис.4.24

Як бачимо, для простих кіл  $K(j\omega)$  визначається відношенням опору, з якого «знімається» напруга, до загального опору.

Приклад 4.8

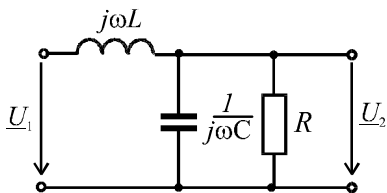


Рис.4.25

Для схеми рис.4.25 отримати вирази  $K(j\omega)$ ,  $K(\omega)$ ,  $\Theta(\omega)$ .

*Розв'язок*

1. Вихідною є напруга на паралельно-з'єднаних  $R, C$  елементах, тому:

$$K(j\omega) = \frac{\underline{Z}_{RC}}{\underline{Z}_{BX}} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{R - \omega^2 LCR + j\omega L} =$$

$$= \frac{R}{j\omega L + \frac{j\omega C}{R + \frac{1}{j\omega C}}}$$

$$= \frac{R}{\sqrt{(R - \omega^2 LCR)^2 + (\omega L)^2}} e^{-j \arctg \frac{\omega L}{R - \omega^2 LCR}}$$

2. Тоді АЧХ кола:

$$K(\omega) = \frac{\underline{Z}_{RC}}{\underline{Z}_{BX}} = \frac{R}{\sqrt{(R - \omega^2 LCR)^2 + (\omega L)^2}}$$

ФЧХ кола:

$$\Theta(\omega) = -\arctg \frac{\omega L}{R - \omega^2 LCR}$$

Примітка 1. Для більш складних схем, наприклад, мостових схем, зв'язати вихідну та вхідну величини можна за методом контурних струмів або за методом вузлових потенціалів (див. приклади

[9]).

Примітка 2. АЧХ та ФЧХ кола часто будують в логарифмічному масштабі по осі частот.

#### 4.5. ПРАКТИЧНЕ ЗНАЧЕННЯ ЯВИЩА РЕЗОНАНСУ

1. В радіотехніці контури антен радіопередавачів і радіоприймачів налаштовуються в резонанс відповідно на частоту струму генератора або частоту напруженості магнітного поля електромагнітної хвилі.

2. Генератори високих частот містять в собі коливальний контур, в якому коливання напруги та струму відбуваються з резонансною частотою  $\omega_p$ .

3. Застосування резонансного явища в техніці зв'язку дозволяє по одній парі дротів здійснювати багатоканальний зв'язок.

4. В енергетиці резонанс використовується для компенсації реактивної потужності.

5. Налаштування послідовних або паралельних контурів на резонанс в електричних фільтрах при частоті  $\omega_k$  забезпечує виділення або придушення струму частоти  $\omega_k$ .

#### КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 4

1. Умова резонансу для послідовного коливального контуру, резонансна частота.

2. Характеристичний опір.

3. Добротність контуру.

4. Частотні характеристики послідовного коливального контуру та резонансні криві.

5. Смуга пропускання.

6. Узагальнене розстроювання контуру.

7. Вплив навантаження та внутрішнього опору джерела на добротність.

8. Умова резонансу для паралельного коливального контуру, резонансна частота.

9. Резонансні криві.

10. Добротність паралельного контуру, вплив навантаження.

11. Вхідний опір паралельного контуру при резонансі.

12. Поняття про паралельні коливальні контури 2-го та 3-го видів.

13. Практичне значення резонансних явищ.



## КОЛА З ВЗАЄМНОЮ ІНДУКЦІЄЮ

### 5.1. ВЗАЄМОІНДУКТИВНІСТЬ. ЕЛЕКТРОРУШІЙНА СИЛА ВЗАЄМОІНДУКЦІЇ

Нагадаємо, що магнітний потік  $\Phi$  у контурі, який утворюється електричним струмом  $I$  цього контуру, називається магнітним потоком самоіндукції (рис. 1.3). Відповідне цьому потокові поточозчеплення контуру (катушки)  $\Psi = W\Phi$  називається поточозчепленням самоіндукції, де  $W$  – кількість витків контуру. Індуктивність контуру через поточозчеплення та струм визначається

$$L = \frac{\Psi}{i}.$$

Якщо магнітний потік, що зчіплюється з даним контуром, утворюється струмом іншого контуру, то такий потік називається потоком взаємоіндукції, а відповідне поточозчеплення – поточозчепленням взаємоіндукції.

Розглянемо систему двох катушок, зображену на рис. 5.1, при умові, що з усіма витками катушки  $W$  зчіплюється один і той же потік.

Нехай спочатку струм  $i_1 \neq 0$ , а струм  $i_2 = 0$ . Позначимо че-

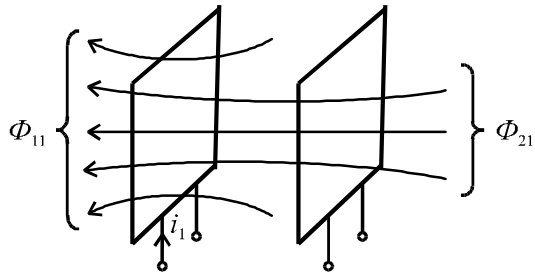


Рис.5.1

рез  $\Phi_{11}$  – потік, який зчеплений з першою катушкою і утворений струмом першої катушки, а  $\Phi_{21}$  – потік зчеплений з другою катушкою і утворений струмом першої катушки. Відповідні поточозчеплення:  $\Psi_{11} = w_1\Phi_{11}$  та  $\Psi_{21} = w_2\Phi_{21}$ .

Тоді відношення  $\frac{\Psi_{11}}{i_1} = L_1$  - є індуктивність першої котушки, а відношення

$$\frac{\Psi_{21}}{i_1} = M_{21} \quad (5.1)$$

є взаємоіндуктивність між другою та першою котушками.

Якщо  $i_1 = 0$ , а  $i_2 \neq 0$ , то по аналогії:  $\Psi_{22} = w_2 \Phi_{22} \Rightarrow \frac{\Psi_{22}}{i_2} = L_2$

- індуктивність другої котушки, а

$$\Psi_{12} = w_1 \Phi_{12} \Rightarrow \frac{\Psi_{12}}{i_2} = M_{12} \quad (5.2)$$

є взаємоіндуктивність між 1-ю та 2-ю котушками.

Можна показати, що

$$M_{12} = M_{21} = M. \quad (5.3)$$

Взаємоіндуктивність  $M$  залежить від геометричних розмірів котушок, кількості витків  $w_1$  та  $w_2$ , магнітної проникливості середовища  $\mu$  та взаємного положення котушок. Як і індуктивність вона вимірюється в Генрі (Гн).

Якщо струми є у обох котушках, то повні потокозчеплення визначаються формулами:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1 &= \Psi_{11} \pm \Psi_{12} = L_1 i_1 \pm M i_2; \\ \Psi_2 &= \Psi_{22} \pm \Psi_{21} = L_2 i_2 \pm M i_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Тут знак "+" відповідає узгодженому включенню котушок, коли потоки само- і взаємоіндукції мають однаковий напрямок, тобто додаються. Знак "-" відповідає неузгодженому включенню. На рис. 5.2 показані умовні позначення узгодженого (а) та неузгодженого (б) включень.

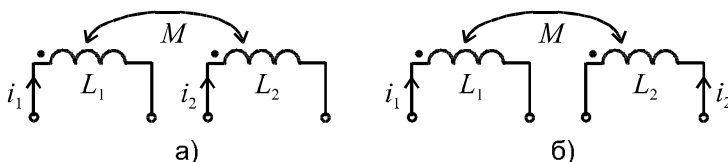


Рис. 5.2



Символами  $(\bullet)$ ,  $(\Delta)$ ,  $(*)$  на електричних схемах позначають умовні початки котушки. Якщо струми орієнтовані однаково відносно таких позначень, то включення узгоджене.

Припустимо, що струми змінюються з часом. Тоді згідно з законом електромагнітної індукції ЕРС котушок:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= -\frac{d\Psi_1}{dt} = -\frac{d}{dt}(L_1 i_1 \pm M i_2) = e_{L_1} \pm e_{M_1}; \\ e_2 &= -\frac{d\Psi_2}{dt} = -\frac{d}{dt}(L_2 i_2 \pm M i_1) = e_{L_2} \pm e_{M_2}, \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

де  $e_{L_1}$ ,  $e_{L_2}$ ,  $e_{M_1}$ ,  $e_{M_2}$  – ЕРС самоіндукції та взаємоіндукції.

Електричні напруги на котушках:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} = u_{L_1} \pm u_{M_1}; \\ u_2 &= -e_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} = u_{L_2} \pm u_{M_2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Якщо струми синусоїдальні, тоді зручніше використати комплексну форму запису

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 \pm j\omega M \underline{I}_2 = \underline{U}_{L_1} \pm \underline{U}_{M_1}, \quad (5.7)$$

де:  $\underline{U}_{M_1} = j\omega M \underline{I}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2$ ;

$$\underline{Z}_M = j\omega M = jX_M - \text{комплексний опір взаємоіндукції}. \quad (5.8)$$

В радіотехніці та техніці зв'язку використовується поняття коефіцієнта зв'язку двох контурів

$$k_3 = \frac{\sqrt{\Psi_{12} \cdot \Psi_{21}}}{\sqrt{\Psi_{11} \cdot \Psi_{22}}} = \frac{\sqrt{M i_2 \cdot M i_1}}{\sqrt{L_1 i_1 \cdot L_2 i_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} < 1. \quad (5.9)$$

*Пристрої, в яких  $k_3$  можна змінювати, називаються варіометрами.*

Практично це може бути система з двох з'єднаних плоских котушок, в якій рухома котушка має можливість повороту відносно нерухомої котушки, тобто коефіцієнт зв'язку змінюється за рахунок зміни взаємоіндуктивності  $M$ .

## 5.2. ПОСЛІДОВНЕ З'ЄДНАННЯ ДВОХ ІНДУКТИВНО-ЗВ'ЯЗАНИХ КОТУШОК

Припустимо, що дві реальні взаємоіндуктивні котушки зв'язані послідовно і узгоджено (рис.5.3).

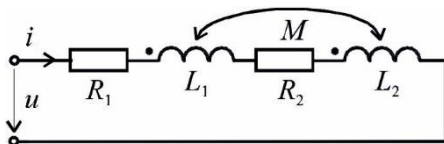


Рис. 5.3

Рівняння кола для миттєвих значень

$$u = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}, \quad (5.10)$$

або в комплексному зображенні для діючих значень напруг і струмів

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underbrace{R_1 \underline{I} + j\omega L_1 \underline{I} + j\omega M \underline{I}}_{\underline{U}_{K1}} + \underbrace{R_2 \underline{I} + j\omega L_2 \underline{I} + j\omega M \underline{I}}_{\underline{U}_{K2}} = \quad (5.11) \\ &= \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I} \underline{Z}_2 = \underline{I} \underline{Z}, \end{aligned}$$

$$\text{де: } \underline{Z}_1 = R_1 + j\omega(L_1 + M) = R_1 + j\omega L_{1E}, \text{ де } L_{1E} = L_1 + M; \quad (5.12)$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega(L_2 + M) = R_2 + j\omega L_{2E}; \quad L_{2E} = L_2 + M; \quad (5.13)$$

$$\underline{Z} = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M) = R_E + j\omega L_E; \quad (5.14)$$

$$L_E = L_1 + L_2 + 2M. \quad (5.15)$$

Бачимо, що при узгодженому включенні еквівалентна індуктивність кожної котушки і кола збільшується порівняно з послідовним колом без індуктивного зв'язку.

За рівнянням (5.11) можна побудувати векторну діаграму, яка показана на рис. 5.4.

Векторну діаграму для неузгодженого включення котушок пропонується побудувати самостійно.

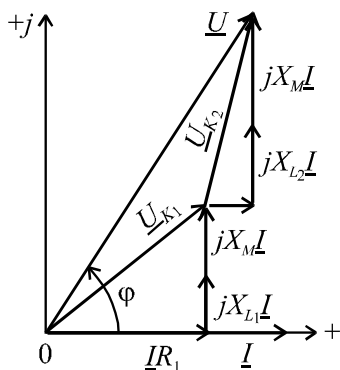
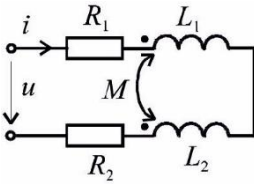


Рис.5.4

Досліди узгодженого та неузгодженого з'єднання дозволяють обчислити  $M$

$$M = \frac{L_{E,узн.} - L_{E,неузн.}}{4}.$$

**Приклад 5.1.** Для кола з послідовним з'єднанням двох індуктивно-зв'язаних котушок (рис. 5.5) задані напруга та параметри схеми. Визначити діюче значення струму.



$$U = 20\text{ В}; R_1 = R_2 = 3\text{ Ом};$$

$$\omega L_1 = \omega L_2 = 10\text{ Ом}; \omega M = 6\text{ Ом}.$$

Рис. 5.5

**Розв'язок.**

1. У даному випадку маємо неузгоджене включення котушок.
2. Повний опір кола

$$\underline{Z} = (R_1 + R_2) + j(\omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega M) =$$

$$= (3 + 3) + j(10 + 10 - 2 \cdot 6) = 6 + j8 = 10e^{j53^\circ} \text{ Ом}.$$

3. Комплексне діюче значення струму

$$\underline{I} = \frac{U}{\underline{Z}} = \frac{20}{10e^{j53^\circ}} = 2e^{-j53^\circ} \text{ А}.$$

4. Діюче значення струму  $I = 2 \text{ А}$ .

### 5.3. ОСОБЛИВОСТІ СКЛАДАННЯ РІВНЯНЬ ДЛЯ СКЛАДНОГО КОЛА З ВЗАЄМНОІНДУКЦІЄЮ

Для таких кіл застосовують рівняння Кірхгофа та метод контурних струмів. Метод вузлових напруг, метод еквівалентного генератора, метод еквівалентних перетворювань у загальному випадку не можуть бути застосованими, так як не враховують індуктивних зв'язків. Якщо від дійсної схеми перейти до еквівалентної схеми без індуктивних зв'язків, тоді можна застосувати всі методи. Перехід до

еквівалентної схеми без індуктивних зв'язків показано в прикладі 5.3.

Сформулюємо правила складання рівнянь за законами Кірхгофа для кіл з взаємоіндуктивними зв'язками. Розглянемо це на прикладі двоконтурної схеми (рис. 5.6). Довільно задаємось напрямками струмів віток. Цим напрямкам відповідає неузгоджене включення котушок.

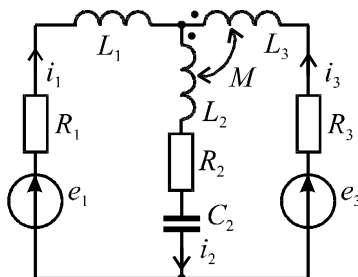


Рис.5.6

Зобразимо комплексну еквівалентну схему цього кола (рис. 5.7).

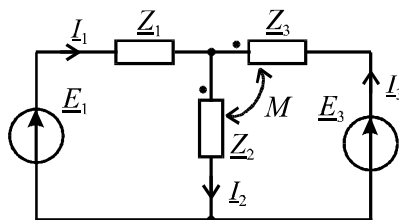


Рис. 5.7

Складання рівняння за першим законом Кірхгофа особливостей не має

$$I_1 + I_3 - I_2 = 0.$$

Складання контурних рівнянь за другим законом Кірхгофа має особливість, яка полягає в тому, що при обході індуктивно-зв'язаної котушки, внесені шляхом взаємної індукції напруги записуються з тим же знаком, що і напруга від власного струму котушки, якщо вони включаються узгоджено:

$$I_1 Z_1 + I_2 Z_2 - I_3 Z_M = E_1;$$

$$I_3 Z_3 - I_2 Z_M + I_2 Z_2 - I_3 Z_M = E_3.$$

Приклад 5.2. Для схеми з паралельним з'єднанням індуктивно-зв'язаних котушок (рис. 5.8) задана ЕРС та параметри елементів кола. Визначити комплексні значення струмів віток.

$$E = 10\text{В}; R = X_{L_1} = 5\text{Ом};$$

$$X_{L_2} = X_{C_2} = 10\text{Ом}; X_M = 5\text{Ом}.$$

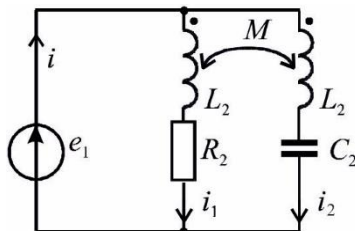


Рис.5.8

**Розв'язок**

1. Складаємо комплексну еквівалентну схему (рис. 5.9).

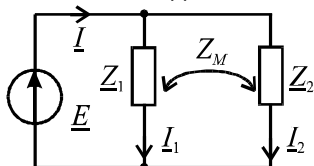


Рис. 5.9

Комплексні опори елементів схеми:

$$\underline{E} = 10\text{В}; \underline{Z}_1 = R + jX_{L_1} = 5 + j5\text{Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = jX_{L_2} - jX_{C_2} = j10 - j10 = 0;$$

$$\underline{Z}_M = jX_M = j5\text{Ом}.$$

2. Складаємо рівняння Кірхгофа:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2; \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_M = \underline{E}; \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{I}_1 \underline{Z}_M = \underline{E}.$$

3. врахуванням числових значень ці рівняння приймуть вид:

$$\underline{I}_1 \cdot (5 + j5) + \underline{I}_2 \cdot j5 = 10; \underline{I}_2 \cdot 0 + \underline{I}_1 \cdot j5 = 10.$$

З останнього рівняння струм  $\underline{I}_1 = \frac{10}{j5} = -j2 = 2e^{-j90^\circ}\text{А}.$

Тоді:

$$(-j2)(5 + j5) + \underline{I}_2 j5 = 10 \Rightarrow -j10 + 10 + \underline{I}_2 \cdot j5 = 10 \Rightarrow \underline{I}_2 = 2\text{А}.$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = -j2 + 2 = 2\sqrt{2}e^{-j45^\circ}\text{А}.$$

Приклад 5.3. Для кола, схема якого показана на рис. 5.6 привести еквівалентну схему без індуктивних зв'язків.

Покажемо один з штучних прийомів побудови схеми без індуктивних зв'язків. Для цього в одному контурному рівнянні системи рівнянь Кірхгофа складених для схеми рис. 5.7 заміняємо  $\underline{I}_3 = \underline{I}_2 - \underline{I}_1$  і отримаємо нову систему контурних рівнянь

$$\begin{aligned} \underline{I}_1(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_M) + \underline{I}_2(\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M) &= \underline{E}_1; \\ \underline{I}_2(\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M) + \underline{I}_3(\underline{Z}_3 - \underline{Z}_M) &= \underline{E}_3. \end{aligned}$$

Отриманій системі рівнянь відповідає еквівалентна схема без індуктивних зв'язків (рис. 5.10).

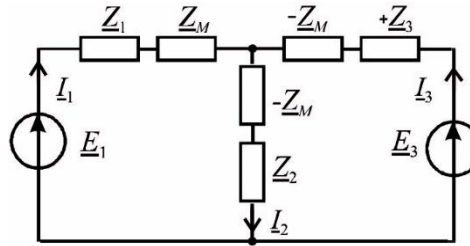


Рис. 5.10

Приклад 5.4. Для схеми рис. 5.11 відомо:  $I_1 = 1 \text{ A}$ ;  $U_2 = 31,4 \text{ В}$ ,  $f = 50 \text{ Гц}$ .

Опір вольтметра  $V_2$  дорівнює нескінченності. Визначити взаємодійність  $M$ .

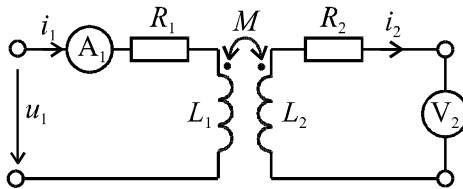


Рис. 5.11

### Розв'язок

1. Нарисуємо комплексну заступну схему цього кола (рис. 5.12).

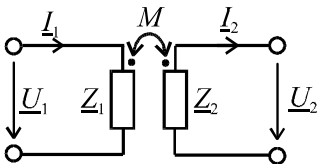


Рис. 5.12

2. Запишемо рівняння Кірхгофа для контурів:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{I}_1 \underline{Z}_1 - \underline{I}_2 \underline{Z}_M; \\ \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{U}_2 - \underline{I}_1 \underline{Z}_M &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Якщо врахувати що  $R_{V_2} = \infty$ , то струм  $\underline{I}_2 = 0$ . Тоді з другого рівняння  $\underline{U}_2 = \underline{I}_1 \underline{Z}_M$ , звідки для діючих значень

$$\underline{Z}_M = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \Rightarrow \omega M = \frac{U_2}{I_1} \Rightarrow M = \frac{U_2}{\omega I_1} = \frac{31,4}{2\pi \cdot 50 \cdot 1} = 0,1 \text{ Гн.}$$

## 5.4. ЛІНІЙНИЙ ТРАНСФОРМАТОР

Трансформатор – це пристрій, в якому енергія з одного кола в інше передається магнітним полем.

Він використовується для перетворення змінної напруги по величині, для електричної розв'язки кіл та для перетворення величини опорів.

Простий трансформатор має дві обмотки, які електрично не зв'язані між собою, та феромагнітне осердя, яке суттєво збільшує магнітний зв'язок між обмотками. До лінійних трансформаторів відносяться ті, у яких магнітна проникність осердя постійна  $\mu = const$ , а також трансформатори без осердя.

Схема заміщення лінійного трансформатора наведено на рисунку 5.13.

При синусоїдних напругах рівняння трансформатора має вигляд:

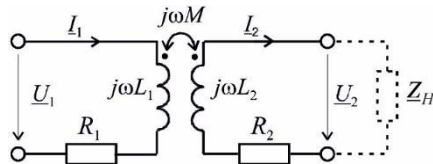


Рис. 5.13

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{I}_1(R_1 + j\omega L_1) - j\omega M \underline{I}_2 \\ \underline{I}_2(R_2 + j\omega L_2) - j\omega M \underline{I}_1 + \underline{U}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Тут  $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_H = \underline{I}_2(R_H + jX_H)$ .

З другого рівняння системи (5.16) при  $\underline{Z}_H = \infty \rightarrow \underline{I}_2 = 0$ , а  $\underline{U}_2 = j\omega M \underline{I}_1$ , або для діючих значень  $U_2 = \omega M \cdot I_1 \rightarrow$

$$M = \frac{U_2}{\omega I_1} \quad (5.17)$$

$$\text{При } \underline{I}_2 \neq 0 \quad \underline{I}_2 = \frac{j\omega M \underline{I}_1}{(R_2 + j\omega L_2) + (R_H \pm jX_H)}$$

Підставимо  $\underline{I}_2$  в перше рівняння системи (5.16)

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{I}_1(R_1 + j\omega L_1) + \frac{(jM)^2 \underline{I}_1}{(R_2 + R_H) + j(X_2 + X_H)} = \\ &= \underline{I}_1(R_1 + j\omega L_1) + \underline{I}_1 \left( \frac{X_M^2 \cdot R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} - j \frac{X_M^2 \cdot X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} \right) = \end{aligned}$$

$$= \underline{I}_1 [(R_1 + R_{BH}) + j(X_1 - X_{BH})]$$

де:  $R_{BH}, X_{BH}$  – опори, які вносяться з вторинного кола,  
 $R_{22} = R_2 + R_H$   $X_{22} = X_2 + X_H$ .

Примітка. Якщо  $(X_2 + X_H)$  має індуктивний характер, то  $X_{BH}$  зменшує вхідний індуктивний опір трансформатора, тобто вторинний контур чинить розмагнічуючу дію.

Якщо  $R_1 = 0, R_2 = 0$  та  $I_2 = 0$  ( $Z_H = \infty$ ), та коефіцієнт зв'язку  $K_{3B} = 1$ , то:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 = j\omega M \underline{I}_1 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{L_1}{M} = \frac{L_1}{\sqrt{L_1 L_2}} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = K$$

де  $K$  – коефіцієнт трансформації, який є дійсним числом.

У ідеального трансформатора (без втрат)

$$\underline{S}_1 = \underline{S}_2 \rightarrow \underline{U}_1 \underline{I}_1^* \equiv \underline{U}_2 \underline{I}_2^*, \text{ звідки}$$

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = K. \quad (5.18)$$

Вхідний опір трансформатора, до якого приєднано  $\underline{Z}_H$ :

$$\underline{Z}_{BX} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{K \underline{U}_2}{\underline{I}_2 / K} = K^2 \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = K^2 \underline{Z}_H.$$

Тобто трансформатор змінює опір  $\underline{Z}_H$  в  $K^2$  разів, що використовується для узгодження опору джерела з навантаженням в електронних пристроях.

### 5.5. РЕЗОНАНСИ В ЗВ'ЯЗАНИХ КОНТУРАХ

Системи зв'язаних контурів широко застосовуються в радіотехніці, наприклад, для забезпечення смуги пропускання, яка охоплює весь діапазон звукових частот, а АЧХ має круті “спади” за межами смуги пропускання. На практиці, як правило, застосовують систему ідентичних, високо добротних контурів, в яких  $R_1 = R_2 = R$ ,  $L_1 = L_2 = L$  (рис 5.14).



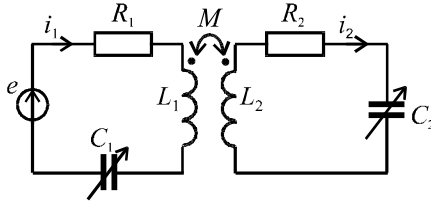


Рис. 5.14

Резонансом в системі зв'язаних контурів називають явище, при якому під дією слабкого вхідного сигналу виникають інтенсивні коливання, які супроводжуються максимумом амплітуд будь-яких струмів в вітках або напруг на елементах контурів. Як правило, про резонанс судять по максимуму струму  $I_2$ .

Налаштування в резонанс полягає в виборі параметрів  $C_1, C_2, M$ , які при заданих  $E$  та  $f$  забезпечують максимум струму  $I_2$ . При цьому ЕРС  $e_1$  та  $i_1$  співпадають по фазі.

З рівнянь кола (5.19):

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 \underline{Z}_1 - \underline{I}_2 \underline{Z}_M &= \underline{E} \\ \underline{I}_2 \underline{Z}_2 - \underline{I}_1 \underline{Z}_M &= 0, \end{aligned} \quad (5.19):$$

де:  $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1; X_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1};$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2; X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}; \underline{Z}_M = jX_M.$$

Струми  $\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_M}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_M}{\underline{Z}_2} \cdot \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{BH1}}$  (5.20)

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1 - \frac{\underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_2}} = \frac{\underline{E}}{(R_1 + R_{BH}) + j(X_1 - X_{BH})}, \quad (5.21)$$

де  $R_{BH} = \frac{X_M^2}{R_2^2 + X_2^2} R_2; X_{BH} = \frac{X_M^2}{R_2^2 + X_2^2} X_2.$  (5.22)

Внесений опір  $R_{BH}$  враховує вплив втрат в другому контурі на струм першого контуру, а  $X_{BH}$  враховує вплив розладнання другого контуру на перший контур.

Налаштування в резонанс можна здійснити різними шляхами: змінюючи реактивний опір першого або другого контуру, двох контурів та підбором зв'язку. Відповідно до цього розрізняють власні резонанси (перший, другий та основний) та складні резонанси (перший, другий і повний).

Власний резонанс – режим, при якому досягається максимум амплітуди коливань за рахунок рівності нулю реактивного опору контуру.

Складний резонанс – режим, при якому виконуються умови власного резонансу та досягається оптимальний зв'язок між контурами.

1. Перший власний резонанс забезпечується зміною  $C_1$  і умовою резонансу буде  $X_1 - X_{BH_1} = 0$

$$X_1 - X_2 \frac{X_M^2}{R_2^2 + X_2^2} = 0; \quad (5.23)$$

$$I_{2M_1} = \frac{E}{\left( R_1 + R_2 \frac{X_M^2}{R_2^2 + X_2^2} \right)} \cdot \frac{X_M}{Z_2}. \quad (5.24)$$

2. Другий власний резонанс забезпечується зміною  $C_2$  і умовою резонансу буде:

$$X_2 - X_1 \frac{X_M^2}{R_1^2 + X_1^2} = 0; \quad (5.25)$$

$$I_{2M_2} = \frac{E}{\left( R_2 + R_1 \frac{X_M^2}{R_1^2 + X_1^2} \right)} \cdot \frac{X_M}{Z_1}. \quad (5.26)$$

3. Основний або індивідуальний резонанс досягається налаштуванням кожного контуру окремо на свій резонанс при відсутності зв'язку між контурами.

Тоді

$$I_{2M} = \frac{E}{R_1 + \frac{X_M^2}{R_2}} \cdot \frac{X_M}{R_2}. \quad (5.27)$$

Амплітуда струму більша ніж при I та II власних резонансах.

4. Перший складний резонанс досягається коли при I власному резонансі встановлюється оптимальний опір зв'язку.

Якщо дослідити залежність  $I_{2M}(X_M)$  (5.24) на екстремум, то визначимо максимально можливий максимум струму  $I_2$  - максимум максимумум.

$$\frac{dI_{2M}}{dX_M} = 0 \rightarrow X_{ОПТ1} = \sqrt{(R_2^2 + X_2^2) \frac{R_1}{R_2}}. \quad (5.28)$$

При цьому

$$I_{2MM} = \frac{E}{2\sqrt{R_1 R_2}}. \quad (5.29)$$

5. Другий складний резонанс досягається, коли при II власному резонансі встановлюється оптимальний зв'язок.

$$X_{ОПТ2} = \sqrt{(R_1^2 + X_1^2) \frac{R_1}{R_2}}; \quad (5.30)$$

$$I_{2MM} = \frac{E}{2\sqrt{R_1 R_2}}.$$

6. Повний резонанс досягається після налаштування на індивідуальний резонанс шляхом підбору оптимального зв'язку.

$$X_{MОПТ} = \sqrt{R_1 R_2},$$

$$I_{2MM} = \frac{E}{2\sqrt{R_1 R_2}} = Y_{21MM} \cdot E. \quad (5.31)$$

$Y_{21MM}$  – модуль передаточний провідності системи, яка налаштована на складний резонанс. Струм такий, як при складних резонансах, але оптимальний зв'язок менший.

Системи зв'язаних контурів найчастіше працюють при слабкому зв'язку, коли  $0,01 \leq K \leq 0,05$ .

Так як в ідентичних контурах  $R_1 = R_2 = R$ ,  $L_1 = L_2 = L$ ,  $C_1 = C_2 = C$ .

$$X_{M_{OPT}} = \sqrt{R_1 R_2} = R \rightarrow M = \frac{R}{\omega}.$$

$$\text{Коефіцієнт зв'язку } K_{3B_{OPT}} = \frac{M}{L} = \frac{R}{\omega L} = \frac{1}{Q}. \quad (5.32)$$

На практиці використовують поняття фактора зв'язку  $A$ , який оцінює ступінь відхилення зв'язку від оптимального.

$$A = \frac{X_{3B}}{X_{3B_{OPT}}} = \frac{X_{3B}}{\sqrt{R_1 R_2}} = K_{3B} \sqrt{Q_1 Q_2}.$$

При ідентичних контурах

$$A = K_{3B} Q \quad (5.33)$$

При повному резонансі  $X_{3B} = X_{3B_{OPT}}$  і  $A = 1$ .

## 5.6. ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМИ ЗВ'ЯЗАНИХ КОНТУРІВ

Як правило, при вивченні частотно-вибіркових властивостей системи зв'язаних контурів, коли вторинний струм  $I_2$  є вихідною величиною та  $E$  - вхідною величиною, використовують  $T$  - подібну схему заміщення, а властивості системи характеризують передаточною провідністю  $\underline{Y}_{21}$ .

Для системи ідентичних контурів аналітичний вираз для комплексної передаточної провідності з формули 5.20 при:

$$\xi = \frac{X}{R}; \quad A = \frac{X_{3B}}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{X_M}{R}; \quad \underline{Y}_{21_{MM}} = \frac{1}{2\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{1}{2R}.$$

має вигляд:

$$\underline{Y}_{21} = \frac{I_2}{E} = \frac{j2A \cdot \underline{Y}_{21_{MM}}}{1 + A^2 - \xi^2 + j2\xi}.$$

Модуль комплексної передаточної провідності:

$$Y_{21} = \frac{2A \cdot Y_{21MM}}{\sqrt{(1 + A^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}. \quad (5.34)$$

Цікаво отримати загальні закономірності, тому перейдемо до нормованої характеристики. Нормуємо по  $Y_{21MM}$ .

$$Y_{21HOPM} = \frac{Y_{21}}{Y_{21MM}} = \frac{2A}{\sqrt{(1 + A^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}. \quad (5.35)$$

Цей вираз представляє нормовану узагальнену АЧХ системи зв'язаних контурів, яка співпадає з нормованою резонансною характеристикою (рис. 5.15).

$$Y_{21H} = I_{2H} = \frac{I_2}{I_{2MM}} = \frac{2A}{\sqrt{(1 + A^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}} = f(\xi, A). \quad (5.36)$$

Якщо дослідити функцію на екстремум, можна визначити точки екстремуму та значення відповідних частот:

$$\xi_0 = 0; \quad \xi_{12} = \pm\sqrt{A^2 - 1}; \quad \xi = Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right);$$

$\omega_{P0} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – відповідає власній резонансній частоті контурів.

$\omega_{P12} = \omega_0\left(1 \mp \frac{1}{2Q}\sqrt{A^2 - 1}\right)$  – резонансні частоти системи або частоти зв'язку.

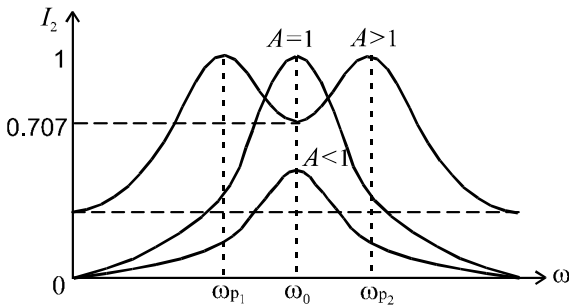


Рис. 5.15

Особливістю системи зв'язаних контурів є те, що порівняно з одиночними коливальними контурами тут краща вибіркова властивість – форма АЧХ набагато ближче до прямокутної. Крім того, за рахунок зміни коефіцієнту зв'язку можна плавно змінювати ширину смуги пропускання, що обумовило широке застосування таких систем в радіотехнічних пристроях.

Так, при слабкому зв'язку ( $A < 1$ ) резонансна крива буде одnogорбою і смуга пропускання становить 0,64 від смуги пропускання контурів. При  $A = 1$  зв'язок оптимальний і струм  $I_2$  досягає максимуму, а резонансна крива буде одnogорбою з резонансною частотою  $\omega_P = \omega_0$ .

При  $1 < A \leq 2,41$  резонансна крива буде двогорбою (див.рис.5.15) з боковими резонансними частотами  $\omega_{P1,2}$  і при  $A = 2,41$  смуга пропускання системи буде в 3,1 ширше смуги пропускання кожного з контурів.

При  $A > 2,41$  значення струму  $I_2$  на частоті  $\omega_0$  впаде нижче від  $0,7 I_{2MM}$ , а смуга пропускання системи розпадається на дві ділянки.

#### 5.4. ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ З ВЗАЄМОІНДУКЦІЄЮ

Можна привести багато прикладів застосування приладів з індуктивними зв'язками. Наведемо декілька з них.

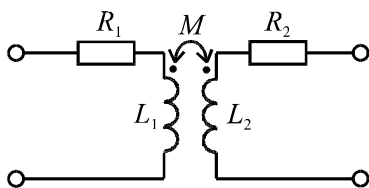


Рис. 5.16

1. Повітряний трансформатор (рис. 5.16), який не має феромагнітного осердя, використовується в вимірювальній техніці з метою виключення похибки, яку вносить феромагнітне осердя. Тобто повітряний трансформатор є лінійним елементом кола. До нього наближається трансформатор, осердя якого виготовлено з магнітодіелектрика.

2. Трансформатори з феромагнітним осердям ( $k_3 \approx 1$ ) широко застосовуються практично у всіх областях електротехніки, де основним призначенням є передача енергії з однієї обмотки в іншу обмотку магнітним полем при зміні величини напруги. Виключення

складають подільні трансформатори, які передають енергію без зміни напруги.

3. Наведення ЕРС в одному контурі (обмотці) потоком, який утворений струмом іншого контуру, лежить в основі принципу роботи всіх електричних машин.

4. В основі роботи датчиків лінійних положень лежить залежність ЕРС однієї обмотки від взаємного положення відносно іншої обмотки, яка утворює магнітний потік. До речі, по такому принципу часто будуються і датчики положення магнітної головки ЕОМ відносно доріжок диска з інформацією.

5. Резонансні коливальні контури (рис. 5.17) з взаємоіндукцією широко застосовуються в радіотехніці. Тут можна спостерігати декілька резонансів, а підбором параметрів контурів можна отримати потрібну форму резонансних кривих.

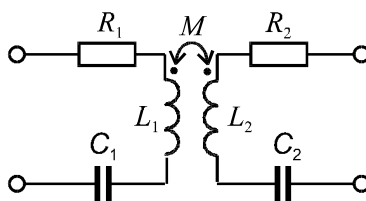


Рис. 5.17

#### КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 5

1. Взаємоіндуктивність, від чого залежить?
2. Коефіцієнт зв'язку двох контурів.
3. ЕРС та напруга взаємоіндукції.
4. Послідовне з'єднання двох індуктивно-зв'язаних котушок при узгодженому та неузгодженому включеннях. Еквівалентна індуктивність.
5. Визначення взаємоіндуктивності за дослідами узгодженого та неузгодженого включень.
6. Правила врахування в контурних рівняннях вносимої напруги взаємоіндукції.
7. Трансформатор та лінійний трансформатор. Визначення та застосування.
8. Рівняння трансформатора. Вносимі опори.
9. Визначення взаємоіндуктивності за дослідом холостого ходу трансформатора.
10. Коефіцієнт трансформації.
11. Види резонансу в зв'язаних контурах.
12. Частотні характеристики системи зв'язаних контурів.

# VI РОЗДІЛ

## НЕСИНУСОЇДАЛЬНІ ПЕРІОДИЧНІ СТРУМИ В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

### 6.1. ПРЕДСТАВЛЕННЯ НЕСИНУСОЇДАЛЬНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЧАСУ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМ РЯДОМ ФУР'Є

Несинусоїдальні струми виникають у випадках:

1. До кола підведена несинусоїдальна напруга (ЕРС). Остання може бути викликана неможливістю отримання ідеальної форми синусоїди, або продиктована вимогами принципу дії того чи іншого пристрою. Наприклад, генератор пилоподібної напруги в осцилографі (рис. 6.1).

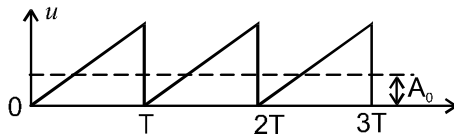


Рис. 6.1

2. До кола підведена синусоїдальна напруга, але коло містить нелінійні елементи (рис. 6.2).

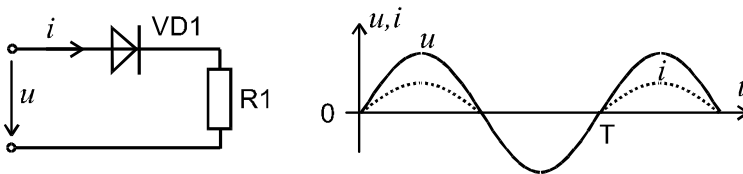


Рис. 6.2

Розглянемо як застосовувати методи розрахунку кіл постійного і синусоїдального струму в сталому режимі для аналізу таких кіл. Розглядатись буде тільки випадок несинусоїдальної напруги.

Відомо, що періодичну несинусоїдальну функцію, яка задовольняє умовам Дірихле, можна представити сукупністю синусоїдальних функцій з частотами кратними основній, тобто розкласти у тригонометричний (гармонічний) ряд Фур'є



$$f(t) = A_0 + A_{1m} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + A_{2m} \sin(2\omega_1 t + \psi_2) + \dots + A_{km} \sin(k\omega_1 t + \psi_k) + \dots = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega_1 t + \psi_k), \quad (6.1)$$

де:  $A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$  - постійна складова;  $A_{1m}$  - амплітуда;  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  -

кутова частота,  $\psi_1$  - початкова фаза першої (основної) гармоніки. Всі інші гармоніки називаються *вищими*. Частоти цих гармонік кратні основній. Тобто спектр періодичної функції *дискретний*.

Як приклад, на рис. 6.3 показано дискретний амплітудо – частотний спектр, на якому кожній частоті  $\omega_k$  відповідає амплітуда  $A_{km}$

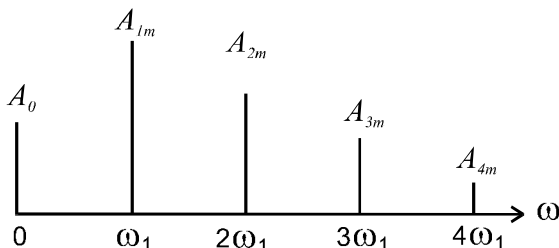


Рис. 6.3

Аналогічно можна показати фаза – частотний спектр.

Розглянемо  $k$  - ту гармоніку на комплексній площині (рис. 6.4):

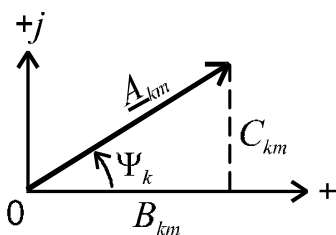


Рис. 6.4

$$\underline{A}_{km} = B_{km} + jC_{km}; \quad (6.2)$$

$$B_{km} = A_{km} \cdot \cos \psi_k; \quad (6.3)$$

$$C_{km} = A_{km} \cdot \sin \psi_k; \quad (6.4)$$

$$B_{km} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega_1 t dt; \quad (6.5)$$

$$C_{km} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega_1 t dt; \quad (6.6)$$

$$A_{km} = \sqrt{B_{km}^2 + C_{km}^2}; \quad (6.7)$$

$$\psi_k = \operatorname{arctg} \frac{C_{km}}{B_{km}}. \quad (6.8)$$

З врахуванням (6.2) ряд (6.1) можна записати:

$$f(t) = A_o + \sum_{k=1}^{\infty} (B_{km} \sin k\omega_1 t + C_{km} \cos k\omega_1 t). \quad (6.9)$$

В залежності від виду симетрії кривої  $f(t)$  в розкладанні відсутні ті чи інші складові. Наприклад, для кривої рис. 6.5 відсутні постійна складова, всі косинусоїди та парні синусоїди.

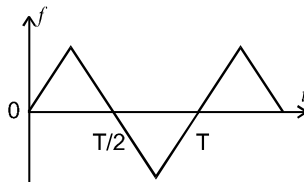


Рис. 6.5

$$f(t) = A_{1m} \sin \omega_1 t + A_{3m} \sin 3\omega_1 t + \dots$$

## 6.2. ДІЮЧЕ ТА СЕРЕДНІ ЗНАЧЕННЯ НЕСИНУСОЇДАЛЬНОЇ ПЕРІОДИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Діюче значення будь якої періодичної функції (рис. 6.6) визначається як середньоквадратичне за період:

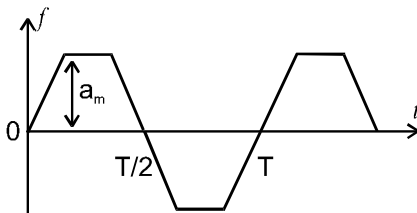


Рис. 6.6

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left( A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega_1 t + \psi_k) \right)^2 dt}.$$

Маємо інтеграли виду:

$$\frac{1}{T} \int_0^T A_0^2 dt = A_0^2 - \text{квадрат постійної складової};$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T A_{km}^2 \sin^2(k\omega_1 t + \psi_k) dt = \frac{A_{km}^2}{2} = A_k^2 \quad - \text{квадрат діючого значення}$$

$k$  - тої гармоніки.

Всі інші інтеграли містять добуток гармонік різних частот і дорівнюють нулю (підінтегральна функція симетрична по площі відносно осі  $t$ ). Це інтеграли:

$$\frac{1}{T} \int_0^T 2A_o \cdot A_{km} \sin(k\omega_1 t + \psi_k) dt = 0;$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T 2A_{km} \sin(k\omega_1 t + \psi_k) \cdot A_{pm} \sin(p\omega_1 t + \psi_p) dt = 0.$$

Таким чином, діюче значення несинусоїдальної періодичної функції буде

$$A = \sqrt{A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \dots} = \sqrt{A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2}. \quad (6.10)$$

Наприклад,

$$i = 5 - 7,05 \sin(314t - 30^\circ) + 1,41 \sin(628t + 45^\circ) \text{ A};$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2} = \sqrt{5^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{51} \text{ A};$$

$$\text{де: } I_0 = 5 \text{ A}; \quad I_1 = \frac{I_{1m}}{\sqrt{2}} = \frac{7,05}{1,41} = 5 \text{ A}; \quad I_2 = \frac{I_{2m}}{\sqrt{2}} = \frac{1,41}{1,41} = 1 \text{ A}.$$

Середні значення:

1. Просто середнє за період або постійна складова

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (6.11)$$

2. Середнє за модулем

$$A_{CP} = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt. \quad (6.12)$$

### 6.3. КОЕФІЦІЄНТИ, ЯКІ ХАРАКТЕРИЗУЮТЬ НЕСИНУСОЇДАЛЬНУ КРИВУ

1. Коефіцієнт форми

$$K_{\phi} = \frac{A}{A_{CP}}. \quad (6.13)$$

Для синусоїди  $K_{\phi} = 1,11$ .

2. Коефіцієнт амплітуди

$$K_a = \frac{a_m}{A}, \quad (6.14)$$

де  $a_m$  - найбільше значення функції  $f(t)$  на протязі періоду.

Для синусоїди  $K_a = \sqrt{2}$ .

3. Коефіцієнт спотворювання

$$K_{СП} = \frac{A_1}{A}. \quad (6.15)$$

Для синусоїди  $K_{СП} = 1$ .

4. Коефіцієнт гармонік

$$K_G = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + \dots}}{A_1} \cdot 100\%. \quad (6.16)$$

Для промислової мережі  $K_G < 5\%$ .

Коефіцієнти  $k_{\phi}$ ,  $k_{СП}$ ,  $k_a$  дозволяють судити наскільки форма реальної кривої відрізняється від синусоїди.

### 6.4. АНАЛІЗ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА З НЕСИНУСОЇДАЛЬНИМИ ПЕРІОДИЧНИМИ ЕРС МЕТОДОМ НАКЛАДАННЯ

Метод накладання базується на принципі накладання, який є однією із основних властивостей лінійної системи будь-якої фізичної природи. Для електричного кола він формулюється таким чином: струм будь-якої вітки електричного кола дорівнює алгебраїчній сумі часткових струмів, обумовлених кожним джерелом окремо. Стосовно до електричного кола при дії несинусоїдальної ЕРС послідовність розрахунків буде така:

1. Несинусоїдальна періодична ЕРС (напряга) за допомогою

ряду Фур'є замінюється сумою гармонік, тобто сумою ЕРС. Для більшості кривих  $e(t)$  можна використовувати табличні розкладання.

2. Виконується розрахунок кола для кожної гармоніки напруги або ЕРС. Інші гармоніки вважаються при цьому відсутніми.

Особливості розгляду окремих гармонік:

2.1. Якщо  $E_0 \neq 0$ , то розрахунки ведуть з врахування  $E_0$  та активних опорів ( $X_L = \omega L = 0$  - тобто індуктивність  $L$  заміняємо перемичкою;  $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{0 \cdot C} = \infty$  - конденсатор  $C$  - розривом).

2.2. Для інших складових (синусоїд) розрахунки ведуть, як правило, в комплексній формі. Основна особливість при переході до наступної гармоніки:

$$X_{L(k)} = k \cdot \omega_1 L = k \cdot X_{L(1)}; \quad (6.17)$$

$$X_{C(k)} = \frac{1}{k\omega_1 C} = \frac{X_{C(1)}}{k}, \quad (6.18)$$

де:  $X_{L(1)}$ ,  $X_{C(1)}$  – індуктивний та ємнісний опори для першої гармоніки.

Теоретично в розкладанні присутні гармоніки від  $k=1$  до  $k=\infty$ , але на практиці розрахунки ведуть тільки для декількох перших членів ряду Фур'є, так як амплітуди вищих гармонік швидко зменшується з ростом номера гармоніки.

3. Заключним етапом є отримання результату.

Результат може бути отриманий у вигляді:

1. Діючого значення струму чи напруги:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots}; \quad U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots}$$

2. Миттєвого значення

$$i = i_0 + i_1 + i_2 + \dots = I_0 + I_{1m} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + I_{2m} \sin(2\omega_1 t + \psi_2) + \dots$$

*Приклад 6.1.* Для схеми рис. 6.7 задані параметри елементів:

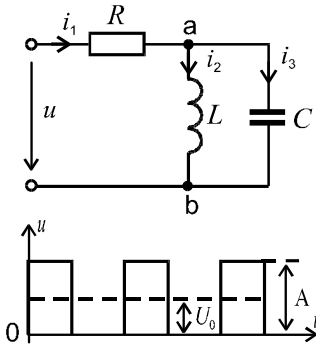


Рис. 6.7

$$R = 20 \text{ Ом},$$

$$L = 10 \text{ мГн},$$

$$C = 33 \text{ мкФ},$$

та параметри сигналу:

$$A = 125,6 \text{ В},$$

$$\omega_1 = 10^3 \text{ с}^{-1}$$

Визначити діючі та миттєві значення струмів  $I_1, I_3, i_1, i_3$ .

### Розв'язок

1. Запишемо  $u(t)$  у вигляді ряду Фур'є, використовуючи табличне розкладання:

$$u(t) = U_0 + \frac{4 \cdot a_m}{\pi} \left( \sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t + \dots \right) =$$

$$= 62,8 + 80 \left( \sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t + \dots \right),$$

де:  $U_0 = 62,8 \text{ В}$ ;  $U_{1m} = 80 \text{ В}$ ;  $U_{3m} = \frac{80}{3} \text{ В}$ ;  $U_{5m} = \frac{80}{5} \text{ В}$ .

2. Виконуємо розрахунки для кожної гармоніки окремо:

2.1. Розрахунки для частоти  $\omega = \omega_0 = 0$ :

$$I_{1(0)} = I_{2(0)} = \frac{U_0}{R} = \frac{62,8}{20} = 3,14 \text{ А}; \quad I_{3(0)} = 0.$$

2.2. Розрахунки для частоти  $\omega = \omega_1 = 10^3 \text{ с}^{-1}$ :

$$X_{L(1)} = \omega_1 L = 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 10 \text{ Ом};$$

$$X_{C(1)} = \frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{10^3 \cdot 33 \cdot 10^{-6}} = 30 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{(1)} = R + \underline{Z}_{ac(1)} = R + \frac{jX_{L(1)} \cdot (-jX_{C(1)})}{jX_{L(1)} - jX_{C(1)}} =$$

$$= 20 + \frac{-j30 \cdot (j10)}{-j30 + j10} = 20 + j15 = 25 \angle 37^0 \text{ Ом};$$

$$\underline{I}_{1(1)} = \frac{\underline{U}_{(1)}}{\underline{Z}_{(1)}} = \frac{80}{\sqrt{2} \cdot 25 \angle 37^0} = 2,27 \angle -37^0 \text{ А};$$

$$\underline{U}_{ab(1)} = \underline{I}_{1(1)} \cdot \underline{Z}_{ab(1)} = 2,27 \angle -37^0 \cdot 15 \angle 90^0 = 34 \angle 53^0 \text{ В};$$

$$\underline{I}_{3(1)} = \frac{\underline{U}_{ab(1)}}{\underline{Z}_{C(1)}} = \frac{34 \angle 53^0}{30 \angle -90^0} = 1,14 \angle 143^0 \text{ А}.$$

2.3. Розрахунки для частоти  $\omega = \omega_3 = 3\omega_1$ :

$$X_{L(3)} = 3X_{L(1)} = 3 \cdot 10 = 30 \text{ Ом};$$

$$X_{C(3)} = \frac{X_{C(1)}}{3} = \frac{30}{3} = 10 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{(3)} = R + \underline{Z}_{ab(3)} = 20 + \frac{j30(-j10)}{j20} = 20 - j15 = 25 \angle -37^0 \text{ Ом};$$

$$\underline{I}_{1(3)} = \frac{\underline{U}_{(3)}}{\underline{Z}_{(3)}} = \frac{80}{\sqrt{2} \cdot 3 \cdot 25 \angle -37^0} = 0,76 \angle 37^0 \text{ А};$$

$$\underline{U}_{ab(3)} = \underline{I}_{1(3)} \cdot \underline{Z}_{ab(3)} = 0,76 \angle 37^0 \cdot 15 \angle -90^0 = 11,4 \angle -53^0 \text{ В};$$

$$\underline{I}_{3(3)} = \frac{\underline{U}_{ab(3)}}{\underline{Z}_{c(3)}} = \frac{11,4 \angle -53^0}{10 \angle -90^0} = 1,14 \angle +37^0 \text{ А}.$$

2.4. Розрахунки для частоти  $\omega = \omega_5 = 5\omega_1$ :

$$X_{L(5)} = 5X_{L(1)} = 50 \text{ Ом}; \quad X_{C(5)} = \frac{X_{C(1)}}{5} = 6 \text{ Ом};$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{(5)} &= R + \underline{Z}_{ab(5)} = 20 + \frac{j50(-j6)}{j44} = \\ &= 20 - j6,8 = 21,1 \angle -19^0 \text{ Ом}; \end{aligned}$$

$$\underline{I}_{1(5)} = \frac{\underline{U}_{(5)}}{\underline{Z}_{(5)}} = \frac{80}{\sqrt{2} \cdot 5 \cdot 21,1 \angle -19^0} = 0,54 \angle 19^0 \text{ А};$$

$$\underline{U}_{ab(5)} = 0,54 \angle 19^\circ \cdot 6,8 \angle -90^\circ = 3,7 \angle -71^\circ \text{ В};$$

$$\underline{I}_{C(5)} = \frac{3,7 \angle -71^\circ}{6 \angle -90^\circ} = 0,6 \angle 19^\circ \text{ А.}$$

3. Результат.

Діючі значення:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sqrt{I_{1(0)}^2 + I_{1(1)}^2 + I_{1(3)}^2 + I_{1(5)}^2} = \\ &= \sqrt{3,14^2 + 2,27^2 + 0,76^2 + 0,54^2} = 4\text{А}; \end{aligned}$$

$$I_3 = \sqrt{I_{3(1)}^2 + I_{3(3)}^2 + I_{3(5)}^2} = \sqrt{1,14^2 + 1,14^2 + 0,6^2} = 1,72 \text{ А.}$$

Миттєві значення:

$$\begin{aligned} i_1 &= 3,14 + 2,27\sqrt{2} \sin(\omega_1 t - 37^\circ) + 1,14\sqrt{2} \sin(3\omega_1 t + 37^\circ) + \\ &+ 0,54\sqrt{2} \sin(5\omega_1 t + 19^\circ) \text{ А.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_3 &= 1,14 \cdot \sqrt{2} \sin(\omega_1 t + 114^\circ) + 1,14 \sin(3\omega_1 t + 37^\circ) + \\ &+ 0,6 \cdot \sqrt{2} \sin(5\omega_1 t + 19^\circ) \text{ А.} \end{aligned}$$

### 6.5. ПОТУЖНОСТІ КОЛА НЕСИНУСОЇДАЛЬНОГО СТРУМУ

Активна потужність є арифметичною сумою складових

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} P_k = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k. \quad (6.19)$$

Реактивна потужність є алгебраїчною сумою складових

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k. \quad (6.20)$$

Повна потужність

$$S = UI = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}. \quad (6.21)$$

*Примітка:*  $S \neq \sqrt{P^2 + Q^2}$  через неоднаковість форм кривих струму та напруги (однакова форма тільки в колах з чисто активним опором та в колах з синусоїдною напругою)



## 6.6. ВПЛИВ ПАРАМЕТРІВ КОЛА НА ФОРМУ КРИВИХ СТРУМУ ТА НАПРУГИ

1. На активному опорі  $u_R = Ri$ , а множення на  $R$  форму не змінює;

2. На індуктивному опорі, 
$$\frac{I_k}{I_1} = \frac{U_k / X_{Lk}}{U_1 / X_{L1}} = \frac{1}{k} \cdot \frac{U_k}{U_1},$$

тобто  $k$ -та гармоніка струму виражена в  $k$ -разів слабкіше в кривій струму, ніж  $k$ -та гармоніка напруги. Значить, крива струму більш наближена до синусоїди.

3. Аналогічний аналіз для ємності показує, що 
$$\frac{I_k}{I_1} = k \cdot \frac{U_k}{U_1},$$

тобто крива струму більш несинусоїдальна ніж крива напруги. Властивість  $L$  та  $C$  змінювати форми кривих  $u, i$  застосовується в фільтрах.

### КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 6

1. Дві форми тригонометричного ряду Фур'є.
2. Спектр періодичної функції.
3. Діюче значення несинусоїдального періодичного струму.
4. Коефіцієнти, які характеризують форму несинусоїдальних періодичних струмів і напруг.
5. Методика розрахунку кіл при несинусоїдальних періодичних ЕРС.
6. Перерахунок індуктивних та ємнісних опорів для вищих гармонік порівняно з першою.
7. Потужності кола при несинусоїдальних періодичних струмах та напругах.

# VII РОЗДІЛ

## ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ. КЛАСИЧНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ

### 7.1. ВИНИКНЕННЯ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ. ЗАКОНИ КОМУТАЦІЇ

В усталеному режимі струми та напруги усіх віток лінійного електричного кола змінюються за тим же законом, що і ЕРС (наприклад за періодичним законом або зберігають незмінні значення). Зміна топології кола, а також параметрів елементів приводить до зміни режиму роботи.

Будь яка стрибкоподібна зміна кола, яка порушує усталений режим називається *комутацією*. *Перехідним процесом* називається процес переходу від одного усталеного режиму до другого.

Вважається, що комутація здійснюється миттєво, тобто  $\Delta t_{\text{ком}} = 0$ . Через  $t = 0_-$  позначається момент часу, який безпосередньо передує комутації, а через  $t = 0_+$  - момент часу, який настає зразу ж після комутації. Аналогічно позначаються і значення функцій до та після комутації.

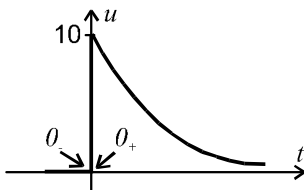


Рис. 7.1

$$u(0_-) = 0 ;$$

$$u(0_+) = 10 \text{ В} .$$

Перехід від одного усталеного режиму (вимушеного, примусового) до іншого не може відбуватись миттєво, стрибком. Це пояснюється тим, що кожному сталому стану відповідає певне значення енергії, яка накопичилась в електричному та магнітному полях:

$$W_E = \frac{Cu_C^2}{2} ; \quad W_M = \frac{Li_L^2}{2} .$$

Якщо допустити, що  $u_C$  та  $i_L$  змінюються стрибкоподібно, значить  $W_E$  і  $W_M$  також повинні змінюватись стрибкоподібно, а це означає, що  $p = \frac{dW}{dt} \rightarrow \infty$ , тобто для забезпечення протікання миттєвого перехідного процесу потрібно джерело нескінченної потужності, якого в природі не існує. Тому сумарна енергія, яка накопичилась в колі може змінюватись тільки плавно. Це означає, що тільки плавно можуть змінюватись напруга на конденсаторі та струм в індуктивності.

### *Перший закон комутації*

В початковий момент часу після комутації струм індуктивності зберігає теж значення, що було безпосередньо перед комутацією, а потім плавно змінюється:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-). \quad (7.1)$$

### *Другий закон комутації*

В початковий момент часу після комутації напруга на ємності зберігає теж значення, що було безпосередньо перед комутацією, а потім плавно змінюється:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-). \quad (7.2)$$

Закони комутації не накладають обмежень на характер зміни струмів ємностей, напруг на індуктивностях та струмів або напруг активних опорів.

Завдання аналізу перехідних процесів полягає у визначенні законів зміни миттєвих значень струмів та напруг після комутації. Це потребує розв'язку диференціальних рівнянь. Для визначення постійних інтегрування використовуються початкові умови, які можуть бути *незалежними* (НПУ) та *залежними* (ЗПУ).

Значення струмів *незалежно ввімкнутих* індуктивностей і напруг ємностей представляють собою НПУ. Для знаходження НПУ потрібно розрахувати коло до комутації, знайти закони зміни в часі струмів в котушках та напруг на конденсаторах і покласти  $t = 0$ .

Значення струмів і напруг, які не визначаються законами комутації, а також значення похідних від усіх струмів та напруг при  $t = 0$  називаються ЗПУ. Для знаходження ЗПУ використовують рівняння Кірхгофа для кола після комутації при  $t = 0_+$ .

## 7.2. КЛАСИЧНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

Метод базується на класичному методі розв'язку диференціального рівняння отриманого з системи рівнянь електричної рівноваги кола відносно однієї змінної. Наприклад, для схеми рис. 7.2 маємо

$$u_R + u_L + u_C = e \text{ або } Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = e.$$

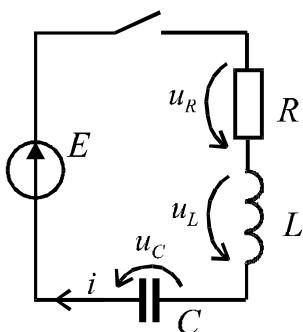


Рис. 7.2

Після диференціювання останнього рівняння отримаємо неоднорідне диференціальне рівняння відносно струму:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{de}{dt}. \quad (7.3)$$

Як відомо, повний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами дорівнює сумі часткового розв'язку неоднорідного рівняння (7.3) та загального розв'язку однорідного диференціального рівняння (7.4)

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0. \quad (7.4)$$

*Частковий розв'язок* рівняння (7.3) визначає примусовий (вимушений) режим роботи кола, який задається незалежними джерелами енергії. Примусовий режим є усталеним режимом роботи кола після комутації.

Для визначення примусової складової використовуються відомі методи аналізу лінійних електричних кіл в усталених режимах. Наприклад, якщо до кола приєднується джерело постійної ЕРС, то для схеми (рис. 7.2.)  $i_{II} = 0$ , а якщо  $e = E_m \sin \omega t$ , то

$$i_{II} = I_m \sin(\omega t - \varphi), \quad (7.5)$$

$$\text{де: } I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}; \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \quad (7.6)$$

Розв'язок рівняння (7.4) описує вільні процеси в колі після комутації, які обумовлені різницею енергій усталених режимів роботи кола до і після комутації (вільними їх називають тому, що в однорідному рівнянні відсутня складова, яка враховує зовнішні джерела). Різниця енергій має кінцеве значення, тому вільні процеси в реальних колах з часом згасають, а їх характер визначається параметрами пасивних елементів, а також топологією кола після комутації.

Вільна складова в загальному випадку по Ейлеру має вид

$$i_B = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (7.7)$$

де:  $p_1, p_2$  - корені характеристичного рівняння

$$Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} = 0. \quad (7.8)$$

Кількість коренів  $p_K$  і сталих  $A_K$  визначається порядком диференціального рівняння. Сталі інтегрування визначаються виходячи з початкових умов.

Таким чином, відносно струму *повний розв'язок* має вид:

$$i = i_B + i_{II}. \quad (7.9)$$

#### Загальна схема використання класичного методу

1. Аналіз кола до комутації з метою визначення НПУ:  $u_C(0)$ ,  $i_L(0)$ .
2. Складання рівнянь рівноваги кола після комутації та одержання диференціального рівняння відносно однієї змінної.
3. Аналіз усталеного режиму в колі після комутації ( $t = \infty$ ) і визначення примусової складової реакції кола (частковий розв'язок диференціального рівняння).
4. Визначення вільної складової реакції кола в загальному вигляді. На цьому етапі знаходять корені характеристичного рівняння і з врахуванням цього записують в загальному вигляді вільну складову.
5. Записують в загальному вигляді реакцію кола

$$i = i_{II} + i_B = i_{II} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \quad (7.10)$$

6. Визначають сталі інтегрування. Для цього використовують НПУ, а якщо потрібно, то знаходять ЗПУ.
7. Записують кінцевий результат.

*Примітка.* Представлення перехідного струму у вигляді

суми примусової (яка начебто існує зразу, з  $t = 0_+$ ) та вільної (яка існує тільки у перехідному процесі) складових є математичний прийом розв'язку дифрівнянь. В дійсності існує один перехідний струм, який математично описується виразом (7.10). Слід підкреслити, що для перехідних струмів та напруг, незалежно від зовнішньої дії, слід використовувати загальне рівняння зв'язку між ними:

$$u_R = Ri; \quad u_L = L \frac{di}{dt}; \quad i_C = \frac{du_C}{dt}.$$

### 7.3. ПРИКЛАДИ АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ПОСЛІДОВНИХ КОЛАХ 1<sup>ГО</sup> ПОРЯДКУ

#### Підключення $RC$ кола до постійної ЕРС

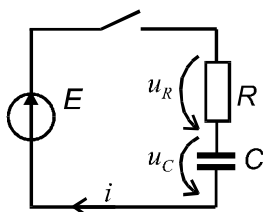


Рис. 7.3

Виконаємо аналіз перехідного процесу для схеми рис. 7.3 згідно методики параграфу 7.2:

1. Незалежні початкові умови:  
 $u_C(0) = 0$ .
2. Складаємо диференціальне рівняння кола після комутації:

$$u_R + u_C = E;$$

$$u_R = Ri;$$

$$i = i_C = C \frac{du_C}{dt}.$$

Після підстановки отримаємо неоднорідне диференціальне рівняння

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E.$$

3. Примусова складова напруги  $u_{Cп} = E$ .

4. Вільна складова напруги  $u_{Cв} = Ae^{pt}$ , де  $p = -\frac{1}{RC}$  - корінь характеристичного рівняння  $RCp + 1 = 0$ .

5. Повний розв'язок  $u_C = u_{Cп} + u_{Cв} = E + Ae^{-t/RC}$ .

6. Записуємо рівняння П.5. при  $t = 0$

$$0 = E + A \Rightarrow A = -E .$$

7. Остаточоно  $u_C = E - Ee^{-t/RC} = E - Ee^{-t/\tau}$ . Графік зміни напруги наведений на рис. 7.4 а. Розв'язок для струму знаходимо з формули

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C(-E)\left(\frac{-1}{RC}\right) \cdot e^{-t/RC} \Rightarrow i = \frac{E}{R} e^{-t/\tau} ,$$

де  $\tau = RC$  - постійна часу. За час  $t = \tau$  вільна складова зменшиться в  $e$  раз.

При збільшенні ємності постійна часу  $\tau$  збільшиться і тривалість перехідного процесу також збільшується. З точки зору фізики це пояснюється тим, що збільшується різниця енергій електричного поля конденсатора в сталих режимах до і після комутації. При збільшенні  $R$  тривалість перехідного процесу також збільшується у зв'язку з тим, що зменшується струм заряду конденсатора.

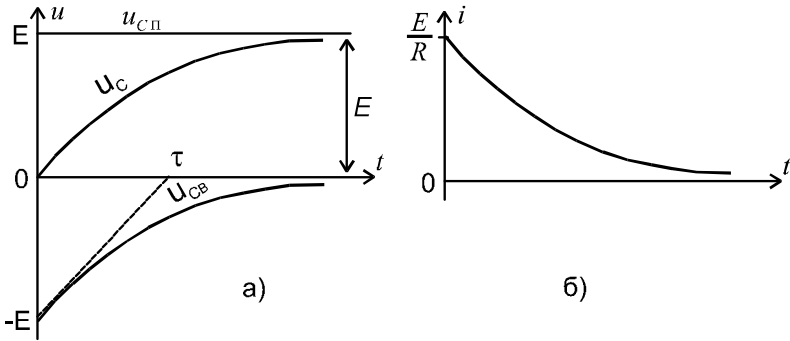


Рис. 7.4

Теоретично перехідний процес завершиться при  $t = \infty$ , але на практиці тривалість перехідного процесу оцінюється в  $(4 \dots 5)\tau$ .

Так при  $t = 5\tau$  вільна складова зменшиться в  $e^5 \approx 148$  разів і вважається, що наступив усталений режим.

### Підключення $RL$ кола до постійної ЕРС

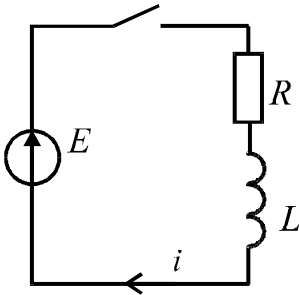


Рис. 7.5

Застосуємо методику параграфу 7.2 для схеми рис. 7.5.

1. Незалежні початкові умови:  $i_L(0) = 0$ .

2. Отримаємо диференціальне рівняння кола після комутації відносно струму

$$u_R + u_L = E ;$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E .$$

3. Примусова складова струму  $i_{II} = \frac{E}{R}$ .

4. Вільна складова струму  $i_B = Ae^{pt}$ , де  $p = -\frac{R}{L}$  - корінь характеристичного рівняння  $Lp + R = 0$ .

5. Повний розв'язок  $i = i_{II} + i_B = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$ .

6. Запишемо рівняння П.5. при  $t = 0$

$$0 = \frac{E}{R} + A \Rightarrow A = -\frac{E}{R} .$$

7. Перехідний струм  $i = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$ . Графік  $i(t)$  приведений на рис. 7.6 а.

Розв'язок для напруги:  $u_L = L \frac{di}{dt} = E e^{-\frac{R}{L}t} = E e^{-t/\tau}$  (містить

тільки вільну складову (рис. 7.6 б)), де  $\tau = \frac{L}{R}$  - постійна часу.

Бачимо, що як і для ємності, постійна часу пропорційна параметру реактивного елемента, якому, в свою чергу, пропорційна енергія магнітного поля котушки. Але для  $RL$  кола збільшення опору  $R$  зменшує постійну часу  $\tau$ , а, значить, і тривалість перехідного



процесу. Це пояснюється тим, що при збільшенні опору  $R$  зменшується струм сталого режиму після комутації і енергія поля, яка пропорційна квадрату струму. Тобто зменшується різниця запасу енергій сталих режимів до і після комутації.

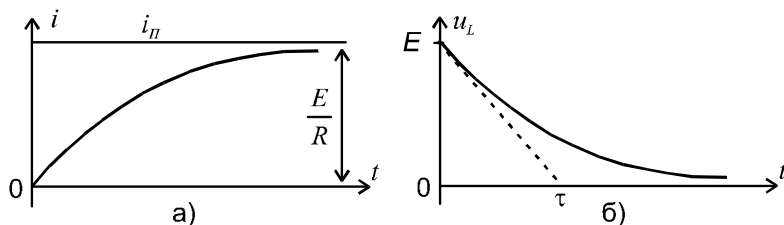


Рис. 7.6

З виразу  $u_L(t)$  виходить, що в перший момент після комутації ( $t = 0_+$ ) напруга на індуктивності рівна ЕРС. Це видно також і з закону Кірхгофа:

$$u_L(0) = E - u_R(0) = E - i_R(0) \cdot R = E.$$

Після завершення перехідного процесу  $i = i_{\pi} = U/R = \text{const}$ , і напруга  $u_L = 0$ , що підтверджує відомий нам раніше висновок: індуктивність не створює опору постійному струмові.

### Підключення $RL$ кола до синусоїдальної ЕРС $e = E_m \sin(\omega t + \psi)$

Виконаємо аналіз перехідного процесу для схеми рис. 7.7 згідно методики параграфу 7.2:

1. Незалежні початкові умови:  $i_L(0) = 0$ .
2. Складаємо диференціальне рівняння кола після комутації відносно струму

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E_m \sin(\omega t + \psi).$$

3. Примусова складова струму

$$i_{\pi} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi), \text{ де: } I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}; \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}.$$

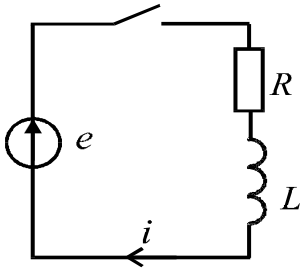


Рис. 7.7

4. Вільна складова струму  $i_B = Ae^{pt}$ , де  $p = -\frac{R}{L}$  - корінь характеристичного рівняння  $Lp + R = 0$ .

Як бачимо, характеристичне рівняння таке ж, що і в попередньому прикладі, що і повинно бути, оскільки однорідне дифференціальне рівняння не містить складової, обумовленої зовнішньою ЕРС.

5. Повний розв'язок  $i = i_{II} + i_B = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$ .

6. Записуємо рівняння П.5. при  $t = 0$

$$0 = I_m \sin(\psi - \varphi) + A \Rightarrow A = -I_m \sin(\psi - \varphi).$$

7. Остаточно  $i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \sin(\psi - \varphi)e^{-\frac{R}{L}t}$ .

Часткові випадки:

1.  $\psi - \varphi = 0$ :  $i = I_m \sin \omega t$ , тобто одразу настає примусовий режим.

2.  $\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$ :  $i = I_m \cos \omega t - I_m e^{-\frac{R}{L}t}$ .

Якщо постійна часу  $\tau = \frac{L}{R}$  значно більша періоду змінної ЕРС

$T$ , то графік має вид:

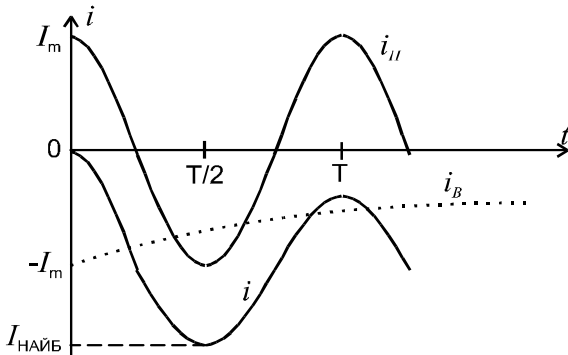


Рис. 7.8

При  $t = T/2$  струм  $i \approx 2I_m$ . Це найбільше можливе значення перехідного струму, яке може спостерігатись в такому колі.

#### 7.4. ОСОБЛИВОСТІ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В КОЛАХ 2<sup>ГО</sup> ПОРЯДКУ

Розглянемо ці особливості на прикладі підключення послідовного  $RLC$  кола (рис 7.9) до постійної ЕРС.

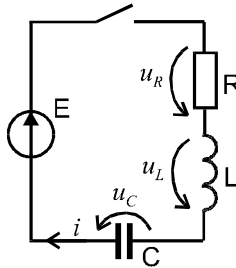


Рис. 7.9

1. Незалежні початкові умови:

$$i_L(0) = 0, u_C(0) = 0. \quad (7.11)$$

2. Складаємо диференціальне рівняння відносно напруги  $u_C$ :

$$u_R + u_L + u_C = E;$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_C = E.$$

З урахуванням того, що:

$$i = i_C = C \frac{du_C}{dt}, \quad (7.12)$$

$$\text{отримаємо: } LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E. \quad (7.13)$$

Рівняння (7.13) - неоднорідне диференціальне рівняння.

3. Примусова складова напруги  $u_{Cп} = E$ .

$$4. \text{ Вільна складова напруги } u_{Cв} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (7.14)$$

де  $p_1, p_2$  - корні характеристичного рівняння

$$LCp^2 + RCp + 1 = 0; \quad (7.15)$$

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad (7.16)$$

де: 
$$\delta = \frac{R}{2L}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (7.17)$$

5. Повний розв'язок:  $u_C = E + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (7.18)$

6. Записуємо рівняння П.5. при  $t = 0$

$$0 = E + A_1 + A_2. \quad (7.19)$$

Для визначення постійних  $A_1$  та  $A_2$  не вистачає ще одного рівняння, в якості якого використаємо рівняння (7.12)

$$i = i_C = C \frac{du_C}{dt} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}. \quad (7.20)$$

Тепер при  $t = 0$ :  $0 = p_1 A_1 + p_2 A_2. \quad (7.21)$

Розв'язуючи сумісно (7.19) та (7.21), отримаємо:

$$A_1 = \frac{p_2 E}{p_1 - p_2}; \quad A_2 = -\frac{p_1 E}{p_1 - p_2}. \quad (7.22)$$

*Часткові випадки:*

1.  $\delta > \omega_0 \Rightarrow p_1$  та  $p_2$  дійсні та від'ємні, причому  $|p_1| < |p_2|$ .

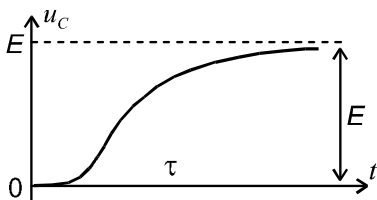


Рис. 7.10

Вільна складова описується сумою двох згасаючих експонент, а напруга  $u_C$  плавно наближається до величини  $E$  і графік  $u_C(t)$  має вид, який показано на рис. 7.10.

Струм  $i$  буде весь час позитивним. Це можна встановити з виразу:

$$i_C = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t} = \frac{p_1 p_2 E}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}), \quad (7.23)$$

з врахуванням сказаного про  $p_1$  та  $p_2$ . Такий однополярний заряд конденсатора має назву аперіодичного.

2.  $\delta < \omega_0 \Rightarrow p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm j\omega_B$ , тобто корені будуть комплексними спряженими.

Підставивши ці корені в (7.18), з врахуванням (7.22), отримаємо

$$\begin{aligned} u_C &= E + \frac{E}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) = \\ &= E + \frac{E}{2j\omega_B} [(-\delta - j\omega_B) e^{-\delta t} e^{j\omega_B t} - (-\delta + j\omega_B) e^{-\delta t} e^{j\omega_B t}] = \\ &= E + \frac{E}{\omega_B} e^{-\delta t} (\delta \cdot \sin \omega_B t + \omega_B \cdot \cos \omega_B t) = \\ &= E - E \frac{\sqrt{\delta^2 + \omega_B^2}}{\omega_B} e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_B t + \Theta) = \\ &= E - E \frac{\omega_0}{\omega_B} e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_B t + \Theta), \end{aligned} \quad (7.24)$$

де:  $\Theta = \arctg \frac{\omega_B}{\delta}$ .

Зауважимо, що до цього ж результату можна прийти, якщо шукати розв'язок однорідного дифференціального рівняння при комплексних спряжених коренях у вигляді

$$u_{CB} = A e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_B t + \Theta).$$

Таким чином, вільна складова є періодичною функцією з згадуваною амплітудою, і такий заряд має назву періодичного. Частота  $\omega_B$  характеризує частоту вільних коливань контуру. Графік  $u_C(t)$  показаний на рис. 7.11.

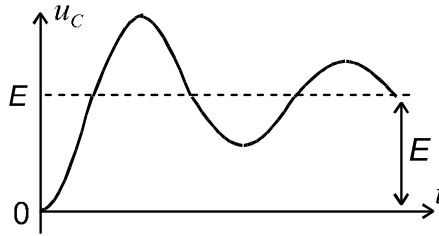


Рис. 7.11

3.  $\delta = \omega_0 \Rightarrow p_{1,2} = -\delta$  і має місце критичний випадок аперіодичного заряду.

**Висновок.** В колах 2-го порядку перехідний процес в залежності від параметрів може носити періодичний характер і при відсутності зовнішнього періодичного збудника.

#### 7.5. АНАЛІЗ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В РОЗГАЛУЖЕНИХ КОЛАХ

**Приклад 7.1.** В якості прикладу візьмемо розгалужене коло 1-го порядку (рис. 7.12) і визначимо всі струми в перехідному процесі.

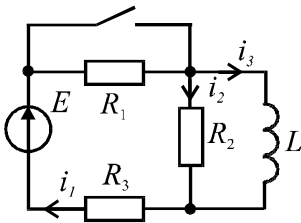


Рис. 7.12

1. Незалежні початкові умови:

$$i_L(0) = \frac{E}{R_1 + R_3}. \quad (7.25)$$

2. Для отримання диференціального рівняння запишемо рівняння Кірхгофа для кола після комутації ( $R_1$  замкнено):

$$\left. \begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0; \\ i_1 R_3 + i_2 R_2 &= E; \\ L \frac{di_3}{dt} - i_2 R_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

Розв'яжемо систему відносно  $i_3$ , для чого з 1-го рівняння отримаємо  $i_1 = i_2 + i_3$  і підставимо його в друге рівняння, звідки визна-

чимо  $i_2$  в функції  $i_3$  і підставимо в третє рівняння. Після перетворення отримаємо

$$L \frac{di_3}{dt} + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} i_3 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} E. \quad (7.27)$$

Рівняння (7.27) - неоднорідне диференціальне рівняння.

3. Примусова складова струму  $i_{3п} = \frac{E}{R_3}$ .

4. Вільна складова струму  $i_{3в} = A e^{pt}$ ,

де  $p = -\frac{R_2 R_3}{(R_2 + R_3)L}$  - корінь характеристичного рівняння

$$Lp + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 0.$$

Для спрощення запису виразів перейдемо від загального вигляду до числових значень, прийнявши:

$E = 30 \text{ В}; L = 1 \text{ Гн}; R_1 = R_2 = R_3 = 10 \text{ Ом}$ . Тоді:

$$i_3(0) = \frac{30}{20} = 1,5 \text{ А}; i_{3п} = \frac{30}{10} = 3 \text{ А}; p = -\frac{10 \cdot 10}{20 \cdot 1} = -5 \text{ с}^{-1}. \quad (7.28)$$

5. Повний розв'язок:  $i_3 = 3 + A e^{-5t}$  А.

6. Записуємо рівняння П.5. при  $t = 0$ :

$$i_3 = 3 + A \Rightarrow A = -1,5.$$

7. Результат  $i_3 = 3 - 1,5 e^{-5t}$  А.

Напряга  $u_L = L \frac{di_3}{dt} = (-1,5) \cdot (-5) e^{-5t} = 7,5 e^{-5t}$  В.

З урахуванням того, що  $u_{R2} = u_L$ , то

$$i_2 = \frac{u_L}{R_2} = \frac{7,5 e^{-5t}}{10} = 0,75 e^{-5t} \text{ А}.$$

$$i_1 = i_2 + i_3 = 0,75 e^{-5t} + 3 - 1,5 e^{-5t} = 3 - 0,75 e^{-5t} \text{ А}.$$

На прикладі розгалуженого кола 1<sup>го</sup> порядку ми побачили, що процес отримання рівняння (П.2) є громіздким. А саме диференціальне рівняння нам потрібно лиш для того, щоб по ньому записати

характеристичне рівняння і визначити корені цього рівняння. Можна довести, що характеристичне рівняння можна отримати більш простим шляхом, а саме:

1. Для схеми після комутації записуємо вираз вхідного опору кола  $Z_{вх}(p)$  відносно джерела, яке уявно ввімкнуте у будь яку вітку.

При цьому опір індуктивності враховуємо як  $pL$ , а ємності - як  $1/pC$ , подібно тому, як в символічному методі відповідні опори записувались як  $j\omega L$  та  $1/j\omega C$ .

2. Прирівнюємо отриманий опір до нуля  $Z_{вх}(p) = 0$  і отримаємо характеристичне рівняння. Проілюструємо цей шлях на прикладі розглянутих раніше кіл.

1. Послідовне  $RLC$  коло:

$$Z_{вх}(p) = pL + \frac{1}{pC} + R = \frac{p^2LC + pRC + 1}{pC} = 0.$$

Отже характеристичне рівняння  $p^2LC + pRC + 1 = 0$  співпадає з рівнянням (7.15).

2. Для розгалуженого кола (рис. 7.12) після комутації зручніше ЕРС уявно помістити в 3-ю вітку. Тоді по рис. 7.13:

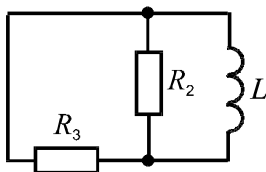


Рис. 7.13

$$Z_{вх3}(p) = pL + \frac{R_2R_3}{(R_2 + R_3)} = 0,$$

тобто отримали те саме рівняння, яке виходить з рівняння (7.27).

Зауважимо, що для електричних кіл першого порядку корінь характеристичного рівняння можна знайти також з виразів:

- для кола з індуктивністю  $p = -\frac{R_E}{L}$ ;

- для кола з ємністю  $p = -\frac{1}{R_EC}$ ,

де  $R_E$  - еквівалентний активний опір кола після комутації відносно реактивного елемента. Так в розглянутому прикладі (рис. 7.13):

$$R_E = \frac{R_2R_3}{(R_2 + R_3)}.$$



## 7.6. МЕТОДИКА АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В РОЗГАЛУЖЕНИХ КОЛАХ УНІФІКОВАНИМ КЛАСИЧНИМ МЕТОДОМ

1. Аналізом схеми до комутації визначаємо  $u_C(0)$ ,  $i_L(0)$ .
2. Визначаємо примусову складову шуканого струму (напруги)  $i_{II}$  аналізом кола після комутації.
3. Складаємо вираз  $Z_{BX}(p)$  для схеми після комутації відносно джерела, яке уявно ввімкнуте у будь яку вітку кола. З рівняння  $Z_{BX}(p) = 0$  записуємо характеристичне рівняння і знаходимо його корені  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ .

4. Записуємо вільну складову

$$i_B = \sum_{K=1}^n A_K e^{p_K t}. \quad (7.31)$$

5. Записуємо повний розв'язок

$$i = i_{II} + i_B = i_{II} + \sum_{K=1}^n A_K e^{p_K t}. \quad (7.32)$$

6. При  $t = 0$  визначаємо постійні  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ . Коли НПУ для цього недостатньо, тоді знаходять і використовують ЗПУ.

7. Записуємо кінцевий результат.

**Приклад 7.2.** Для схеми рис. 7.14 розрахувати закон зміни напруги на конденсаторі в перехідному процесі при дії постійної ЕРС, якщо задано:  $E = 50$ ;  $R_1 = R_2 = 4 \text{ Ом}$ ;  $L_1 = 0,1 \text{ Гн}$ ;  $C = 10^{-3} \text{ Ф}$ .

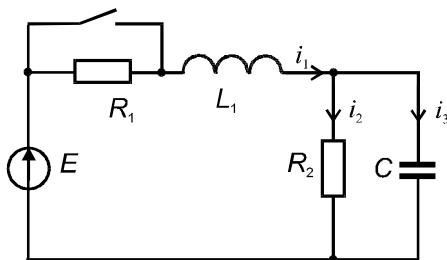


Рис.7.14

Розв'язок

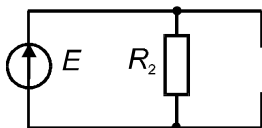
1. Знаходимо НПУ:

$$i_1(0_-) = i_2(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{50}{8} = 6,25 \text{ A};$$

$$u_C(0_-) = i_2(0_-)R = 6,25 \cdot 4 = 25 \text{ В.}$$

Отже:  $i_2(0_-) = 6,25 \text{ A}; \quad u_C(0_-) = 25 \text{ В.}$

2. Знаходимо примусову складову напруги  $u_C$  після комутації, використавши для цього заступну схему (рис. (7.15) для сталого режиму ( $t = +\infty$ ) при постійній ЕРС:



$$u_{C_{IP}} = u_{R2_{IP}} = E = 50 \text{ В.}$$

Рис. 7.15

3. Знаходимо характеристичне рівняння та його корені. Для цього складемо вираз  $Z_{BX1}(p)$  для схеми після комутації

$$Z_{BX1}(p) = pL + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{p^2 R_2 LC + pL + R_2}{pR_2 C + 1}.$$

$Z_{BX1}(p) = 0$  при  $p^2 R_2 LC + pL + R_2 = 0$ , що є характеристичним рівнянням.

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$4 \cdot 10^{-4} p^2 + 0,1p + 4 = 0, \quad \text{звідки корені: } p_1 = -50c^{-1};$$

$$p_2 = -200c^{-1}.$$

4. Повний розв'язок  $u_C = 50 + A_1 e^{-50t} + A_2 e^{-200t}$ .

5. Знаходимо постійні  $A_1$  та  $A_2$ . Для цього запишемо вираз П.4 при  $t = 0_+$ :

$$25 = 50 + A_1 + A_2, \quad \text{або } A_1 + A_2 = -25. \quad (7.32)$$

Для отримання другого рівняння, яке зв'яже постійні  $A_1$  та  $A_2$

, знайдемо похідну напруги  $u_C$ :  $\frac{du_C}{dt}(0_+) = p_1 A_1 + p_2 A_2$ .

Для схеми після комутації при  $t = 0_+$ :  $i_1(0_+) = i_2(0_+) + i_3(0_+)$ ,

звідки:  $i_3(0_+) = i_1(0_+) - i_2(0_+) = 6,25 - 6,25 = 0$ .

Це пояснюється тим, що струм  $i_1(0_+) = i_1(0_-)$  згідно 1-го закону комутації, а  $i_2(0_+) = i_2(0_-)$  тому, що напруга  $u_{R2} = u_C$  в процесі комутації також не змінюється.

Таким чином друге рівняння буде таким:

$$-50 A_1 - 200 A_2 = 0 \quad (7.33)$$

Розв'язок рівнянь (7.32) та (7.33):  $A_1 = -33,33$  В;  $A_2 = 8,33$  В.

6. Результат:  $u_C = 50 - 33,33e^{-50t} + 8,33e^{-200t}$  В. Графік  $u_C(t)$  показаний на рис. 7. 16.

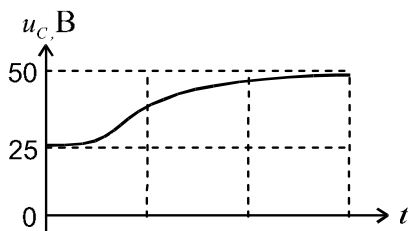


Рис. 7.16

### КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 7

1. Закони комутації.
2. Незалежні та залежні початкові умови.
3. Сутність класичного методу.
4. Підключення котушки індуктивності до постійної ЕРС: графік перехідного струму, постійна часу.
5. Підключення конденсатора до постійної ЕРС: графіки струму та напруги  $u_C$ , постійна часу.
6. Особливості перехідного процесу в колах 2-го порядку в залежності від коренів характеристичного рівняння.
7. Визначення коренів характеристичного рівняння без складання диференціального рівняння.
8. Методика аналізу перехідних процесів класичним методом.



## ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

### 8.1. СУТЬ МЕТОДУ

Класичний метод використовують в основному тоді, коли коло має невисокий порядок складності, а зовнішня дія після комутації є гармонійною функцією часу або постійною. Якщо зовнішня дія має бскладніший характер, то визначення примусової складової реакції кола суттєво ускладнюється, а при підвищенні порядку кола ускладнюється визначення сталих інтегрування.

Операторний метод, який базується на використуванні перетворень Лапласа, дає більші можливості при аналізі перехідних процесів ніж класичний метод. Подібно до методу комплексних амплітуд, операторний метод відноситься до символічних методів, в яких операції над функціями часу замінюються операціями над їх символами (зображеннями). Причому диференціальні рівняння перетворюються в алгебраїчні, котрі враховують і НПУ.

Перехід від оригіналу  $f(t)$  до його зображення  $F(p)$  здійснюється за допомогою прямого перетворення Лапласа

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (8.1)$$

Це позначається знаком відповідності  $f(t) \div F(p)$ .

Після складання і розв'язування алгебраїчних рівнянь кола відносно будь якого струму  $I(p)$  чи напруги  $U(p)$  перехід від отриманого зображення до оригіналу здійснюється за допомогою зворотного перетворення Лапласа

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p)e^{pt} dp \quad (8.2)$$

або за допомогою таблиць відповідності.

Тобто, пряме перетворення Лапласа дозволяє перейти з області змінної  $t$  в область комплексної змінної  $p$ , а зворотне – навпаки. Комплексне число  $p$  називається оператором перетворення Лапласа.

Поруч з перетворенням Лапласа використовують перетворення Карсона – Хевісайда

$$F(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

В цьому перетворенні розмірності оригіналу та зображення співпадають.

## 8.2. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ПРЯМОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

1. Зображення постійної  $f(t) = A$

$$F(p) = \int_0^{\infty} A e^{-pt} dt = \frac{A}{p}.$$

2. Зображення експоненти  $e(t) = E e^{-\alpha t}$

$$E(p) = \int_0^{\infty} E e^{-\alpha t} e^{-pt} dt = \frac{E}{p + \alpha}, \text{ тобто } E e^{-\alpha t} \div \frac{E}{p + \alpha}.$$

3. Зображення похідної.

$$\text{Якщо } f(t) \div F(p), \text{ то } f'(t) \div pF(p) - f(0).$$

При  $f(0) = 0$   $f'(t) \div pF(p)$ .

4. Зображення інтегралу

$$\text{Якщо } f(t) \div F(p), \text{ то } \int_0^t f(t) dt \div \frac{F(p)}{p}.$$

5. Множення на константу

$$\text{Якщо } f(t) \div F(p), \text{ то: } Af(t) \div AF(p).$$

6. Властивість лінійності

$$\text{Якщо } f(t) \div F(p) \text{ і } f(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t), \text{ то } F(p) = \sum_{k=1}^n F_k(p).$$

Зображення суми функцій дорівнює сумі зображень кожної функції зокрема.

### 8.3. РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРИЧНОЇ РІВНОВАГИ В ОПЕРАТОРНІЙ ФОРМІ. ОПЕРАТОРНІ ЗАСТУПНІ СХЕМИ

#### Активний опір

Перейдемо від схеми для миттєвих значень струмів та напруг (рис. 8.1 а) до операторної заступної схеми (рис. 8.1 б). Враховуючи, що множенню функції часу на постійне число відповідає множення зображення функції на теж число, для одержання компонентних рівнянь в операторній формі достатньо змінити миттєві значення струмів і напруг на їх операторні зображення:

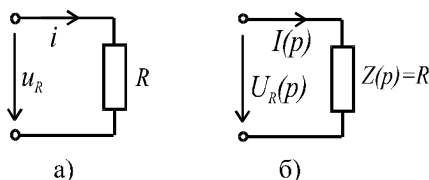


Рис. 8.1

$$u_R = iR \Rightarrow U_R(p) = R \cdot I(p);$$

$$Z_R(p) = R; \quad G(p) = \frac{1}{R}.$$

Тут  $Z_R(p)$  - відповідно операторний опір елемента, а  $G(p)$  - його операторна провідність.

#### Індуктивність.

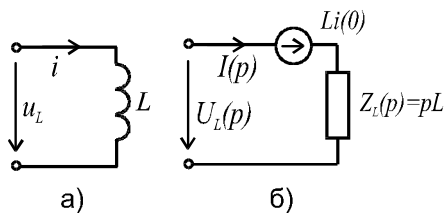


Рис. 8.2

Якщо  $i(t) \div I(p)$ , то використовуючи теорему диференціювання перейдемо від оригіналів  $u_L = L \frac{di}{dt}$  (рис. 8.2 а) до зображень (рис. 8.2 б)

$$U_L(p) = pLI(p) - Li(0) = Z_L(p) \cdot I(p) - Li(0).$$

Індуктивність на операторній схемі зображається операторним опором  $Z_L(p) = pL$  і джерелом напруги  $Li(0)$ , яке враховує запас енергії в індуктивності при ненульових НПУ. Якщо  $i(0) = 0$ , то джерело  $Li(0)$  на операторній схемі відсутнє.

**Ємність.**

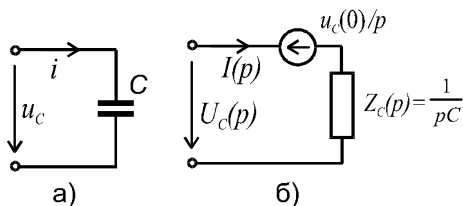


Рис. 8.3

Так, якщо  $u_c(t) \div U_c(p)$ , то рівняння  $i = C \frac{du_c}{dt}$  в операторній формі буде таким:

$$I(p) = CpU_c(p) - C \cdot u_c(0).$$

$$\begin{aligned} \text{Звідки: } U_c(p) &= \frac{u_c(0)}{p} + \frac{1}{pC} I(p) = \\ &= \frac{u_c(0)}{p} + Z_c(p) \cdot I(p). \end{aligned}$$

Цьому рівнянню відповідає операторна заступна схема, яка зображена на рис. 8.3 б. Порівняно із схемою для миттєвих значень струмів та напруг (рис. 8.3 а), ємність на операторній схемі зображається операторним опором  $Z_c(p) = \frac{1}{pC}$  і джерелом напруги

$\frac{u_c(0)}{p}$ , яке враховує запас енергії в ємності при ненульових НПУ.

**Послідовне коло  $RLC$  (рис. 8.4 а) при нульових НПУ**

Операторна заступна схема такого кола показана на рис 8.4 б.

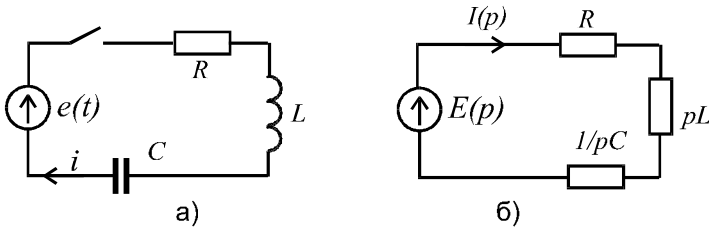


Рис. 8.4

З цієї схеми струм

$$I(p) = \frac{E(p)}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{E(p)}{Z(p)}, \quad (8.3)$$

де  $Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC}$  - операторний опір кола.

Тобто в операторній формі закон Ома має той же вигляд, що і в комплексній формі або для кола постійного струму.

Аналогічно закони Кірхгофа:

$$\sum i_k = 0 \rightarrow \sum I_k(p) = 0; \quad (8.4)$$

$$\sum u_k = \sum e_k \rightarrow \sum U_k(p) = \sum E_k(p)$$

або з врахуванням закону Ома:

$$\sum I_k(p) Z_k(p) = \sum E_k(p). \quad (8.5)$$

Внаслідок того, що зображення суми функцій часу дорівнює сумі зображень цих функцій, для переходу від рівнянь балансу миттєвих значень струмів і напруг віток до рівнянь балансу операторних зображень струмів і напруг достатньо замінити миттєві значення струмів і напруг їх операторними зображеннями.

#### 8.4. ПЕРЕХІД ВІД ОПЕРАТОРНОГО ЗОБРАЖЕННЯ ДО ОРИГІНАЛУ

Для цього можна використати формулу зворотного інтегрального перетворення Лапласа (формула 8.2) до функції  $F(p)$  безпосередньо, таблиці відповідності, але на практиці звичайно користуються формулою розкладання.

Припустимо, що операторне зображення має вигляд:



$$F(p) = \frac{M(p)}{N(p)}, \quad (8.6)$$

де  $M(p)$ ,  $N(p)$  - поліноми оператора  $p$ . Нехай ступінь  $m$  полінома чисельника менший від ступеня  $n$  полінома знаменника, а також рівняння  $N(p) = 0$  не має кратних коренів та спільних коренів з коренями рівняння  $M(p) = 0$ . Тоді дріб (8.6) можна розкласти на прості дроби (формула 8.7):

$$F(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} \dots + \frac{A_n}{p - p_n} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k}, \quad (8.7)$$

де  $p_1, \dots, p_n$  - корені  $N(p) = 0$ .

Для визначення постійних  $A_k$  помножимо обидві частини (8.7) на  $(p - p_k)$  при  $(p \rightarrow p_k)$ . Тоді отримаємо

$$A_k = \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{M(p) \cdot (p - p_k)}{N(p)} = M(p_k) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{p - p_k}{N(p)} = \frac{M(p_k)}{N'(p_k)}. \quad (8.8)$$

З врахуванням цього формула (8.7) прийме вид

$$F(p) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k} = \sum_{k=1}^n \frac{M(p_k)}{N'(p_k) \cdot (p - p_k)}. \quad (8.9)$$

Оскільки 
$$\frac{A_k}{p - p_k} \div A_k e^{p_k t}, \quad (8.10)$$

то оригінал 
$$f(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t} = \sum_{k=1}^n \frac{M(p_k)}{N'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (8.11)$$

Формула 8.11 є формулою переходу до оригіналу за теоремою розкладання.

## 8.5. МЕТОДИКА ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАТОРНОГО МЕТОДУ ДЛЯ АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

1. Визначаються незалежні початкові умови  $u_C(0)$ ,  $i_L(0)$ .
2. Складається операторна схема кола після комутації.

3. Визначається зображення шуканого струму (напруги) за законом Ома, якщо джерело (джерела) знаходяться в одній вітці, чи за методами аналізу складних кіл з системи рівнянь, якщо джерела знаходяться в декількох вітках. Шляхом перетворень шукається зображення струму (напруги) у вигляді відношення двох поліномів:

$$I(p) = \frac{M(p)}{N(p)}.$$

4. За допомогою формули розкладання знаходиться оригінал струму в такій послідовності:

4.1.  $N(p) = 0 \Rightarrow p_1, p_2, p_3, \dots, p_n.$

4.2. Знаходимо  $N'(p).$

4.3. Знаходимо  $i(t):$

$$i(t) = \sum_{k=1}^n \frac{M(p_k)}{N'(p_k)} e^{p_k t}.$$

*Примітки:*

1. Якщо серед коренів рівняння  $N(p) = 0$  є корінь  $p = 0$ , то йому відповідає постійна складова  $\frac{M(0)}{N'(0)}$  при дії джерела постійної ЕРС (струму).

2. При наявності в колі після комутації синусоїдної ЕРС серед коренів  $N(p) = 0$  будуть присутні корені  $p_{1,2} = \pm j\omega$ , а відповідна примусова складова визначається формулою:

$$f(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{M(p_k)}{N'(p_k)} e^{p_k t} = 2 \operatorname{Re} \frac{M(p_1)}{N'(p_1)} e^{p_1 t}. \quad (8.12)$$

3. При комплексних спряжених коренях  $p_{1,2} = \delta \pm j\omega$  їм відповідає розв'язок

$$f(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{M(p_k)}{N'(p_k)} e^{p_k t} = 2 \operatorname{Re} \frac{M(p_1)}{N'(p_1)} e^{p_1 t}. \quad (8.13)$$

4. Інші корені будуть дійсними, але обов'язково від'ємними.

## 8.6. ПРИКЛАДИ АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ ОПЕРАТОРНИМ МЕТОДОМ

**Приклад 8.1.** Для заданого кола першого порядку (рис 8.5) визначити перехідний струм  $i_1$  після комутації при дії постійної ЕРС  $E = 10\text{ В}$ . Параметри кола:  $R_1 = R_2 = 10\text{ Ом}$ ;  $C = 10^{-3}\text{ Ф}$ .

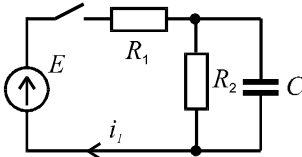


Рис. 8.5

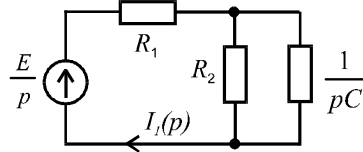


Рис. 8.6

### Розв'язок

1. Незалежні початкові умови  $u_C(0) = 0$ .
2. Операторна схема кола після комутації показана на рис. 8.6.
3. За законом Ома:

$$\begin{aligned}
 I_1(p) &= \frac{E(p)}{Z(p)} = \frac{E}{p} \cdot \frac{1}{R_1 + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}}} = \\
 &= \frac{E(R_2 Cp + 1)}{p(R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2)} = \frac{0,1p + 10}{p(0,1p + 20)} = \frac{M(p)}{N(p)}.
 \end{aligned}$$

4. Переходимо до оригіналу струму  $i_1$  за допомогою формули розкладання

$$N(p) = p(0,1p + 20) = 0 \Rightarrow p_1 = 0, p_2 = -200;$$

$$N'(p) = 0,2p + 20;$$

$$\begin{aligned}
 i_1(t) &= \sum_{k=1}^2 \frac{0,1p_k + 10}{0,2p_k + 20} e^{p_k t} = \frac{1}{2} + \frac{0,1(-200) + 10}{0,2(-200) + 20} e^{-200t} = \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-200t} \text{ А. Графік } i(t) \text{ приведено на рис. 8.7.}
 \end{aligned}$$

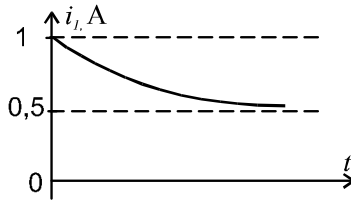


Рис. 8.7

Приклад 8.2. Для заданого кола першого порядку (рис. 8.8) визначити перехідний струм  $i_3$  після комутації при дії постійної ЕРС  $E = 30\text{В}$ . Параметри кола:  $R_1 = R_2 = R_3 = 10\text{ Ом}$ ;  $L = 1\text{Гн}$

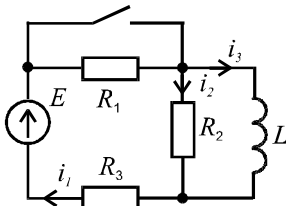


Рис. 8.8

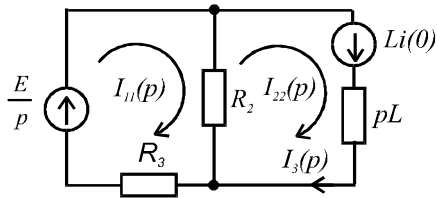


Рис. 8.9

### Розв'язок

1. Незалежні початкові умови  $i_L(0) = \frac{E}{R_1 + R_3} = \frac{30}{20} = 1,5\text{ А}$ .
2. Операторна схема кола після комутації показана на рис. 8.9.
3. За методом контурних струмів:

$$\left. \begin{aligned} I_{11}(p)(R_2 + R_3) - I_{22}(p)R_2 &= \frac{E}{p}; \\ -I_{11}(p)R_2 + I_{22}(p)(R_2 + pL) &= Li(0). \end{aligned} \right\}$$

Розв'язавши систему рівнянь відносно  $I_{22}(p)$ , після підстановки числових значень отримуємо:

$$I_{22}(p) = \frac{1,5p + 15}{p(p + 5)} = \frac{M(p)}{N(p)}.$$

4. Переходимо до оригіналу струму  $i_{22}$  за допомогою формул розкладання:

$$N(p) = p(p + 5) = 0 \Rightarrow p_1 = 0, p_2 = -5;$$

$$N'(p) = 2p + 5;$$

$$i_{22}(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{1,5p_k + 15}{2p_k + 5} e^{p_k t} = \frac{15}{5} + \frac{1,5(-5) + 15}{2(-5) + 5} e^{-5t} = 3 - 1,5e^{-5t} \text{ А.}$$

$$\text{Відповідь: } i_3 = i_{22} = 3 - 1,5e^{-5t} \text{ А.}$$

### КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 8

1. Сутність операторного методу.
2. Формула прямого інтегрального перетворення Лапласа.
3. Зображення постійної, синусоїдальної та експоненціальної ЕРС, похідної та інтегралу.
4. Операторні схеми кіл.
5. Рівняння кіл в операторній формі.
6. Перехід від зображення до оригіналу. Теорема розкладання.
7. Методика застосування операторного методу.
8. Особливості розрахунків при наявності комплексно-спряжених коренів.

# IX РОЗДІЛ

## КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 9.1. ПЕРВИННІ ПАРАМЕТРИ ТА ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ ОДНОРІДНОЇ ЛІНІЇ

В колах з зосередженими параметрами струми та напруги  $i(t)$ ,  $u(t)$  є функціями однієї змінної  $t$ . В колах з розподіленими параметрами струми та напруги є функціями двох змінних  $t$ ,  $x$ , тобто:  $i(t, x)$ ,  $u(t, x)$ . Спочатку теорія таких кіл була розроблена для ліній електропостачання та ліній зв'язку, тому кола з розподіленими параметрами ще називають довгими лініями. Якщо параметри вздовж лінії не змінюються, то вона називається однорідною.

Розглянемо елемент лінії  $dx$  (рис. 9.1):

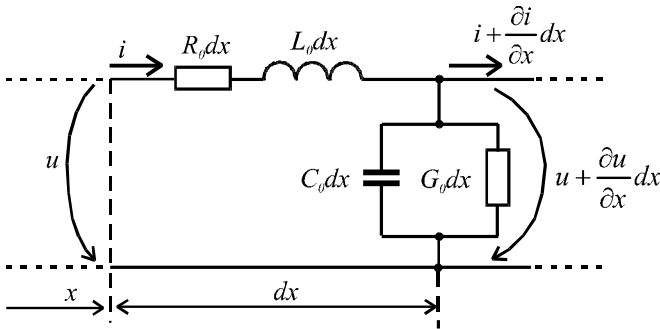


Рис. 9.1

Первинні параметри:

$R_0$  - активний опір двох дротів на одиницю довжини, Ом/м;

$L_0$  - індуктивність двох дротів на одиницю довжини, Гн/м;

$G_0$  - провідність між двома дротами на одиницю довжини, См/м;

$C_0$  - ємність між двома дротами на одиницю довжини, Ф/м.

Величини  $R_0$ ,  $L_0$  називаються повздовжніми параметрами, а  $G_0$ ,  $C_0$  - поперечними параметрами.

Зміна напруги зумовлена повздовжніми параметрами, а зміна струму – поперечними. Рівняння для спадів напруг і струмів (при нехтування величинами другого порядку малості) мають вигляд:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} dx = R_0 dx i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i}{\partial x} dx = G_0 dx u + C_0 dx \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Після скорочення на  $dx$  отримаємо рівняння довгої лінії (або телеграфні рівняння):

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (9.1)$$

## 9.2. СИНУСОЇДАЛЬНИЙ РЕЖИМ ОДНОРІДНОЇ ЛІНІЇ

Відомо, що синусоїди струму та напруги мають комплексні зображення  $i(t) \rightarrow \underline{I}$ ,  $u(t) \rightarrow \underline{U}$ . Змінна  $t$  в комплексні зображення не входить, тоді можна перейти від часткових похідних до звичайних, і рівняння (9.1) приймуть вид:

$$-\frac{d\underline{U}}{dx} = R_0 \underline{I} + j\omega L_0 \underline{I} = \underline{Z}_0 \underline{I}; \quad (9.2)$$

$$-\frac{d\underline{I}}{dx} = G_0 \underline{U} + j\omega C_0 \underline{U} = \underline{Y}_0 \underline{U}. \quad (9.3)$$

де:  $\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0$  - комплекс повздовжнього опору;

$\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0$  - комплекс поперечної провідності.

З (9.2) та (9.3) отримаємо рівняння відносно  $\underline{U}$ . Для цього

$$\text{виразимо } \underline{I} \text{ з (9.2): } \underline{I} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \frac{d\underline{U}}{dx}, \quad (9.2a)$$

та підставимо його в (9.3):

$$\frac{1}{\underline{Z}_0} \frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = \underline{Y}_0 \underline{U}, \quad \text{або: } \frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} - \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 \underline{U} = 0 \quad (9.4)$$

Рівняння (9.4) є однорідним диференціальним рівнянням, його розв'язком є

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}, \quad (9.5)$$

де:  $\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \alpha + j\beta$  – коефіцієнт розповсюдження;

$\alpha$  - коефіцієнт затухання, 1/м;  $\beta$  - коефіцієнт фази, рад/м.

Корені характеристичного рівняння  $p^2 - \underline{\gamma}^2 = 0$

$$p_1 = -\underline{\gamma}, \quad p_2 = \underline{\gamma}.$$

Рівняння (9.5) описує розподіл напруги вздовж лінії. Після його підстановки в (9.2) отримаємо рівняння для струму

$$\underline{I} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \frac{d\underline{U}}{dx} = \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_0} (\underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}), \quad (9.6)$$

$$\text{де: } \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_0} = \frac{1}{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{\gamma}}} = \frac{1}{\frac{\underline{Z}_0}{\sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}}} = \frac{1}{\underline{Z}_C};$$

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \underline{Z}_C e^{j\theta} - \text{хвильовий опір.} \quad (9.7)$$

Для більшості повітряних ліній хвильовий опір знаходиться в межах  $400 \pm 100$  Ом, а для кабельних – 50, 75, 100 (150) Ом. Параметри  $\underline{Z}_C$  та  $\underline{\gamma}$  називаються вторинними параметрами лінії.

Підставимо вираз  $\underline{Z}_C$  в (9.6):

$$\underline{I} = \frac{1}{\underline{Z}_C} (\underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}). \quad (9.8)$$

Визначимо постійні інтегрування  $\underline{A}_1$  та  $\underline{A}_2$ .

У випадку, коли відомі напруга ( $\underline{U} = \underline{U}_1$ ) та струм ( $\underline{I} = \underline{I}_1$ ) на початку лінії ( $x = 0$ ), використаємо (9.5) та (9.8):

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_1 + \underline{A}_2 \\ \underline{I}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_C} (\underline{A}_1 - \underline{A}_2) \end{aligned} \right\} \rightarrow \underline{A}_{1,2} = \frac{\underline{U}_1 \pm \underline{I}_1 \underline{Z}_C}{2}. \quad (9.9)$$

Якщо задані напруга ( $\underline{U} = \underline{U}_2$ ) та струм ( $\underline{I} = \underline{I}_2$ ) в кінці лінії,



то відлік  $x$  краще вести від кінця лінії в протилежному напрямку. Для цього в рівняннях (9.2) та (9.3) слід замінити  $x$  на  $-x$ , і рівняння (9.5) та (9.8) приймуть вид:

$$\underline{U} = \underline{A}_3 e^{\gamma x} + \underline{A}_4 e^{-\gamma x}; \quad (9.5a)$$

$$\underline{I} = \frac{1}{\underline{Z}_C} (\underline{A}_3 e^{\gamma x} - \underline{A}_4 e^{-\gamma x}). \quad (9.8a)$$

При  $x = 0$  маємо:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{A}_3 + \underline{A}_4 \\ \underline{I}_2 &= \frac{1}{\underline{Z}_C} (\underline{A}_3 - \underline{A}_4) \end{aligned} \right\} \rightarrow \underline{A}_{3,4} = \frac{\underline{U}_2 \pm \underline{I}_2 \underline{Z}_C}{2}. \quad (9.10)$$

Отже, ми отримали рівняння, що описують розподіл комплексів напруг та струмів у будь якій точці лінії.

*Примітка.* Іноді координати зворотного напрямку позначаються  $y$ , але зручніше використовувати одне позначення відстані -  $x$ , а в залежності від початкових умов (задані  $\underline{U}_1, \underline{I}_1$  чи  $\underline{U}_2, \underline{I}_2$ ) будемо бачити звідки ведеться відлік відстані.

### 9.3. БІЖУЧІ ХВИЛІ В ЛІНІЇ

Ще раз розглянемо рівняння (9.5). В ньому коефіцієнти  $\underline{A}_1$  та  $\underline{A}_2$  це суть напруги. Позначимо їх  $\underline{U}_\Pi$  та  $\underline{U}_3$  відповідно, тоді діюче значення напруги у будь якій точці лінії можна визначити з рівняння:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x} = \underline{U}_\Pi e^{-\gamma x} + \underline{U}_3 e^{\gamma x} = \\ &= \underline{U}_\Pi e^{j\Psi_\Pi} \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-\beta x} + \underline{U}_3 e^{j\Psi_3} \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{\beta x}, \end{aligned} \quad (9.11)$$

а миттєве значення цієї напруги

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{2} \underline{U}_\Pi e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \Psi_\Pi - \beta x) + \sqrt{2} \underline{U}_3 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \Psi_3 + \beta x) = \\ &= u_\Pi + u_3. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Перша складова  $u_\Pi = \sqrt{2} \underline{U}_\Pi e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \Psi_\Pi - \beta x)$  - це є біжуча в прямому напрямку хвиля зі згасаючою амплітудою. Згасання характеризується коефіцієнтом  $\alpha$ . Коефіцієнт  $\beta$  характеризує зміну фази хвилі в функції  $x$ . Побудуємо графіки  $u = f(x)$  для

часу  $t_1$  та  $t_2 > t_1$  (рис. 9.2.). Бачимо, що при  $t = t_2$  хвиля змістилась вправо.

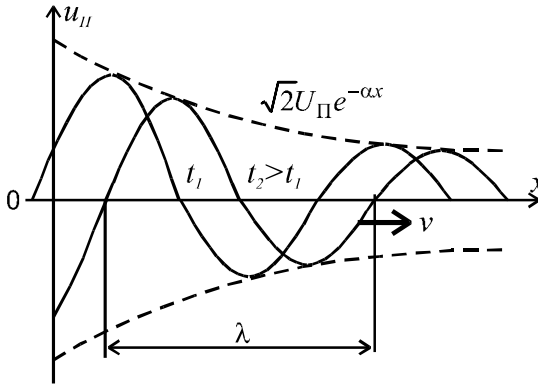


Рис. 9.2

Для визначення швидкості розповсюдження хвилі будемо вважати фазу коливань  $(\omega t + \psi_{II} - \beta x)$  незмінною, що справедливо для спостерігача, який рухається зі швидкістю хвилі. Тоді:

$$\frac{d}{dt}(\omega t + \psi_{II} - \beta x) = 0 \Rightarrow \omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0,$$

а враховуючи, що  $\frac{dx}{dt} = v$  є швидкість розповсюдження хвилі,

$$\text{отримаємо } \omega - \beta v = 0 \Rightarrow v = \frac{\omega}{\beta}. \quad (9.13)$$

Аналогічно можна показати, що складова

$$u_3 = \sqrt{2}U_3 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_{II} + \beta x)$$

описує зворотну хвилю (рис. 9.3), яка розповсюджується від кінця лінії до її початку. Швидкість хвилі  $v = -\frac{\omega}{\beta}$ , а амплітуда хвилі згасає по мірі віддалення від кінця лінії.

Таким чином, миттєве значення напруги в будь якій точці лінії визначається сумою миттєвих значень напруг прямої та зворотної хвиль.

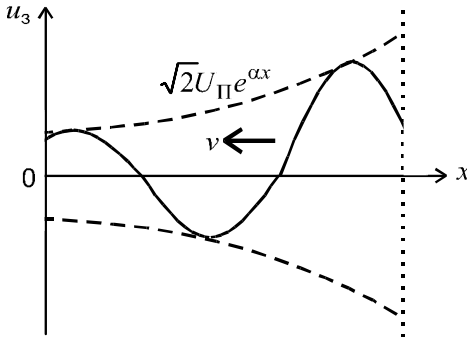


Рис. 9.3

Відстань між двома точками лінії для однієї хвилі, фаза в яких відрізняється на  $2\pi$ , є довжина хвилі  $\lambda$ .

Отримаємо формулу для визначення  $\lambda$  з рівняння

$$(\omega t + \Psi_{\Pi} - \beta x) - [\omega t + \Psi_{\Pi} - \beta(x + \lambda)] = 2\pi, \text{ звідки}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (9.14)$$

З урахуванням (9.14) швидкість розповсюдження хвилі можна визначити, як  $v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega\lambda}{2\pi} = f \cdot \lambda$ . Тоді довжину хвилі можна визна-

чити як  $\lambda = \frac{v}{f}$ . Лінія вважається довгою, якщо її довжина порівнянна з довжиною хвилі.

Для повітряної лінії швидкість розповсюдження хвилі приблизно рівна швидкості світла  $v = \frac{\omega}{\beta} \approx c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

При частоті  $f = 50$  Гц довжина хвилі становить

$$\lambda = \frac{v}{f} \approx \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{50} = 6 \cdot 10^6 \text{ м, а при частоті } f = 100 \text{ МГц - 3 м.}$$

Як ми бачимо при великій частоті невеликий відрізок лінії потрібно вважати довгою лінією.

Аналогічно (9.11) та (9.12) можна отримати вирази для струмів:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_{\Pi}}{\underline{Z}_C} e^{-\gamma x} - \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_C} e^{\gamma x} = \underline{I}_{\Pi} e^{-\gamma x} - \underline{I}_3 e^{\gamma x}; \quad (9.15)$$

$$i = i_{\Pi} - i_3. \quad (9.16)$$

Так як,  $\underline{I}_{\Pi} = \frac{U_{\Pi}}{\underline{Z}_C}$ ,  $\underline{I}_3 = \frac{U_3}{\underline{Z}_C}$ ; то  $\underline{Z}_C = \frac{U_{\Pi}}{\underline{I}_{\Pi}} = \frac{U_3}{\underline{I}_3}$ .

Тобто хвильовий опір є коефіцієнтом пропорційності між напругою та струмом прямої чи зворотної хвилі. Це означає, що його можна розглядати як опір лінії для прямої чи зворотної хвилі окремо.

#### 9.4. УЗГОДЖЕНИЙ РЕЖИМ

При такому режимі зворотна хвиля відсутня. Щоб встановити, при яких умовах настапає узгоджений режим, розглянемо постійні  $\underline{A}_3$  та  $\underline{A}_4$ , коли відлік  $x$  проводиться від кінця лінії

$$\underline{A}_3 = \frac{U_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_C}{2}; \quad \underline{A}_4 = \frac{U_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_C}{2}.$$

Виразимо  $\underline{U}_2$  через струм в кінці лінії  $\underline{I}_2$  та опір навантаження лінії  $\underline{Z}_H$ :  $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_H$ . Зворотна хвиля буде відсутня при  $\underline{A}_4 = 0 \Rightarrow \underline{I}_2 \underline{Z}_H - \underline{I}_2 \underline{Z}_C = 0 \Rightarrow \underline{I}_2 \underline{Z}_H = \underline{I}_2 \underline{Z}_C$ .

Значить умова узгодженого режиму

$$\underline{Z}_H = \underline{Z}_C.$$

При узгодженому режимі:

$$\underline{U} = \underline{A}_3 e^{\gamma x} = \underline{U}_2 e^{\gamma x}; \quad \underline{I} = \frac{\underline{A}_3}{\underline{Z}_C} e^{\gamma x} = \underline{I}_2 e^{\gamma x}.$$

Розподіл діючих значень напруги та струму вздовж лінії показано на рис. 9.4

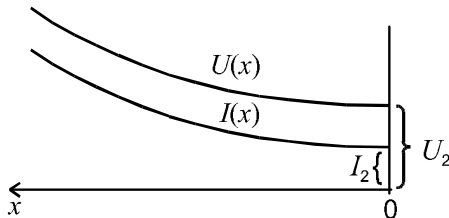


Рис. 9.4

В будь якій точці лінії  $\frac{U}{I} = \underline{Z}_C$  і вхідний опір лінії  $\underline{Z}_{BX} = \underline{Z}_C$

незалежний від довжини лінії.

Коефіцієнт корисної дії при узгодженому режимі

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_2 I_2 \cos \Theta}{U_1 I_1 \cos \Theta} = \frac{U_2 I_2}{U_2 e^{\alpha L} \cdot I_2 e^{\alpha L}} = e^{-2\alpha l}. \quad (9.17)$$

де  $l$  - довжина лінії.

Відсутність зворотної хвилі дає можливість всю енергію прямої хвилі передати в навантаження, в той час коли при наявності зворотної хвилі частина енергії відбивається від кінця лінії, повертається в лінію і втрачається в ній. Крім того, в лініях зв'язку відбита хвиля створює ефект відлуння.

*Примітка:* одиниця згасання потужності в системі SI є Непер [Нп]. Згасання дорівнює 1 Нп, якщо  $\alpha L = 1$ . На практиці в основному застосовується одиниця згасання потужності - децибели [дБ]: 1 дБ = 0,115 Нп.

### 9.5. ЛІНІЯ БЕЗ СПОТВОРЕНЬ

Це лінія, в якій форма сигналу на виході повторює форму сигналу на вході. Відомо, що несинусоїдальний сигнал можна представити сумою гармонік. Для того, щоб форма сигналу не змінювалась, потрібно:

1. Щоб амплітуди всіх гармонік при проходженні вздовж лінії не змінювались, або змінювались однаково. А це означає, що коефіцієнт згасання  $\alpha$  не повинен залежати від частоти, тобто

$$\alpha = const. \quad (9.18)$$

2. Гармоніки при проходженні вздовж лінії не повинні зсуватись одна відносно одної, тобто повинні розповсюджуватись з однаковою швидкістю. З виразу для швидкості  $v = \frac{\omega}{\beta} = const$  отримаємо:

$$\beta \cong \omega, \quad (9.19)$$

тобто коефіцієнт фази  $\beta$  повинен бути пропорційний частоті  $\omega$ .

Хевісайд показав, що умови (9.18) та (9.19) виконуються при

$$\frac{L_0}{R_0} = \frac{C_0}{G_0}. \quad (9.20)$$

При цьому:  $\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} =$   
 $= \sqrt{\underline{R}_0 \cdot \underline{G}_0} \sqrt{\left(1 + j\omega \frac{L_0}{R_0}\right) \left(1 + j\omega \frac{C_0}{G_0}\right)};$

з врахуванням (9.20) отримаємо:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{R}_0 \cdot \underline{G}_0} + j\omega \sqrt{L_0 \cdot C_0} = \alpha + j\beta, \quad (9.21)$$

тобто  $\alpha = const$ ,  $\beta \cong \omega$ .

Хвильовий опір з врахуванням (9.20)

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_C \quad - \text{ є чисто активним.}$$

$$\text{Швидкість розповсюдження хвиль } v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 \cdot C_0}}. \quad (9.22)$$

На практиці  $\frac{L_0}{R_0} < \frac{C_0}{G_0}$ , тоді для забезпечення в кінці лінії не-

спотвореної форми сигналу використовуються:

1. Забезпечення умови (9.20) ввімкненням в лінію котушок зосередженої індуктивності.
2. Установкою в кінці лінії фільтрів, які будують з врахування параметрів реальної лінії, і які усувають можливі спотворення.
3. Передачу імпульсних сигналів здійснюють, модулюючи ними гармонійний сигнал (modem-demodem).

## 9.6. БЕЗВТРАТНА ЛІНІЯ

Якщо  $\omega L_0 \gg R_0$  і  $\omega C_0 \gg G_0$ , то вважають, що  $R_0 = 0$  і  $G_0 = 0$ , і розглядають лінію без втрат. Вторинні параметри такої лінії:  $\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0} = \sqrt{j\omega L_0 \cdot j\omega C_0} = j\omega \sqrt{L_0 \cdot C_0}$ , тобто  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \omega \sqrt{L_0 \cdot C_0}$ . Значить безвтратна лінія є лінією без спотворень.

Хвильовий опір  $Z_C = \sqrt{\frac{j\omega L_0}{j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$  - є чисто активним.

З теорії поля відомо, що  $L_0 = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{d}{R}$ ;  $C_0 = \frac{\varepsilon \cdot \pi}{\ln \frac{d}{R}}$ .

Тоді фазова швидкість  $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}}$ ,

де:  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon'$ ;  $\mu = \mu_0 \mu'$ .

Для повітря  $\varepsilon' = 1$ ;  $\mu' = 1$ , тоді швидкість

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Для кабелю  $\varepsilon' = 4 \dots 5$  і швидкість розповсюдження хвилі в два рази менша.

Якщо  $\alpha = 0$  і  $\underline{\gamma} = j\beta$ , то рівняння лінії приймають вид (9.23):

$$\underline{U} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 Z_C}{2} e^{j\beta x} + \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 Z_C}{2} e^{-j\beta x} = \underline{U}_2 \cos \beta x + j \underline{I}_2 Z_C \sin \beta x ;$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 Z_C}{2 Z_C} e^{j\beta x} - \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 Z_C}{2 Z_C} e^{-j\beta x} = j \frac{\underline{U}_2}{Z_C} \sin \beta x + \underline{I}_2 \cos \beta x .$$

## 9.7. СТОЯЧІ ХВИЛІ В ЛІНІЇ

### Неробочий режим.

Розглянемо випадок, коли лінія розімкнута на кінці ( $\underline{Z}_H = \infty$ ,  $\underline{I}_2 = 0$ ). При цьому  $\underline{A}_3 = \underline{A}_4 = \frac{\underline{U}_2}{2}$ , тобто амплітуда прямої та зворотної хвилі однакові. Рівняння (9.23) для цього випадку будуть мати вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \frac{U_2}{2} e^{j\beta x} + \frac{U_2}{2} e^{-j\beta x} = U_2 \cos\beta x; \\ \underline{I} &= \frac{U_2}{2Z_C} e^{j\beta x} - \frac{U_2}{2Z_C} e^{-j\beta x} = j \frac{U_2}{Z_C} \sin\beta x. \end{aligned} \right\} \quad (9.24)$$

Миттєві значення напруги та струму:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sqrt{2} \cdot U_2 \sin\omega t \cdot \cos\beta x; \\ i &= \sqrt{2} \frac{U_2}{Z_C} \cos\omega t \cdot \sin\beta x. \end{aligned} \right\} \quad (9.25)$$

Рис. 9.5 ілюструє розподіл  $u(x)$ ,  $i(x)$  при різних значеннях часу  $t$ .

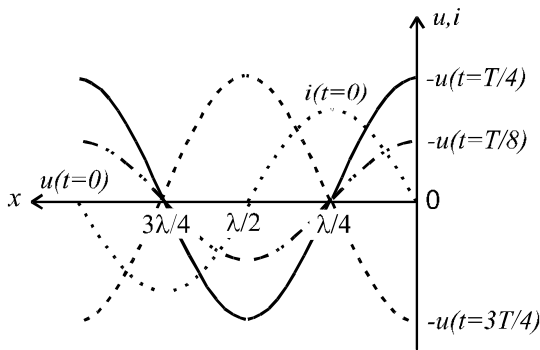


Рис. 9.5

Бачимо, що при  $x = \lambda/4; 3\lambda/4; 5\lambda/4 \dots$  спостерігаються вузли напруг, а при  $x = \lambda/2; 3\lambda/2; 5\lambda/2 \dots$  - пучності.

Розподіл діючих значень напруги та струму вздовж лінії показано на рис. 9.6 і описується формулами

$$U(x) = |U_2 \cos\beta x|; \quad I(x) = \left| \frac{U_2}{Z_C} \sin\beta x \right|$$



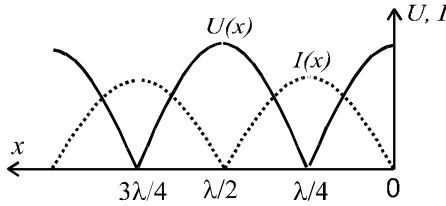


Рис. 9.6

Вхідний опір лінії отримаємо, підставивши  $x = l$  в (9.24),  

$$\underline{Z}_{BX} = \frac{U}{I} = -j \cdot Z_C \cdot \operatorname{ctg} \beta l = -j X_l$$
. Цей опір є реактивним, а його величина та характер (індуктивний чи ємнісний) залежать від довжини лінії, що ілюструє рис. 9.7.

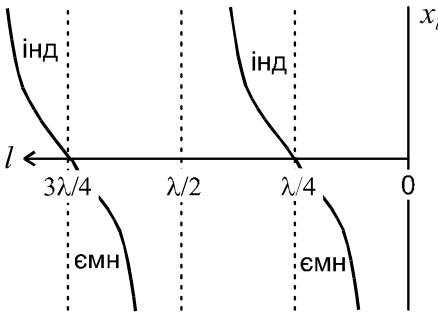


Рис. 9.7

З сказаного видно, що відрізок розімкненої лінії може використовуватись замість зосереджених  $L$  або  $C$ , тобто як індуктивний чи ємнісний опори. При їх використанні в діапазоні надвисоких частот (НВЧ) втрати будуть меншими, так як відрізки лінії мають значно вищу добротність.

### Режим короткого замикання

Тепер розглянемо випадок, коли лінія в кінці замкнута накоротко ( $\underline{Z}_H = 0, \underline{U}_2 = 0$ ). В цьому випадку  $\underline{A}_3 = -\underline{A}_4 \Rightarrow \underline{A}_3 = \frac{I_2 \underline{Z}_C}{2}$ ,  
 $\underline{A}_4 = -\frac{I_2 \underline{Z}_C}{2}$ . Рівняння (9.23) для цього випадку будуть мати вид:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= j I_2 Z_C \sin \beta x \\ \underline{I} &= I_2 \cos \beta x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} u &= \sqrt{2} I_2 Z_C \cos \omega t \cdot \sin \beta x; \\ i &= \sqrt{2} \cdot I_2 \sin \omega t \cdot \cos \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (9.25)$$

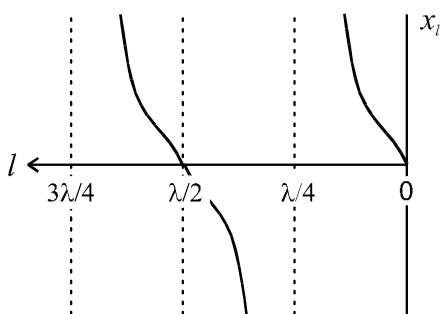


Рис. 9.8

Ми знову спостерігаємо стоячі хвилі в лінії, але порівняно з неробочим режимом вузли та пучності та поміняються місцями.

Розподіл діючих значень:

$$U(x) = I_2 Z_C |\sin \beta x|;$$

$$I(x) = I_2 |\cos \beta x|.$$

Вхідний опір лінії

$$\underline{Z}_{BX} = j \cdot Z_C \cdot \operatorname{tg} \beta l$$

також є чисто реактивним. Як ми бачимо, і відрізок короткозамкнутої лінії може використовуватись як індуктивний чи ємнісний опори (рис. 9.8).

### Реактивне навантаження

Розглянуті в цьому параграфі випадки розімкнутої та замкнутої накоротко лінії дозволяють зробити висновок, що будь яке реактивне навантаження лінії можна замінити відрізком цієї ж лінії потрібної довжини. Звідси випливає, що при реактивному навантаженні лінії в ній також будуть спостерігатись стоячі хвилі, тільки в кінці лінії не буде ні вузла ні пучності напруги та струму (рис. 9.9).

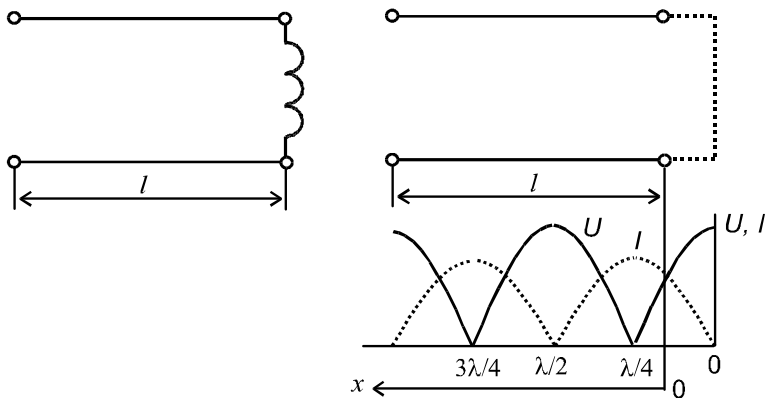


Рис. 9.9

Загальним для всіх трьох розглянутих режимів є те, що від джерела не споживається енергія. В лінії у всіх випадках спостерігаються стоячі хвилі.

### 9.8. УЗГОДЖЕНИЙ РЕЖИМ БЕЗВТРАТНОЇ ЛІНІЇ

Розглянемо випадок, коли в кінці лінії приєднано активне навантаження  $R_H = Z_C$ :

$$\underline{A}_3 = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 R_H}{2} = \underline{U}_2; \quad \underline{A}_4 = 0 \text{ - зворотної хвилі немає.}$$

Комплекси напруги та струму описуються формулами:

$$\underline{U} = \underline{U}_2 e^{j\beta x}; \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}_2}{R_H} e^{j\beta x}$$

З цих формул виходить, що в будь який момент часу, у будь якій точці лінії напруга та струм співпадають по фазі.

Діючі значення напруг та струмів вздовж лінії не змінюються (рис. 9.10).

$$\left. \begin{aligned} U(x) &= U_2; \\ I(x) &= \frac{U_2}{R_H} = I_2. \end{aligned} \right\}$$

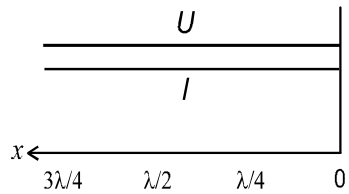


Рис. 9.10

Якщо  $Z_C \neq R_H$ , то в лінії є зворотні хвилі, але амплітуда прямої хвилі більша амплітуди зворотної. Наприклад, при  $Z_C < R_H$  розподіл діючих значень струму та напруги має вид, показаний на рис. 9.11. При  $Z_C > R_H$  криві міняються місцями.

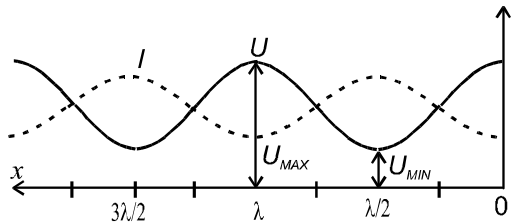


Рис. 9.11

Коефіцієнт біжучої хвилі (КБХ)  $k_B = \frac{U_{MIN}}{U_{MAX}}$  може приймати

значення від 0 до 1. При  $R_H > Z_C$ :  $k_B = \frac{Z_C}{R_H}$ ; при  $R_H < Z_C$ :  $k_B = \frac{R_H}{Z_C}$

### 9.9. УЗГОДЖЕННЯ БЕЗВТРАТНОЇ ЛІНІЇ З НАВАНТАЖЕННЯМ, ЧВЕРТЬ ХВИЛЕВИЙ ТРАНСФОРМАТОР

Розглянемо відрізок лінії довжиною  $l = \lambda/4$  з активним навантаженням  $R_H$  на кінці, для якого:

$$e^{j\beta l} = e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4}} = e^{j\frac{\pi}{2}} = j; \quad e^{-j\beta l} = -j;$$

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_3 e^{j\beta l} + \underline{A}_4 e^{-j\beta l} = j \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 Z_C}{2} - j \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 Z_C}{2} = j \underline{I}_2 Z_C;$$

$$\underline{I}_1 = j \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 Z_C}{2 Z_C} - (-j) \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 Z_C}{2 Z_C} = j \frac{\underline{U}_2}{Z_C}.$$

Вхідний опір

$$\underline{Z}_{BX} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{j \underline{I}_2 Z_C}{j \frac{\underline{U}_2}{Z_C}} = \frac{\underline{Z}_C^2}{\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}} = \frac{\underline{Z}_C^2}{R_H} = \left( \frac{\underline{Z}_C}{R_H} \right)^2 R_H = K^2 R_H.$$

Як бачимо, вхідний опір має активний характер. Якщо  $\frac{\underline{Z}_C}{R_H} = k$  - коефіцієнт трансформації, то така лінія трансформує  $R_H$  в  $k^2$  разів (на вході!). Цю властивість відрізка лінії довжиною  $l = \lambda/4$ , який називають чверть хвильовим трансформатором, використовують для узгодження лінії з навантаженням при  $R_H \neq Z_C$ .

Розглянемо декілька прикладів використання чверть хвильового трансформатора.

1. Навантаження має чисто активний характер, але його опір не рівний хвильовому опору лінії:  $R_H = Z_H$ ,  $R_H \neq Z_C$ . В такому випадку чверть хвильовий трансформатор вмикається між навантаженням та лінією (рис. 9.12).

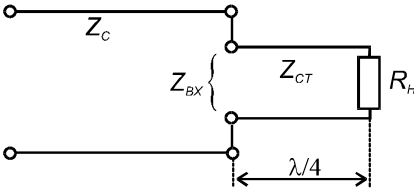


Рис. 9.12

Зворотних хвиль в основній лінії не буде при  $Z_{BX} = Z_C$  або

$$\frac{Z_{CT}^2}{R_H} = Z_C, \text{ звідки } Z_{CT} = \sqrt{R_H \cdot Z_C}.$$

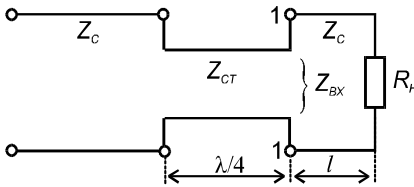


Рис. 9.13

2. Навантаження має комплексний характер. Тоді чверть хвильовий трансформатор вмикається в розрив лінії (рис. 9.13).

Величину  $l$  вибирають таким чином, щоб в точках 1-1  $Z_{BX}$  було активним.

Тут два недоліки:

1. Розрив лінії.
2. Все таки потрібен відрізок лінії з  $Z_{CT} \neq Z_C$ .

Тому краще використовувати замкнутий або розімкнутий відрізки такої ж лінії (рис. 9.14). Довжини  $l_1$  та  $l_2$  підбирають виходячи з умови:  $Z_{BX_{1-1}} = Z_C$ .

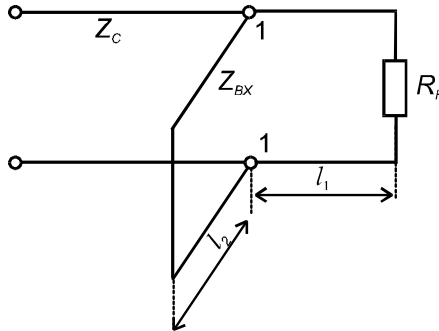


Рис. 9.14

*Приклад 9.1.* Безвтратна лінія довжиною  $l = 16,75$  км, має параметри:  $L_0 = 10 \cdot 10^{-3}$  Гн/км,  $C_0 = 5,75 \cdot 10^{-9}$  Ф/км. Напряга в кінці лінії  $U_2 = 55,4$  В, частота -  $f = 5000$  Гц. Навантаження  $Z_H = R_H =$

2770 Ом. Визначити струм і напругу на початку лінії, довжину електромагнітної хвилі, побудувати графік розподілу напруги  $U(x)$  вздовж лінії.

*Розв'язок*

1. Якщо лінія безвтратна, то  $R_0 = 0$  та  $G_0 = 0$ .

2. Хвилевий опір  $Z_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 10^{-3}}{5,75 \cdot 10^{-9}}} = 1318 \text{ Ом.}$

3. Коефіцієнт фази  $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} =$   
 $= 2\pi \cdot 5000 \sqrt{10 \cdot 10^{-3} \cdot 5,75 \cdot 10^{-9}} = 0,238 \text{ рад/м;}$   
 $\beta L = 0,238 \cdot 16,75 = 4 \text{ рад} = 229^\circ.$

4. Струм в кінці лінії  $I_2 = \frac{U_2}{R_H} = \frac{55,4}{2770} = 0,02 \text{ А.}$

5. Постійні інтегрування  $\underline{A}_{3,4} = \frac{U_2 \pm I_2 Z_C}{2};$

$\underline{A}_3 = \frac{55,4 + 0,02 \cdot 1318}{2} = 41 \text{ В;}$       $\underline{A}_4 = \frac{55,4 - 0,02 \cdot 1318}{2} = 14,5 \text{ В.}$

6. Напруга на початку лінії:  $\underline{U}_1 = \underline{A}_3 e^{j\beta L} + \underline{A}_4 e^{-j\beta L} =$   
 $= 41 \cdot e^{j229^\circ} + 14,5 e^{-j229^\circ} = -28 - j29 - 10,1 + j10,2 =$   
 $= -38,1 - j18,2 = 42,2 e^{j205^\circ} \text{ В.}$

7. Струм на початку лінії  $\underline{I}_1 = \frac{1}{Z_B} (\underline{A}_3 e^{\beta L} - \underline{A}_4 e^{-\beta L}) =$

$$= \frac{1}{1318} (41 \cdot e^{j229^0} - 14,5e^{-j229^0}) = \frac{1}{1318} (-28 - j29 + 10,1 - j10,2) =$$

$$= \frac{1}{1318} (-17,9 - j39,2) = 0,033e^{-j118^0} \text{ А.}$$

8. Довжина електромагнітної хвилі

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{6,28}{0,238} = 26,4 \text{ км.}$$

9. Графік розподілу напруги вздовж лінії показаний на рис. 9. 15.

Так як  $R_H > Z_C$ , то в кінці лінії та в точках  $x = \lambda/2, 3\lambda/2 \dots$  від кінця лінії будуть максимуми напруги, а в точках  $x = \lambda/4, 3\lambda/4 \dots$  від кінця лінії – мінімуми напруги. Відношення мінімумів до максимумів складає  $\frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{Z_C}{R_H} = \frac{1318}{2770} = 0,48$ .

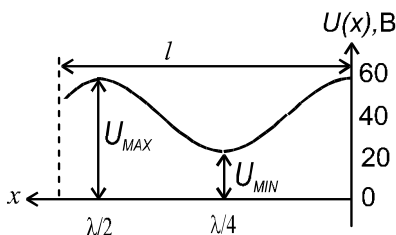


Рис. 9.15

Враховуючи, що  $U_{max} = U_2 = 55,4 \text{ В}$ , то  $U_{min} = 55,4 \cdot 0,48 = 26,4 \text{ В}$ .

**Приклад 9.2.** За заданими вторинними параметрами лінії  $Z_C = 621e^{-j13,5^0} \text{ Ом}$ ,  $\gamma = 0,018e^{j75,5^0} \text{ 1/км}$  та частоті  $\omega = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$  визначити первинні параметри цієї лінії.

**Розв'язок**

1. З врахуванням формул:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0}; \quad \underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}},$$

добуток  $\underline{\gamma}$  та  $\underline{Z}_C$  дає комплекс повздовжнього опору

$$\underline{Z}_0 = \underline{\gamma} \cdot \underline{Z}_C = 621e^{-j13,5^0} \cdot 0,018e^{j75,5^0} = 11,18e^{j62^0} \text{ Ом.}$$

$$\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0 = 11,18\cos 62^0 + j11,18\sin 62^0 = 5,4 + j10,2 \text{ Ом.}$$

Отже,  $R_0 = 5,4 \text{ Ом/км}$ ;  $L_0 = \frac{(\omega L_0)}{\omega} = \frac{10,2}{5 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/км}$ .

2. Комплекс поперечної провідності

$$\begin{aligned} \underline{Y}_0 &= \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_C} = \frac{\sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0}}{\sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0}} = \frac{0,018e^{j75,5^0}}{621e^{-j13,5^0}} = 3 \cdot 10^{-5} e^{-j89^0} = \\ &= 4 \cdot 10^{-7} + j3 \cdot 10^{-5} \text{ См/км.} \end{aligned}$$

Отже,  $G_0 = 4 \cdot 10^{-7} \text{ См/км}$ ;  $C_0 = \frac{(\omega C_0)}{\omega} = \frac{3 \cdot 10^{-5}}{5 \cdot 10^3} = 0,6 \cdot 10^{-8} \text{ Ф/км}$ .

**Приклад 9.3.** Реалізувати відрізком безвтратної лінії опір 900 Ом ємнісного характеру, якщо відомі вторинні параметри лінії:

$$Z_C = 600 \text{ Ом}; \beta = 5,9 \text{ 1/м.}$$

Розв'язок

1. Краще це зробити відрізком розімкнутої лінії, так як він у порівнянні з короткозамкнутим буде коротшим при тому ж вхідному опорі.

2. Вхідний опір розімкнутої лінії

$$\underline{Z}_{BX} = -jZ_C \operatorname{ctg} \beta l = -j \frac{Z_C}{\operatorname{tg} \beta l} \Rightarrow -jX_C = -j \frac{Z_C}{\operatorname{tg} \beta l}.$$

Отже, модуль шуканого опору  $X_C = \frac{Z_C}{\operatorname{tg} \beta l}$ ,

звідки  $\operatorname{tg} \beta l = \frac{Z_C}{X_C} = \frac{600}{900} = \frac{2}{3}$ ;  $\beta l = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} = 0,59 \text{ рад}$ .

Довжина відрізка  $l = \frac{(\beta l)}{\beta} = \frac{0,59}{5,9} = 0,1 \text{ м}$ . Зауважимо, що цей відрі-

зок має такий опір тільки для заданої частоти.



Приклад 9.4. Для однорідної лінії відомо:  $l = 100$  км;  $R_0 = 2,52$  Ом/км;  $L_0 = 2 \cdot 10^{-3}$  Гн/км;  $G_0 = 10^{-6}$  См/км;  $C_0 = 6 \cdot 10^{-9}$  Ф/км;  $f = 800$  Гц;  $\underline{U}_2 = 30$  В;  $I_2 = 0,1e^{j60}$  А. Визначити хвильовий опір, коефіцієнт розповсюдження, швидкість розповсюдження хвилі, напругу  $\underline{U}_1$  на вході лінії.

### Розв'язок

#### 1. Хвильовий опір лінії

$$\begin{aligned} \underline{Z}_C &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{2,52 + j2\pi \cdot 800 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{10^{-6} + j2\pi \cdot 800 \cdot 6 \cdot 10^{-9}}} = \\ &= 585e^{-j60} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2. Коефіцієнт розповсюдження } \underline{\gamma} &= \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0} = \\ &= \sqrt{(2,52 + j2\pi \cdot 800 \cdot 2 \cdot 10^{-3})(10^{-6} + j2\pi \cdot 800 \cdot 6 \cdot 10^{-9})} = \\ &= 17,6 \cdot 10^{-3} e^{-j82^0} = 2,44 \cdot 10^{-3} + j17,4 \cdot 10^{-3}, \text{ км}^{-1}, \end{aligned}$$

де:  $\alpha = 2,44 \cdot 10^{-3} \text{ км}^{-1}$  - коефіцієнт згасання;

$\beta = 17,4 \cdot 10^{-3}, \text{ км}^{-1}$  - коефіцієнт фази.

#### 3. Фазова швидкість

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 800}{17,4 \cdot 10^{-3}} = 289000 \text{ км/с.}$$

#### 4. Напруга на вході лінії

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_3 e^{\gamma l} + \underline{A}_4 e^{-\gamma l} = \underline{A}_3 e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} + \underline{A}_4 e^{-\alpha l} \cdot e^{-j\beta l},$$

$$\text{де: } \underline{A}_3 = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_C}{2} = \frac{30 + 0,1e^{j60} \cdot 585e^{-j60}}{2} = 44,25 \text{ В;}$$

$$\underline{A}_4 = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_C}{2} = \frac{30 - 0,1e^{j60} \cdot 585e^{-j60}}{2} = -14,25 \text{ В.}$$

При  $l = 100$  км:

$$\alpha l = 2,44 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0,244 ;$$

$$\beta l = 17,4 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 1,74 \text{ рад} = 100^{\circ}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } U_1 &= 44,25e^{0,244} e^{j100^{\circ}} - 14,25e^{-0,244} e^{-j100^{\circ}} = \\ &= 56,2e^{j100^{\circ}} - 11,12e^{-j100^{\circ}} = -7,86 + j66,28 = 66,74e^{j97^{\circ}} \text{ В.} \end{aligned}$$

### 9.10. АНАЛІЗ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В КОЛАХ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Дифрівняння однорідної лінії:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t};$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}$$

загального розв'язку не мають.

Розглянемо безвтратну лінію:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t};$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C_0 \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Відносно напруги дифрівняння приймає вид

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

тобто співпадає з видом рівняння коливання струни, розв'язок якого відомий (Даламбер):

$$u = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right) = u_{PP} + u_{ЗВ},$$

де:  $u_{PP}$  - пряма хвиля;  $u_{ЗВ}$  - зворотна хвиля.

Рівняння для струму відповідно буде таким

$$i = \frac{u_{PP}}{Z_C} - \frac{u_{ЗВ}}{Z_C} = i_{PP} - i_{ЗВ},$$

$$\text{де: } Z_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}; \quad v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

В безвтратній лінії пряма хвиля розповсюджується без деформації і згасання.

Порівняно з перехідним процесом в колі з зосередженими параметрами, де зміна струмів і напруг проходить одночасно у всіх ділянках кола, в довгих лініях такого немає, що обумовлено кінцевим значенням швидкості  $v$ . Так при приєднанні джерела фронт прямої хвилі поступово з'являється в лінії по її довжині (доки  $u_{3B} = 0$ ) і напруга  $u = u_{\text{ПР}}$ , а коли пряма хвиля дійде до кінця лінії і з'явиться зворотна хвиля, то в тій точці лінії, де є обидві хвилі  $u = u_{\text{ПР}} + u_{3B}$ .

### Аналіз прямої хвилі

Розглянемо схему кола для напруги  $u_{\text{ПР}}$ , коли пряма хвиля ще не дійшла до кінця лінії (рис. 9.16).

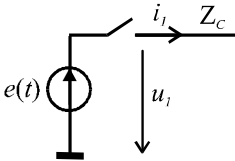


Рис. 9.16

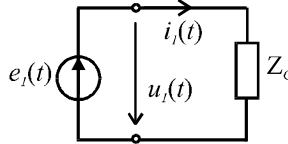


Рис. 9.17

$$\text{При } x = 0: u_1(t) = e(t) = u_{\text{ПР}}(t, 0) = Z_C i_{\text{ПР}}(t, 0) = Z_C i_1(t, 0).$$

Тобто для визначення  $u_1(t)$  та  $i_1(t)$  можна використати схему рис. 9.17.

$$\text{При } x > 0 \text{ замість } t \text{ вводимо } t - \frac{x}{v} \text{ і напруга тоді } u_{\text{ПР}} = e\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

**Приклад 9.5.** Нехай  $e(t) = 100 e^{-1000t}$  В. Побудувати розподіл  $u_{\text{ПР}}(x)$  для  $t = 1 \text{ мс}$ .

### Розв'язок

$$u_{\text{ПР}} = 100e^{-1000\left(t - \frac{x}{v}\right)} = 100e^{-1000\left(10^{-3} - \frac{x}{3 \cdot 10^5}\right)} = \frac{100}{e} \cdot e^{\frac{x}{300}} \text{ В},$$

де  $v = 3 \cdot 10^5$  км/с. Розподіл  $u_{\text{ПР}}(x)$  приведений на рис. 9.18.

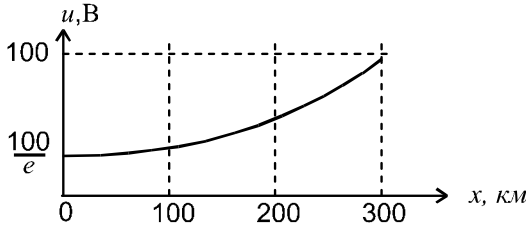


Рис. 9.18

Зауважимо, що при  $l = 0$ ,  $u_1(t) = 100$  В, і цей фронт розповсюджується без згасання.

Якщо підключається джерело постійної напруги  $U_0$ , то  $u_{\text{ПР}} = U_0 \left(t - \frac{x}{v}\right)$ . Тоді розподіл  $u_{\text{ПР}}(x)$  для конкретного  $t$  має вид, показаний на рис. 9.19.

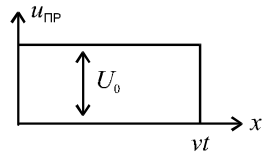


Рис. 9.19

### Визначення напруги та струму на навантаженні

Для визначення напруги та струму в кінці лінії з рівнянь

$$u = u_{\text{ПР}} + u_{\text{ЗВ}}, \quad i = \frac{u_{\text{ПР}}}{Z_C} - \frac{u_{\text{ЗВ}}}{Z_C}$$

отримаємо

$$2u_{\text{ПР}} = u + Z_C \cdot i.$$

Тоді для кінця лінії маємо  $2u_{\text{ПР}_2} = u_2 + Z_C \cdot i_2$ .

При резистивному навантаженні:  $2u_{\text{ПР}_2} = i_2 R_2 + i_2 Z_C$ ,

звідки:  $i_2 = \frac{2u_{\text{ПР}_2}}{Z_C + R_2}$ ;  $u_2 = i_2 R_2$ .

Тобто заступну схему з зосередженими параметрами для визначення  $u_2$ ,  $i_2$  можна зобразити так, як показано на рис. 9.20.

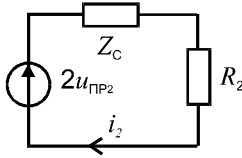


Рис. 9.20

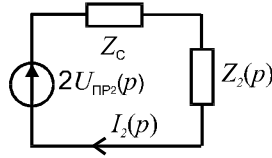


Рис. 9.21

Якщо в кінці лінії приєднано реактивне навантаження то слід використовувати операторну заступну схему (рис. 9.21), з якої:

$$I_2(p) = \frac{2U_{PP_2}(p)}{Z_C + Z_2(p)}; \quad U_2(p) = \frac{2U_{PP_2}(p)}{Z_C + Z_2(p)} Z_2(p).$$

*Примітка:*  $u_{PP_2}$  - напруга прямої хвилі в момент її приходу до кінця лінії, тобто при  $t = l/v$ ,  $U_{PP_2}(p)$  - її зображення.

**Приклад 9.6.** Нехай задані:  $e(t) = 100 e^{-1000t}$  В;  $l = 300$  км;  $Z_C = 500$  Ом;  $R_2 = 1500$  Ом. Визначити  $u_2$ ,  $i_2$ .

**Розв'язок**

1. Визначасмо напругу  $u_{PP_2}$  при  $x = l$

$$u_{PP_2} = 100 e^{-1000\left(t - \frac{l}{v}\right)} = 100 e^{-1000\left(t - \frac{300}{3 \cdot 10^5}\right)} = 100 e^{-1000(t-0,001)} \text{ В.}$$

2. Рівняння для миттєвих значень:

$$i_2 = \frac{2u_{PP_2}}{Z_C + R_2} = \frac{2 \cdot 100 e^{-1000(t-0,001)}}{500 + 1500} = 0,1 e \cdot e^{-1000t} \approx 0,272 e^{-1000t} \text{ А.}$$

$$u_2 = i_2 R_2 = 0,272 e^{-1000t} \cdot 1500 \approx 410 e^{-1000t} \text{ В, де підставляється } t \geq l/v.$$

**Аналіз зворотної хвилі**

Для кінця лінії:  $u_2 = u_{PP_2} + u_{3B_2}$ , звідки  $u_{3B_2} = u_2 - u_{PP_2}$ .

Якщо і для зворотної хвилі ввести відлік  $x$  від початку лінії, то

з врахування того, що вона з'явиться після  $t = \frac{l}{v}$ , можна записати

$$u_{3B} = u_{3B_2} \left( t - \frac{l}{v} - \frac{(l-x)}{v} \right) = u_{3B_2} \left( t - \frac{2l}{v} + \frac{x}{v} \right).$$

Тут відлік часу ведеться з початку руху прямої хвилі.

*Часткові випадки:*

1. В узгодженому режимі:  $u_{3B_2} = 0$ .
2. При короткому замиканні:  $u_2 = i_2 R_2 = 0$ , а  $u_{3B_2} = -u_{PP_2}$ .
3. В неробочому режимі  $u_2 = 2u_{PP_2}$ , тоді

$$u_{3B_2} = 2u_{PP_2} - u_{PP_2} = u_{PP_2}.$$

#### КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 9

1. Первинні параметри довгої лінії.
2. Диференціальні параметри довгої лінії.
3. Формули комплексів діючих значень напруги та струму в лінії при синусоїдальному режимі.
4. Вторинні параметри лінії.
5. Швидкість розповсюдження хвиль в лінії, довжина хвилі.
6. Умова узгодженого режиму.
7. Умова Хевісайда.
8. Характеристики безвтратної лінії.
9. Вхідний опір розімкнутого відрізка лінії.
10. Вхідний опір короткозамкнутого відрізка лінії.
11. Властивість чвертьхвильового відрізка лінії.
12. Узгодження безвтратної лінії з навантаженням.



## НЕЛІНІЙНІ КОЛА ПРИ ПОСТІЙНОМУ СТРУМІ

### 10.1. КЛАСИФІКАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Нелінійні кола і постійного і змінного струмів – це кола, параметри яких залежать від величини (або напряму) напруги чи струму. Практично всі елементи в тій чи іншій мірі нелінійні, але в багатьох випадках незначною нелінійністю нехтують. В теорії нелінійних кіл розглядають елементи з дуже вираженою нелінійністю. Використовуючи нелінійні елементи можна розв'язати задачі, які принципово не розв'язуються в лінійних колах. Це такі задачі:

- стабілізації напруги, струму;
- перетворення змінного струму в постійний та навпаки;
- підсилення напруги, потужності;
- множення або ділення частоти;
- модулювання та детектування сигналів;
- створення автоколивальних систем;
- отримання субгармонічних коливань, тощо.

Детально ці питання розглядаються в спеціальних дисциплінах, а нижче показані основні особливості нелінійних кіл та підходи до їх аналізу.

Більшість з цих задач вирішується при змінному струмі.

В нелінійних електричних колах при постійному струмі розглядають тільки нелінійні активні опори.

Основною характеристикою нелінійного елемента (НЕ) є його вольт-амперна характеристика (ВАХ).

Нелінійні елементи по виду ВАХ розрізняють:

- з симетричними та несиметричними ВАХ;

- з монотонними та немонотонними ВАХ. Останню ВАХ ще називають неоднозначною.

На рис. 10.1 приведені приклади ВАХ. Це симетрична (а), несиметрична (б), монотонна (а, б) та немонотонна (в) ВАХ.

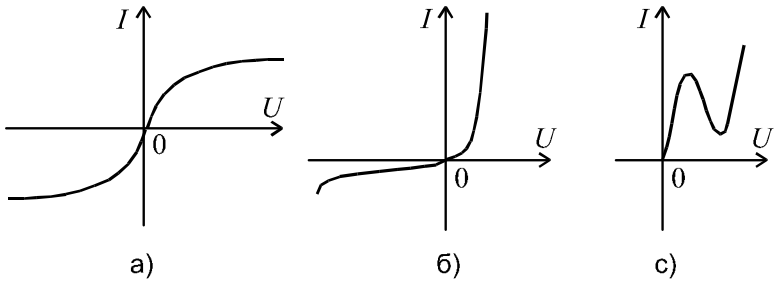


Рис. 10.1

Нелінійні елементи ділять на керовані та некеровані. У електрично керованих НЕ є, як мінімум, ще одне коло, струмом (напругою) якого можна змінювати ВАХ. Такі НЕ мають не менше трьох полюсів.

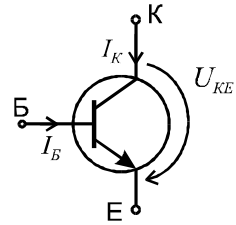


Рис. 10.2

На рис. 10.2 показано позначення біполярного NPN транзистора, а на рис. 10.3 приведені ВАХ (статичні вихідні характеристики) транзистора КТ315Б при різних значеннях струму бази  $I_B$ .

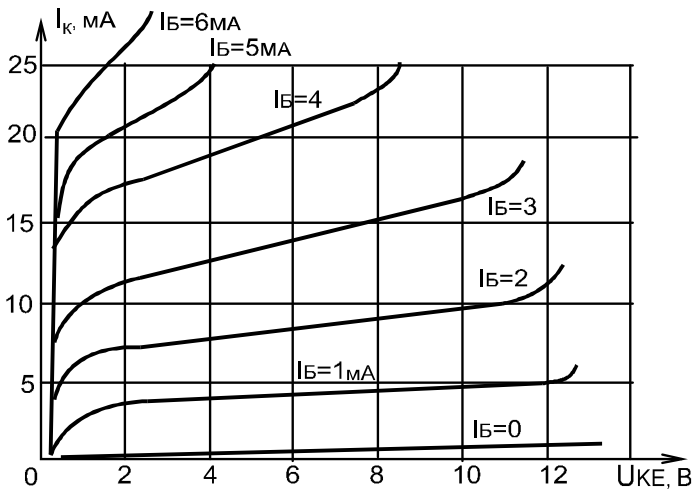


Рис. 10.3



Загальне умовне позначення некерованого НЕ приведено на рис.10.4. Кожна точка ВАХ НЕ характеризується своїм значенням статичного  $R_{cm}$  та динамічного  $R_d$  опорів. При цьому опір  $R_{cm}$  завжди позитивний, а опір  $R_d$  може бути і від'ємним. Формули для розрахунку  $R_{cm}$  та  $R_d$  приведені в 1.2.

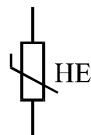


Рис.10.4

Для нелінійного кола рівняння стану, які складені за законами Кірхгофа, будуть алгебраїчними нелінійними рівняннями. Розв'язок таких рівнянь здійснюється наближеними методами:

- графічними;
- аналітичними;
- графоаналітичними, які є комбінацією двох попередніх методів.

## 10.2. ГРАФІЧНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ

Графічний метод розв'язку рівнянь Кірхгофа полягає в побудові еквівалентних ВАХ ділянок та всього кола з подальшим визначенням струмів та напруг по ВАХ для заданої напруги на вході кола  $U_{BX}$ .

Розглянемо цей метод на прикладі кола зі змішаним з'єднанням двох нелінійних елементів та одного лінійного (рис. 10.5). Вхідні дані: ВАХ НЕ  $U_1(I_1)$ ,  $U_2(I_2)$  (рис. 10.6), опір  $R_3$ , напруга  $U_{BX}$ . Потрібно визначити струми та напруги всіх елементів.

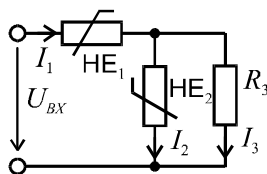


Рис. 10.5

Якщо в лінійному колі спочатку визначався еквівалентний опір ділянки з паралельним з'єднанням елементів, то в нелінійному колі опори до визначення струмів і напруг невідомі. Тому тут будується еквівалентна ВАХ цієї ділянки кола. Для побудови ВАХ скористаємося рівняннями Кірхгофа для даного кола:

$$I_1 = I_2 + I_3;$$

$$U_{BX} = U_1 + U_2;$$

$$U_2 = U_3 = U_{23}.$$

В графічному методі розв'язок першого рівняння системи виконується так: задаємо довільні значення напруги  $U_{23}$  і для кожного такого значення напруги складаємо абсциси ВАХ  $U_2(I_2)$  та  $U_3(I_3)$  і отримуємо результуючу ВАХ ділянки  $U_{23}(I_1)$ . Побудовані ВАХ покажемо на тому ж рисунку, на якому задані ВАХ НЕ.

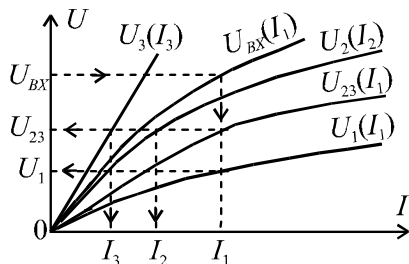


Рис. 10.6

Для побудови еквівалентної ВАХ всього кола задаємо довільні значення струму  $I_1$  і, складаючи ординати ВАХ  $U_1(I_1)$  та  $U_{23}(I_1)$  будуємо результуючу ВАХ всього кола  $U_{BX}(I_1)$ .

Побудовані ВАХ  $U_{23}(I_1)$  та  $U_{BX}(I_1)$  дають змогу визначити будь який струм чи напругу при заданому значенні іншого струму чи напруги. Для прикладу, покажемо послідовність знаходження всіх струмів та напруг при заданому значенні вхідної напруги.

$$\begin{aligned}
 U_{BX} &\rightarrow U_{BX}(I_1) \rightarrow I_1 \rightarrow U_1(I_1) \rightarrow U_1; \\
 &\quad \swarrow U_{23}(I_1) \rightarrow U_{23} \rightarrow U_2(I_2) \rightarrow I_2; \\
 &\quad \searrow U_3(I_3) \rightarrow I_3.
 \end{aligned}$$

Ця послідовність проілюстрована на рис. 10.6 пунктирними лініями та стрілками.

*Примітка 1.* Якщо якась вітка схеми містить джерело ЕРС (рис. 10.7,а), то аналіз можна проводити аналогічно, якщо замість ВАХ елемента використовувати ВАХ вітки (рис. 10.7, б). Для побудови ВАХ вітки скористуємось другим законом Кірхгофа для вітки  $ab$ . При вказаних на рис. 10.7,а напрямках струму та напруг рівняння буде мати вид

$$U_1 - U_{ab} = -E \Rightarrow U_{ab} = E + U_1.$$

Графічний розв'язок цього рівняння показаний на рис. 10.7, б.

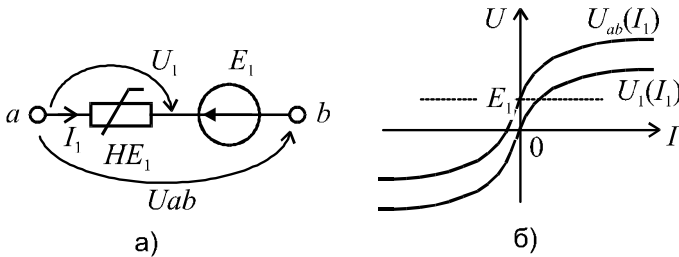


Рис. 10.7

*Примітка 2.* При розрахунку електронних схем часто потрібно розв'язувати задачу залежності напруги на НЕ від струму у вітці, яка складається з послідовно з'єднаних лінійного та нелінійного елементів. Наприклад, потрібно визначити струм  $I_K$  колекторної вітки транзисторного каскаду (рис. 10.8, а) при відомих: напрузі живлення  $U_{Ж}$ , величині опору  $R_1$  та ВАХ  $U_{KE} = f(I_K)$  при заданій величині струму бази  $I_B = const$ . Цю задачу можна розв'язати без побудови ВАХ вітки. Причому, враховуючи, що при різних струмах бази транзистора його ВАХ будуть різні, отриманий розв'язок значно зручніший для подальшого використання.

На рис. 10.8 показані: схема колекторної вітки транзисторного каскаду (а) її заступна схема для розрахунку (б) та розв'язок задачі (в).

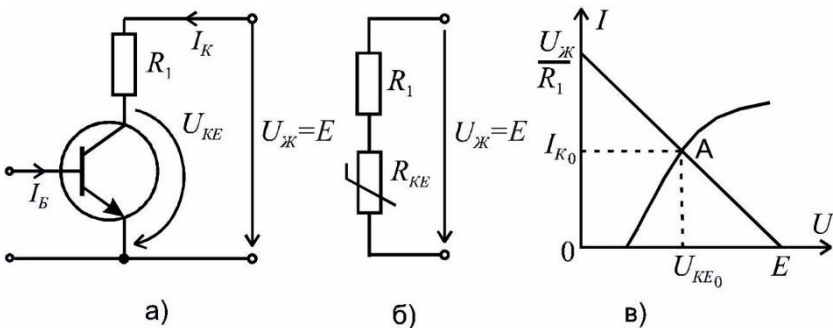


Рис. 10.8

$U_{KE} = E - I_K \cdot R_1$  – це є рівняння прямої. Будуємо її по двох

точках з координатами:  $(I_K = 0; U_{KE} = E)$  та  $(U_{KE} = 0; I_K = E/R_K)$ .  
 Точка "А" перетину прямої  $U_{KE}(I_K)$  з ВАХ НЕ і є точкою режиму, який визначає величини струму колектора  $I_{K_0}$  та напруги колектор - емітер  $U_{KE_0}$ .

### 10.3. АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ

Для аналітичного розв'язку потрібно мати аналітичний опис ВАХ. Процедурі отримання аналітичної функції з графіку ВАХ називають апроксимацією. Застосовують також лінійну або кусково-лінійну апроксимацію. Для апроксимації обирають таку аналітичну функцію, яка точніше описує задану графіком або таблицею ВАХ. Використовують експоненти, поліноми, логарифмічні та інші функції. Наприклад, візьмемо поліном третьої степені

$$i = au + bu^2 + cu^3.$$

Для визначення коефіцієнтів  $a, b, c$  тричі записуємо поліном і кожний раз замість  $u$  та  $i$  вписуємо конкретні числові значення струму та напруги для трьох вибраних точок ВАХ і з отриманої системи трьох рівнянь знаходимо коефіцієнти  $a, b, c$ .

**Приклад 10.1.** Розрахувати струми віток схеми рис. 10.9 методом послідовних наближень.

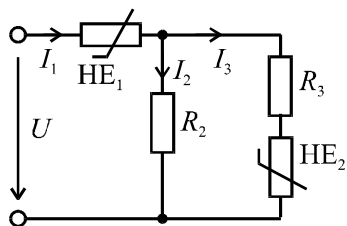


Рис. 10.9

Відомо:  $U = 400\text{В}$ ;  
 $R_2 = 30\ \text{Ом}$ ;  $R_3 = 24\ \text{Ом}$ ;  
 ВАХ НЕ<sub>1</sub> та НЕ<sub>2</sub> однакові. Вони задані таблицею 10.1.

Таблиця 10.1.

$I, \text{А}$	0,5	1	1,5	2	3	4	5	9	12
$U, \text{В}$	12	44	88	100	110	118	123	142	150

*Розв'язок*

1. Складаємо розрахункові рівняння для струмів  $I_1$  та  $I_3$  :

$$I_1 = E \cdot \frac{R_3 + R_{HE_2} + R_2}{R_{HE_1}(R_2 + R_3) + R_{HE_1} \cdot R_{HE_2} + R_2 R_3 + R_2 R_{HE_2}};$$

$$I_3 = E \cdot \frac{R_2}{R_{HE_1}(R_2 + R_3) + R_{HE_1} \cdot R_{HE_2} + R_2 R_3 + R_2 R_{HE_2}}.$$

2. Для машинного методу аналізу зручніше записати ВАХ НЕ формулою. Обираємо для апроксимації ВАХ поліном:

$$U = aI + bI^3 + cI^5.$$

Для визначення коефіцієнтів  $a, b, c$  візьмемо три точки ВАХ: (2; 100), (7; 135), (12, 150) і складемо систему рівнянь:

$$100 = a \cdot 2 + b \cdot 2^3 + c \cdot 2^5;$$

$$135 = a \cdot 7 + b \cdot 7^3 + c \cdot 7^5;$$

$$150 = a \cdot 12 + b \cdot 12^3 + c \cdot 12^5.$$

Розв'язок системи:  $a = 53,59$ ;  $b = -0,92$ ;  $c = 0,0044$ .

3. Розрахунок проводимо в такій послідовності:

а) задаємо довільні значення струмів  $I_1$  та  $I_3$  нульового наближення:  $I_{1(0)}, I_{3(0)}$  ;

б) використовуючи формулу  $U(I)$ , знаходимо  $U_{HE_1(0)}, U_{HE_2(0)}$  ;

в) знаходимо опори  $R_{HE_1(0)}, R_{HE_2(0)}$  ;

г) підставляємо значення опорів в формули для  $I_1$  та  $I_3$  і знаходимо струми першого наближення  $I_{1(1)}, I_{3(1)}$  ;

д) розрахунок за пунктами б), в), г) повторюється до отримання заданого ступеню збіжності.

Нижче в таблиці 10.2 наведені результати розрахунків для дев'яти кроків ітерації.

Таблиця 10.2

Крок	$I_{1(k)}$ ,	$U_{HE_1(k)}$ ,	$R_{HE_1(k)}$ ,	$I_{3(k)}$ ,	$U_{HE_2(k)}$ ,	$R_{HE_2(k)}$ ,	$I_{1(k+1)}$ ,	$I_{3(k+1)}$ ,
	А	В	Ом	А	В	Ом	А	А
0	2,0	100	50	2,0	100	50	5,6	1,6
1	5,6	128	23	1,62	90	55,6	8,8	2,4
2	8,8	141	16,1	2,4	104	43,4	10,9	3,3
3	10,9	147	13,5	3,3	113	33,8	12,0	4,1
4	12,0	150	12,5	4,1	119	29,0	12,6	4,6
5	12,6	151	12,0	4,6	121	26,3	13,0	4,8
6	13,0	152	11,6	4,8	122	25,2	13,2	5,0
7	13,2	153	11,5	5,0	123	24,6	13,4	5,1
8	13,4	153	11,3	5,1	124	24,3	13,4	5,1

Різниця в струмах  $I_{(k)}$  та  $I_{(k+1)}$  спостерігається в третій значущій цифрі. Отже, можна вважати, що струми віток такі:  $I_1 = 13,4 \text{ А}$ ;  $I_3 = 5,1 \text{ А}$ ;  $I_2 = 8,3 \text{ А}$ .

*Примітка.* Якщо процес ітерації розходиться, то розрахунок слід вести відносно напруги. З математики відомо, що для ВАХ з співвідношенням  $R_{cm} < R_o$  розрахунок проводимо відносно струму, а при  $R_{cm} > R_o$  – відносно напруги.

**Приклад 10.2.** Для параметричного стабілізатора, схема якого наведена на рис. 10.10, визначити коефіцієнт стабілізації. Задано:  $R_o = 250 \text{ Ом}$ ; ВАХ стабілітрона для зворотного включення (рис. 10.11); діапазон зміни вхідної напруги  $U_{BX} = 50 \pm 10 \text{ В}$ .

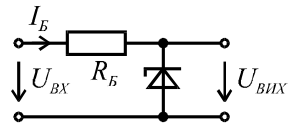


Рис. 10.10

**Розв'язок**

Розв'язок виконаємо графоаналітичним методом.

1. Визначаємо межі зміни вихідної напруги методом перетину характеристик.

За рівнянням  $U_{ВНХ} = U_{BX} - I_B R_B$  будуємо дві прямі, що відповідають мінімуму та максимуму вхідної напруги. Кожну з цих ліній проводимо через дві точки з координатами:

- для мінімальної вхідної напруги

$$(U_{BX\ min} = 50 - 10 = 40\ \text{В}; I = 0)\ \text{та}$$

$$(U = 0; I_{B\ min} = \frac{U_{BX\ min}}{R_{\sigma}} = \frac{40}{250} = 0,16\ \text{А})$$

- для максимальної вхідної напруги

$$(U_{BX\ max} = 50 + 10 = 60\ \text{В}; I = 0)\ \text{та}$$

$$(U = 0; I_{B\ max} = \frac{U_{BX\ max}}{R_{\sigma}} = \frac{60}{250} = 0,24\ \text{А})$$

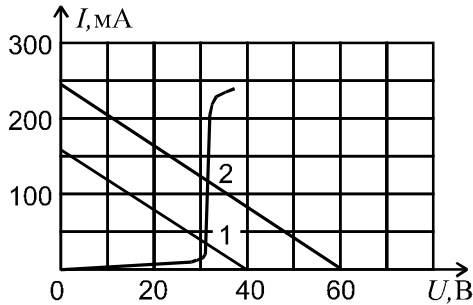


Рис. 10.11

Точка перетину першої лінії (точка 1 на рис. 10.11) визначає напругу  $U_{ВНХ\ min} = 31\ \text{В}$ . Точка перетину другої лінії (точка 2) – визначає напругу  $U_{ВНХ\ max} = 32\ \text{В}$ .

2. Номінальне (середнє) значення вихідної напруги:

$$U_{ВНХ.H} = \frac{U_{ВНХ\ max} + U_{ВНХ\ min}}{2} = \frac{32 + 31}{2} = 31,5\ \text{В}.$$

3. Коефіцієнт стабілізації:

$$K_{СТ} = \frac{\Delta U_{ВХ} / U_{ВНХ.H}}{\Delta U_{ВНХ} / U_{ВНХ.H}} = \frac{10 / 50}{0,5 / 31,5} = 12,5.$$

**Приклад 10.3.** Для схеми рис. 10.12 визначити напругу на нелінійному елементі, якщо задані:

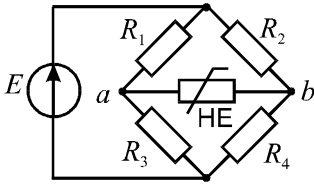


Рис. 10.12

$$E = 24 \text{ В}; R_1 = 3 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 9 \text{ Ом}; R_3 = R_4 = 3 \text{ Ом};$$

ВАХ HE представлена на рис.10.13.

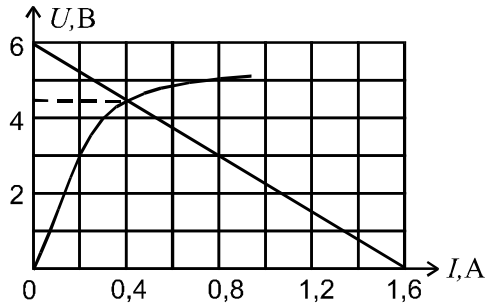


Рис. 10.13

### Розв'язок

1. Застосуємо графоаналітичний метод, для чого представимо лінійну частину схеми відносно HE еквівалентним генератором:

- виключаємо зі схеми HE;
- знаходимо напругу  $U_{ab}$  в схемі без HE:

$$U_{ab} = I_{24}R_2 - I_{13}R_1 = \frac{E}{R_2 + R_4}R_2 - \frac{E}{R_1 + R_3}R_1 = 6 \text{ В};$$

- знаходимо вхідний опір відносно точок  $ab$ , вважаючи джерело зокороченим:

$$R_{BXab} = \frac{R_2R_4}{R_2 + R_4} + \frac{R_1R_3}{R_1 + R_3} = 3,75 \text{ Ом}$$

- перетворена схема показана на рис. 10.14.

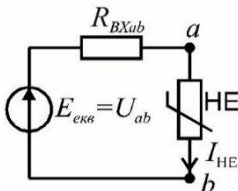


Рис. 10.14

2. Далі напругу на HE можна знайти графічно методом перетину характеристик, побудувавши пряму по точках з координатами (0; 6 В) та (1,6 А; 0). Точці перетину характеристик на рис. 10.13 відповідає напруга  $U_{HE} = 4,5 \text{ В}$ .



#### 10.4. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ЗАКОНИ МАГНІТНИХ КІЛ

В електричних апаратах та приладах, трансформаторах, електричних машинах використовується феромагнітні матеріали для збільшення магнітного потоку  $\Phi$  в окремих частинах простору та придання розподілу магнітного поля потрібної конфігурації. У вступі дано загальне визначення магнітного кола. Тут наведемо ще одне, більш конкретне: *магнітне коло* це сукупність пристроїв, які містять феромагнітні матеріали і утворюють замкнену систему, в якій при наявності магніторушійної сили (МРС) створюється магнітний потік.

Магнітний потік  $\Phi$  є потік вектору магнітної індукції  $\underline{B}$  крізь площу  $S$

$$\Phi = \int_S \underline{B} d\underline{S}. \quad (10.2)$$

Якщо індукція постійна по всій площині, а вектор  $\underline{B}$  перпендикулярний до площі, то

$$\Phi = B \cdot S. \quad (10.3)$$

Одиницею виміру потоку є Вебер (Вб), а індукції – Тесла (Тл).

Основною характеристикою феромагнітних матеріалів є крива намагнічування, тобто залежність магнітної індукції  $B$  від напруженості магнітного поля  $H$ . Ця крива називається петлею гістерезису.

На рис. 10.15 пунктиром показана основна крива намагнічування, яка є геометричним місцем вершин часткових петель гістерезису, знятих при різних діапазонах зміни струму в котушці, що створює магнітне поле. На цьому ж рисунку для прикладу наведені дві петлі гістерезису.

На петлі гістерезису напруженості магнітного поля  $H = 0$  відповідає залишкова індукція  $B_r$ , а індукції  $B = 0$  коерцитивна сила –  $H_c$ .

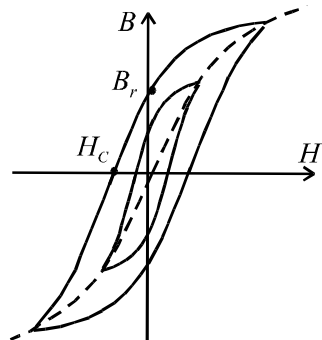


Рис. 10.15

Матеріали з вузькою петлею гістерезису називають магнітом'якими, а з широкою – магнітотвердими.

Магнітом'які матеріали використовуються для виготовлення

магнітопроводів трансформаторів, електричних машин та апаратів. При розрахунку кіл з магнітопроводами з магнітом'яких матеріалів шириною петлі гістерезису, як правило, нехтують і розрахунки ведуть по основній кривій намагнічування.

Магнітотверді матеріали використовуються при виготовленні постійних магнітів, дисків з магнітним записом, тощо. Основними для розрахунку є величини  $B_r$  та  $H_c$ .

Розглянемо магнітом'які матеріали з основною кривою намагнічування (рис. 10.16).

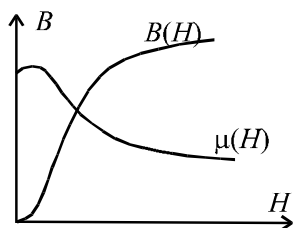


Рис. 10.16

Математично індукція та напруженість зв'язані формулою:

$$B = \mu H, \quad (10.4)$$

де:  $\mu = \mu_0 \cdot \mu'$ ;  $\mu$  - абсолютна магнітна проникливість середовища, Гн/м;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м - магнітна проникливість вакууму або пустоти;  $\mu'$  - відносна проникливість матеріалу.

Відмітимо, що для повітря  $\mu' \approx 1$  і  $\mu = \mu_0$ , а для феромагнітних матеріалів  $\mu'$  складає сотні та тисячі одиниць. Це дає можливість отримувати в магнітних колах сильне магнітне поле при невеликих струмах в обмотках. Кількісну залежність між струмом та напруженістю магнітного поля встановлює закон повного струму (рис. 10.17).

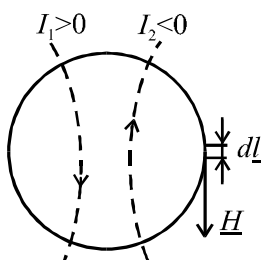


Рис. 10.17

$$\oint \underline{H} d\underline{l} = \sum I_k. \quad (10.5)$$

В правій частині (10.5) маємо повний струм, що пронизує контур. Струм  $I_k$  враховується з знаком «+», якщо він утворює поле, силова лінія якого направлена за рухом годинникової стрілки. В теорії магнітних кіл магнітне коло розбивають на ділянки, в межах кожної з яких  $H_k = const$ , а напрямки  $\underline{H}_k$

та  $\underline{l}_k$  співпадають. Це дає можливість інтеграл в законі повного струму замінити сумами складових

$$\sum H_k l_k = \sum I_k . \quad (10.6)$$

Закон повного струму для нерозгалуженого магнітного кола можна звести до закону Ома для магнітного кола.

На рис. 10.18 виділені дві ділянки кола з різною площею  $S_1$  та  $S_2$ , а значить і різною напруженістю магнітного поля. Закон повного струму для кола (рис. 10.18) запишеться у виді

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = Iw ,$$

де:  $l_1, l_2$  - середні лінії ділянок кола;  $Iw = F$  - магніторушійна сила (МРС) обмотки.

Провівши підстановки, отримаємо закон Ома:

$$\begin{aligned} \frac{B_1}{\mu_1} \cdot l_1 + \frac{B_2}{\mu_2} \cdot l_2 = F &\Rightarrow \frac{\Phi}{\mu_1 S_1} l_1 + \frac{\Phi}{\mu_2 S_2} l_2 = F \Rightarrow \\ \Rightarrow \Phi R_{\mu_1} + \Phi R_{\mu_2} = F &\Rightarrow \Phi = \frac{F}{\sum R_{\mu_k}} \end{aligned} \quad (10.7)$$

де:  $R_{\mu_k} = \frac{l_k}{\mu_k \cdot S_k}$  - магнітний опір ділянки кола.

Відповідно для розгалуженого кола закони Кірхгофа приймуть вид:

$$\sum \Phi_k = 0. \quad (10.8)$$

$$\sum \Phi_k R_{\mu_k} = \sum F_k. \quad (10.9)$$

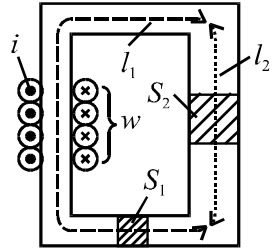


Рис.10.18

### 10.5. АНАЛІЗ НЕРОЗГАЛУЖЕНОГО МАГНІТНОГО КОЛА

Допустимо, що нам необхідно визначити МРС обмотки електромагніту (рис.10. 19), якщо задана величина потоку  $\Phi$ . Відомі також геометричні розміри, матеріал магнітопроводу, а, отже, і залежність  $B(H)$ .

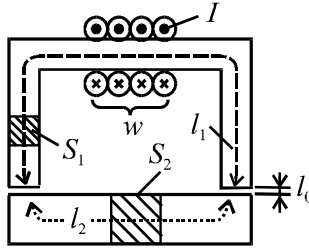


Рис. 10.19

1. Згідно з законом повного струму

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + 2H_0 l_0 = F.$$

2. Враховуючи, що потік в контурі один і той же, то індукції:

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1}; \quad B_2 = \frac{\Phi}{S_2}; \quad B_0 = \frac{\Phi}{S_0}.$$

Якщо величина повітряного проміжку значно менша величини сторін, що утворюють площу  $S_1$ , то приймають  $S_0 = S_1$ .

3. Далі по кривій  $B(H)$  для індукції  $B_1$  та  $B_2$ , знаходимо відповідні значення  $H_1$  та  $H_2$ . Для повітряного проміжку  $H_0 = \frac{B_0}{\mu_0}$ .

4. Підставивши значення напруженостей в рівняння П.1, знаходимо МРС  $F$ .

Якщо задана величина МРС, а потрібно визначити потік, то задачу можна розв'язати методом послідовних наближень.

## 10.6. АНАЛІЗ РОЗГАЛУЖЕНИХ МАГНІТНИХ КІЛ

Розрахунки таких кіл проводять за законами Кірхгофа. Розглянемо коло на рис. 10.20.

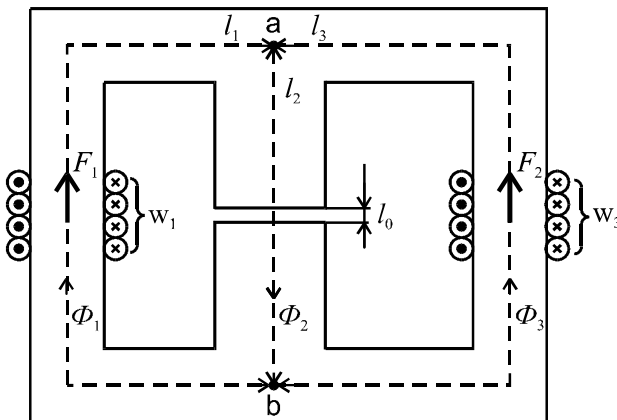


Рис. 10.20

Рівняння Кірхгофа:

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3;$$

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_0 l_0 = I_1 w_1;$$

$$H_3 l_3 + H_0 l_0 + H_2 l_2 = I_3 w_3.$$

Подальший розв'язок рівнянь залежить від умови задачі.

*Приклад 10.4.* Задані розміри магнітопроводу, крива намагнічування  $B(H)$ , МРС  $F_1$ , індукція  $B_0$  в повітряному проміжку. Визначити потоки та МРС  $F_3$ .

*Розв'язок*

1. По індукції  $B_0$  визначаємо напруженість  $H_0 = \frac{B_0}{\mu_0}$ , а по індукції  $B_2 = B_0$  за допомогою залежності  $B(H)$  – напруженість  $H_2$ .
2. З другого рівняння системи визначаємо  $H_1$ , далі з кривої  $B(H) \rightarrow B_1 \rightarrow \Phi_1$ .
3. Визначаємо потік  $\Phi_3 = \Phi_2 - \Phi_1$  і далі  $B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3} \rightarrow B(H) \rightarrow H_3$ .

4. З третього рівняння визначаємо МРС  $F_3$ .

*Приклад 10.5.* Всі МРС задані, а потрібно визначити потоки.

*Розв'язок*

Розв'язок проводиться графічним або ітераційним методом. В першому випадку будуються криві:

$$\Phi_1(I_1 w_1 - H_1 l_1) = \Phi_1(U_{\text{мав}});$$

$$\Phi_2(H_2 l_2 + H_0 l_0) = \Phi_2(U_{\text{мав}});$$

$$\Phi_3(I_3 w_3 - H_3 l_3) = \Phi_3(U_{\text{мав}})$$

де  $U_{\text{мав}} = I_1 w_1 - H_1 l_1 = H_2 l_2 + H_0 l_0$  - магнітна напруга між точками  $a$  та  $b$ .

Для їх побудови задають довільні значення потоків (індукцій), по кривій  $B(H)$  знаходять відповідні напруженості і підставляють в приведені вирази. Далі з врахуванням того, що  $\Phi_1 + \Phi_3 = \Phi_2$  будують криву  $[\Phi_1 + \Phi_3](U_{\text{мав}})$ , для чого задають довільні значення магнітної напруги  $U_{\text{мав}}$  і додають ординати кривих  $\Phi_1(U_{\text{мав}})$  та  $\Phi_3(U_{\text{мав}})$ . Точка перетину кривих  $\Phi_2(U_{\text{мав}})$  та  $[\Phi_1 + \Phi_3](U_{\text{мав}})$  визначає потік  $\Phi_2$ . Далі з другого та третього рівнянь системи визначаються напруженості  $H_1$  та  $H_3$ , з кривих  $B(H)$  - індукції, а потім відповідні потоки.

*Приклад 10.6.* Осердя підйомного електромагніту має Ш - подібну форму (рис. 10.21) і виготовлене з електротехнічної сталі. Розмір  $c = 5$  см, а магнітна характеристика сталі задана табл. 10.3. При підйомі сталеної заготовки електромагніт має розвивати силу  $F = 4$  кН. Визначити струм та індуктивність обмотки, якщо повітряний проміжок між деталлю та осердям  $\delta = 0,5$  мм, а кількість витків  $w = 200$ .

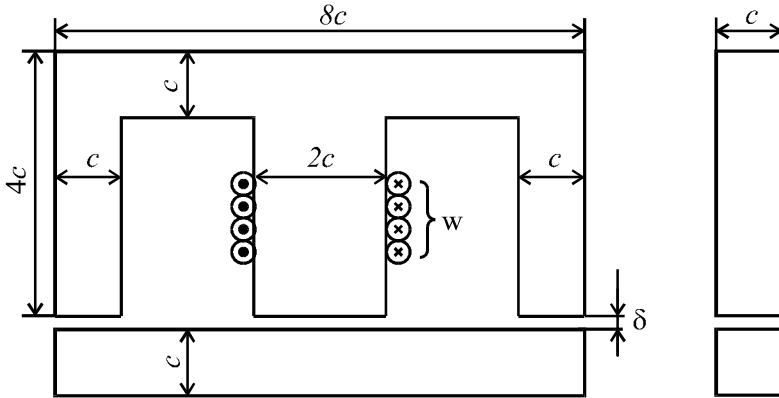


Рис. 10.21

Таблиця 10.3.

$B$ , Тл	0	0,47	0,83	1,05	1,17	1,32	1,42	1,48	1,54	1,57
$H$ , А/м	0	80	200	400	600	100	140	180	220	260
						0	0	0	0	0

### Розв'язок

1. Спочатку визначаємо індукцію в зазорі, для чого використовуємо формулу тягового зусилля електромагніту, яка обґрунтована в теорії електромагнітного поля

$$F = \frac{B_0^2}{2\mu_0} S_{\text{заг}},$$

де:  $S_{\text{заг}} = 4c^2$  – сумарна площа повітряного проміжку. Тоді

$$B_0 = \sqrt{\frac{F \cdot 2\mu_0}{4c^2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{4 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2}} \approx 1 \text{ Тл.}$$

2. Далі наведену конструкцію розглянемо як два електромагніта П - подібної форми (рис. 10.21), у якого площа перетину осердя буде всюди дорівнювати  $c^2$ .

Для такої конструкції закон повного струму можна записати у вигляді

$$H_{cm} \cdot l_{cm} + 2H_0\delta = Iw,$$

$$\text{де: } H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} \approx 8 \cdot 10^5 \text{ А/м};$$

$$H_{cm} \approx 390 \text{ А/м для } B_{cm} = B_0 = 1 \text{ Тл};$$

$l_{cm} = 2 \cdot 4c + 2 \cdot 3c = 14c = 14 \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 0,7 \text{ м}$  - середня довжина магнітної силової лінії в сталі.

Отже, струм обмотки

$$I = \frac{H_{cm} \cdot l_{cm} + 2H_0\delta}{w} = \frac{390 \cdot 0,7 + 2 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}{200} = 5,37 \text{ А.}$$

3. Індуктивність обмотки

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{w \cdot \Phi}{I} = \frac{w \cdot B_0 \cdot 2c^2}{I} = \frac{200 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2}{5,37} \approx 0,19 \text{ Гн.}$$

З прикладами стосовно графічного та ітераційного методів аналізу складних кіл можна познайомитись в роботі [1].

### КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 10

1. Вольт-амперна характеристика нелінійного елемента (НЕ).
2. Класифікація НЕ за видом ВАХ.
3. Некеровані та керовані НЕ. Умовне позначення некерованого НЕ.
4. Статичний та динамічний опори.
5. Графічний метод аналізу простих кіл з НЕ,
6. Метод перетину характеристик для аналізу електронних схем.
7. Апроксимація ВАХ НЕ.
8. Метод послідовних наближень.
9. Крива намагнічування феромагнітного матеріалу, формула зв'язку магнітної індукції та напруженості магнітного поля.
10. Формула зв'язку магнітного потоку та магнітної індукції.
11. Закон повного струму.
12. Закон Ома для нерозгалуженого магнітного кола.
13. Закони Кірхгофа для розгалуженого магнітного кола.



# XІ РОЗДІЛ

## НЕЛІНІЙНІ КОЛА ПРИ ЗМІННОМУ СТРУМІ

### 11.1. НЕЛІНІЙНІ РЕЗИСТИВНОСТІ, ІНДУКТИВНОСТІ, ЄМНОСТІ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Нелінійні резистивні елементи задають їх ВАХ або залежністю динамічного опору (провідності) від струму чи напруги.

На рис. 11.1 показана ВАХ тунельного діоду  $i(u)$  та залежність  $G_o(u) = \frac{di}{du}$ .

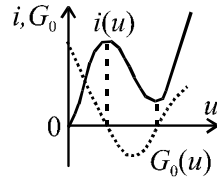


Рис. 11.1

Нелінійна індуктивність задається залежністю  $\psi(i)$  або  $L_o(i) = \frac{d\psi}{di}$  (рис.11.2).

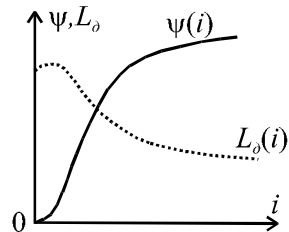


Рис. 11.2

Нелінійна ємність задається залежністю  $q(u)$  або  $C_o(u)$ . Використовують також ВАХ для діючих значень струмів та напруг.

Розрізняють НЕ з симетричними та несиметричними, монотонними та немонотонними характеристиками, керовані та некеровані. Крім того, НЕ ділять на інерційні та безінерційні. До інерційних відносять ті НЕ, у яких час встановлення сталого режиму значно більше періоду змінного струму ( $\tau \gg T$ ). Наприклад, для теплового елементу  $\tau$  – це постійна теплового процесу. Враховуючи, що температура визначається діючим значенням струму, то для інерційних

елементів нелінійною буде залежність  $U(I)$  для діючих значень (наприклад, лампа розжарювання), а залежність  $u(i)$  для миттєвих значень, при незмінній величині діючого значення струму  $I$ , буде лінійна. Конкретному значенню струму  $I$  відповідає незмінне значення опору  $R$  і тому залежності  $u(t)$ ,  $i(t)$  однакові.

У безінерційних НЕ нелінійною буде і залежність  $u(i)$ . Прикладами такої залежності є діоди, транзистори, котушка з феромагнітним осердям тощо.

Відмітимо, що для нелінійних кіл змінного струму рівняння Кірхгофа будемо записувати для миттєвих значень струмів та напруг. В загальному випадку це будуть нелінійні інтегродиференціальні рівняння, які загального розв'язку не мають. Тому тут також використовують наближені методи аналізу: графічний, аналітичний та їх комбінацію.

## 11.2. АНАЛІЗ НЕЛІНІЙНОГО РЕЗИСТИВНОГО КОЛА НА ПРИКЛАДІ СХЕМИ ВИПРЯМЛЯЧА

На рис. 11.3, а приведено умовне графічне зображення напівпровідникового діоду, на рис. 11.3, б – його ВАХ, а на рис. 11.3, в – ВАХ ідеалізованого діоду.

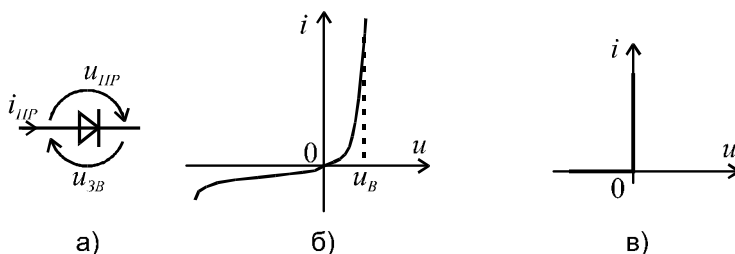


Рис.11.3

Враховуючи, що напруга відкриття діодів на основі кремнію  $U_B$  приблизно дорівнює 0,6 В, а зворотний струм дуже малий, то можна застосувати кусково-лінійну апроксимацію. Тобто тепер будемо вважати, що в прямому напрямку опір  $R_{ДПР} = 0$ , а в зворотному –  $R_{ДЗВ} = \infty$ .

Розглянемо найпростішу схему випрямляча (рис.11.4, а).

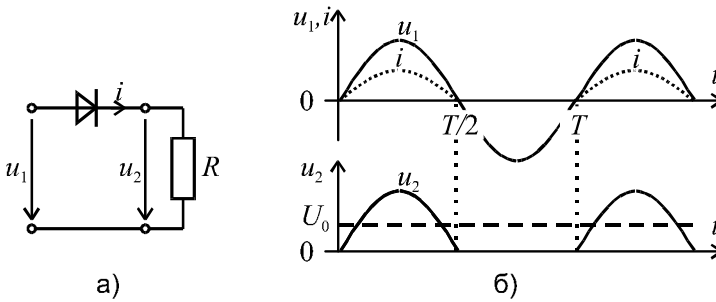


Рис. 11.4

Якщо напруга на вході випрямляча змінюється за законом  $u_1 = U_{1m} \sin \omega t$ , то при  $0 \leq t \leq T/2$   $R_{ДПР} = 0$ , а на виході випрямляча буде  $u_2 = u_1 = U_{1m} \sin \omega t$ . При  $\frac{T}{2} \leq t \leq T$   $R_{ДЗВ} = \infty$ , а струм та напруга на виході будуть дорівнювати нулю. Це ілюструється часовими діаграмами напруг (рис. 11.4, б).

Отримана крива  $u_2(t)$  може бути описана рядом Фур'є.

Постійна складова або середнє значення випрямленої напруги

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} U_{1m} \sin \omega t dt = \frac{U_{1m}}{\pi} .$$

**Приклад 11.1.** Для схеми, представленийій на рис.11.5, відомо:  $e = 100 \sin \omega t$  В;  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 4 \text{ Ом}$ ;  $X_{L_2} = 3 \text{ Ом}$ . Розрахувати та побудувати залежність  $u_{ab}(t)$ .

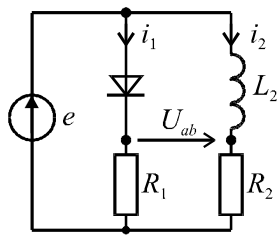


Рис.11.5

**Розв'язок.**

1. Діод вважаємо ідеальним, тобто  $R_{np} = 0$ ;  $R_{зв} = \infty$ .

2. Струми у вітках:

$$i_1 = \frac{E_m}{R_1} \sin \omega t = \frac{100}{5} \sin \omega t = 20 \sin \omega t \text{ А, при } 0 \leq t \leq \frac{T}{2};$$

$$i_1 = 0 \text{ при } \frac{T}{2} \leq t \leq T;$$

$$i_2 = \frac{E_m}{\sqrt{R_2^2 + X_{L_2}^2}} \sin(\omega t - \varphi) = 20 \sin(\omega t - 37^\circ) \text{ А,}$$

$$\text{де } \varphi = \arctg \frac{X_{L_2}}{R_2} = \arctg \frac{3}{4} = 37^\circ.$$

3. Напруги  $\underline{U}_{ab}$  та  $u_{ab}$ :

$$\text{- при } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}; \underline{U}_{abm} = \underline{I}_{1m} R_1 - \underline{I}_{2m} R_2 =$$

$$= 20 \cdot 5 - 20 e^{-j37^\circ} \cdot 4 = 100 - 64 + j48 = 36 + j48 = 60 e^{j53^\circ} \text{ В;}$$

$$u_{ab} = 60 \sin(\omega t + 53^\circ) \text{ В.}$$

$$\text{- при } \frac{T}{2} \leq t \leq T; \underline{U}_{abm} = -\underline{I}_{2m} R_4 = -80 e^{-j37^\circ} = 80 e^{j143^\circ} \text{ В;}$$

$$u_{ab} = 80 \sin(\omega t + 143^\circ) \text{ В.}$$

4. Графік  $u_{ab}(t)$  наведений на рис. 11.6.

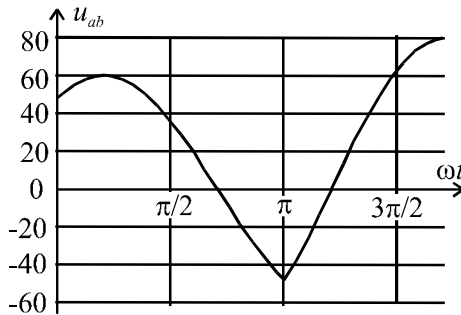


Рис. 11.6

### 11.3. КОТУШКА З ФЕРОМАГНІТНИМ ОСЕРДЯМ ТА ЇЇ ОСОБЛИВОСТІ

Дамо відповідь на одне запитання: що дає котушці феромагнітне осердя?

1. Магнітний потік  $\Phi$ , який замикається в осерді (рис. 11.7), значно більше потоку розсіювання  $\Phi_S$ , який в основному замикається в повітрі. Це означає, що індуктивність котушки з феромагнітним осердям значно більше індуктивності котушки без осердя практично в тих же габаритах.

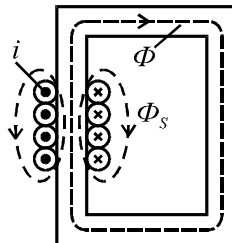


Рис. 11.7

2. Так як магнітна проникливість осердя  $\mu_c$  залежить від насичення магнітопроводу, то і індуктивність котушки  $L$  буде нелінійною функцією струму (рис. 11.2), тому що вона пропорційна магнітній проникливості  $\mu$ :

$$L = \frac{\Psi}{i} = \frac{w\Phi}{i} = \frac{w}{i} \cdot \frac{wi}{R_\mu} = \frac{w^2}{R_\mu} = w^2 \frac{\mu_c \cdot S}{l}. \quad (11.1)$$

Нелінійність індуктивності  $L$  дозволяє побудувати феромагнітний стабілізатор напруги, магнітний підсилювач та інші пристрої.

3. При змінному струмі змінний магнітний потік  $\Phi$  обумовлює втрати енергії в осерді: втрати від вихрових струмів  $P_B$  та втрати на перемагнічування  $P_G$  (останні пропорційні площі петлі гістерезису, тому їх ще називають гістерезисними втратами). Приведемо без виводу формулу сумарної потужності цих втрат:

$$P_C = P_B + P_G \approx KB_m^2 f^{1.4} G, \quad (11.2)$$

де:  $B_m$  - амплітуда магнітної індукції;  $f$  - частота;  $G$  - вага сталі;  $K$  - коефіцієнт, який залежить від марки сталі.

Для зменшення втрат  $P_B$  осердя для низьких частот виконують шихтованим (тобто з ізольованих листів або стрічки), а для високих частот – з фериту або магнітодіелектрику (наприклад, з альсиферу).

4. Нелінійність залежності  $\psi(i)$  обумовлює при синусоїдальній напрузі несинусоїдальність струму. Покажемо це для ідеальної котушки, у якій відсутні втрати енергії і потік  $\Phi_S \approx 0$ . Тоді:

$$u = \frac{d\Psi}{dt} = w \frac{d\Phi}{dt}.$$

Якщо  $u = U_m \sin \omega t$ , то  $\frac{d\Phi}{dt} = U_m \sin \omega t$ , а потік

$$\Phi = \frac{U_m}{\omega \cdot w} (-\cos \omega t) = \Phi_m \cdot \sin(\omega t - \pi/2).$$

Тобто, при синусоїдальній напрузі магнітний потік також синусоїдальний, а його амплітуда прямо пропорційна амплітуді напруги

$$\Phi_m = \frac{U_m}{\omega \cdot w}. \quad (11.3)$$

Форму кривої струму визначимо графічно (рис. 11.8).

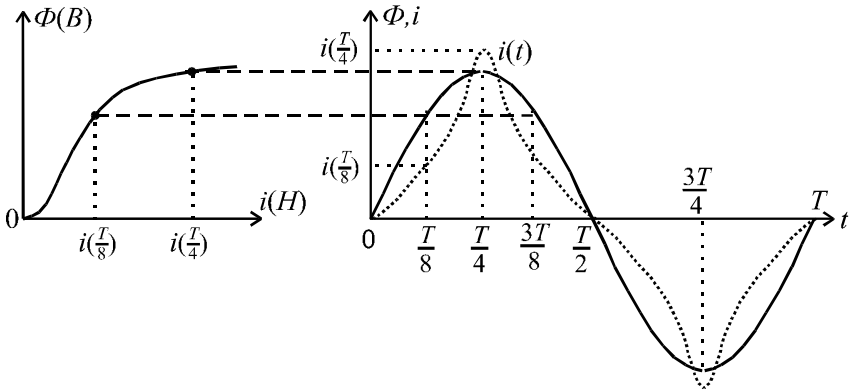


Рис. 11.8

Бачимо, що крива  $i(t)$  несинусоїдальна, а степінь несинусоїдальності буде залежати від насичення осердя. Розкладання кривої  $i(t)$  в ряд Фур'є показує, що серед вищих гармонік виділяється третя гармоніка.

Це твердження можна довести і аналітично. Для цього апроксимуємо залежність  $\Phi(i)$  поліномом  $i = a\Phi + b\Phi^3$ , (у симетричних характеристик парні складові відсутні).

Якщо  $\Phi = \Phi_m \sin \omega t$ , то

$$\begin{aligned} i &= a\Phi_m \sin \omega t + b\Phi_m^3 \sin^3 \omega t = a\Phi_m \sin \omega t + \\ &+ b\Phi_m^3 \frac{3\sin \omega t - \sin 3\omega t}{4} = I_{1m} \sin \omega t - I_{3m} \sin 3\omega t. \end{aligned}$$

#### 11.4. РІВНЯННЯ ТА ЕКВІВАЛЕНТНА СХЕМА РЕАЛЬНОЇ КОТУШКИ З ОСЕРДЯМ

Процеси в реальній котушці можна описати такою послідовністю

$$u \Rightarrow i \begin{matrix} \nearrow iR \\ \Rightarrow \Phi_s \Rightarrow e_s \\ \searrow \Phi \Rightarrow e \end{matrix}$$

Рівняння електричної рівноваги має вид  $u = -e - e_s + iR$ .

В загальному випадку  $e_k = -\frac{d\psi_k}{dt}$ , де:  $\psi_k = L_k i_k = w_k \Phi_k$ . Для лінійного середовища  $L_k = const$  і зручніше використовувати  $\psi_k = L_k i_k$ , а для нелінійного середовища –  $\psi_k = w_k \Phi_k$ . Тоді, після заміни ЕРС напругами, отримаємо

$$u = u_E + L_s \frac{di}{dt} + Ri.$$

Якщо несинусоїдальні струми та напруги замінити еквівалентними синусоїдами з діючими значеннями

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + \dots} \quad \text{та} \quad U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + \dots},$$

то можна використовувати символічний метод і векторні діаграми. Рівняння електричної рівноваги приймає вид:

$$\underline{U} = \underline{U}_E + j\omega L_s \underline{I} + R \underline{I}, \quad (11.4)$$

$$\text{де: } U_E = \frac{\omega w \Phi_m}{\sqrt{2}} = 4,44 \omega f \Phi_m. \quad (11.5)$$

Останнє співвідношення випливає з формули (11.3)

З врахуванням втрат енергії в осерді фазовий зсув між  $\underline{U}_E$  та  $\underline{I}$  буде менше  $90^\circ$ . Це означає, що ділянка схеми під напругою  $\underline{U}_E$  містить не тільки головний індуктивний опір, який обумовлений основним потоком  $\Phi$ , але і фіктивний опір  $R_c$ , що враховує втрати

потужності в сталі ( $R_c = \frac{P_c}{I^2}$ ).

Повна заступна схема реальної котушки з осердям повинна містити чотири параметри (рис.11.9).

Відмітимо, що параметри  $R_c$  та  $L$  залежать від напруги, тому їх можна вказати лише для одного режиму роботи, наприклад, для режиму при номінальній напрузі.

Якщо відкинути неосновні параметри, то на спрощеній заступній схемі котушки з осердям можна залишити лише нелінійну індуктивність, яка обумовлена основним потоком.

ВАХ для діючих значень напруг та струмів подібна залежності  $B(H)$ , тому що для ідеальної котушки  $\Phi \cong U$  та  $(B \cong U)$ , а

$$H = \frac{I \cdot w}{l} \cong I. \text{ Залежність } U(I) \text{ показана на рис. 11.10.}$$

Електромагнітні пристрої проектують таким чином, щоб робоча точка (а) на залежності  $B(H)$  або  $U(I)$ , яка відповідає номінальному режиму (рис. 11.10), була за коліном кривої  $B(H)$ .

**Приклад 11.2.** Котушку з феромагнітним осердям, номінальна напруга якої  $U_H = 220$  В, помилково ввімкнули на лінійну напругу трифазної мережі  $U = 380$  В. Яким стане, по відношенню до номінального, струм в котушці.

#### Розв'язок

З ВАХ (рис.11.10) бачимо, що при збільшенні напруги у  $\frac{380}{220} = 1,73$  разів, струм збільшиться від номінального в десятки разів.

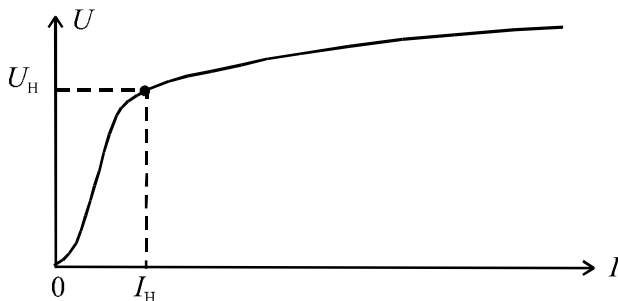


Рис.11.10

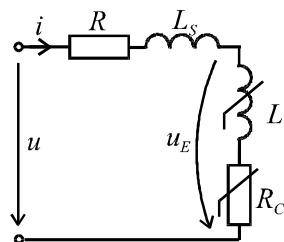


Рис. 11.9



Відмітимо, що в лінійному колі струм збільшився б пропорційно збільшенню напруги, тобто тільки в 1,73 рази.

*Приклад 11.3.* Номінальному режиму роботи котушки при частоті  $f = 100\text{Гц}$  відповідає напруга  $U = 20\text{В}$ . Як зміниться струм в котушці, якщо її включити на напругу  $20\text{В}$  при  $f = 50\text{Гц}$  ?

*Розв'язок*

1. З рівняння ідеальної котушки очевидно, що  $U \approx U_E$ , де

$$U_E = 4,44 \omega f \Phi_m . \text{ Тоді потік } \Phi_m = \frac{U_E}{4,44 \omega f} \text{ при зменшенні частоти}$$

вдвічі, повинен збільшитися вдвічі.

2. Враховуючи, що характеристика  $\Phi_m(I_m)$  повторює, в іншому масштабі, характеристику рис. 11.2, то потоку  $2\Phi_m$  буде відповідати струм, який в десятки разів перевищує номінальний.

В реальній котушці збільшення дещо менше від наведеного в прикладах 11.2 та 11.3, так, як посилюється вклад неосновних параметрів котушки (рис. 11.9).

Зауважимо, що з метою лінеаризації залежності  $U_L(I)$ , іншими словами – лінеаризації індуктивності, осердя виконують з повітряним зазором. При цьому індуктивність зменшується.

*Приклад 11.4.* Котушка з кількістю витків  $w = 200$  намотана на тороїдальне феромагнітне осердя з площею перетину  $S = 1\text{ см}^2$  та довжиною середньої силової лінії  $l = 12,56\text{ см}$ . Відомо, що котушка працює на лінійній ділянці кривої  $B(H)$  з відносною проникливістю  $\mu' = 1000$ . Визначити індуктивність котушки  $L$  для двох випадків: а) без повітряного проміжку в осерді; б) з поперечним повітряним проміжком  $l_0 = 1\text{ мм}$ .

*Розв'язок.*

Індуктивність котушки без повітряного проміжку

$$L = w^2 \frac{\mu \mu' S}{l} = 200^2 \frac{1000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10^{-4}}{12,56 \cdot 10^{-2}} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ Гн.}$$

Індуктивність котушки з повітряним проміжком

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{w^2}{R_{\mu c} + R_{\mu o}} = \frac{w^2}{\frac{l}{\mu' \mu_0 S} + \frac{l_0}{\mu_0 S}} = \\
 &= \frac{200^2}{\frac{12,56 \cdot 10^{-2}}{10^3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-4}} + \frac{10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-4}}} = \\
 &= \frac{4 \cdot 10^4}{10^6 + 8 \cdot 10^6} = \frac{4}{9} \cdot 10^{-2} \text{ Гн.}
 \end{aligned}$$

Бачимо, що індуктивність зменшилась у 9 разів, але і роль нелінійності, яку вносить осердя, також зменшиться у 9 разів, коли будемо враховувати насичення.

### 11.5. ЯВИЩЕ ФЕРОРЕЗОНАНСУ

Явище ферорезонансу полягає в тому, що при плавній зміні напруги спостерігаються стрибки струму при одночасній зміні фази його основної гармоніки на  $\pm \pi$ . Підкреслимо, що в лінійному колі таке явище принципово неможливо.

Розглянемо послідовне коло з нелінійною індуктивністю та лінійною ємністю (рис. 11.11, а). Котушку будемо вважати ідеальною, для якої реальний струм замінений еквівалентним синусоїдальним. Векторна діаграма для цього кола для випадку  $U_L > U_C$  зображена на рис. 11.11, б. Так як вектори  $\underline{U}_L$  та  $\underline{U}_C$  розташовані на одній прямій, то векторну суму можна замінити алгебраїчною. Це дає нам змогу графічно розв'язати задачу знаходження напруги на послідовному з'єднанні обох елементів, використавши графіки залежностей  $U_L(I)$  та  $U_C(I)$ . Графічний розв'язок рівняння  $U = |U_L(I) - U_C(I)|$  представлено на рис.11.11, в.

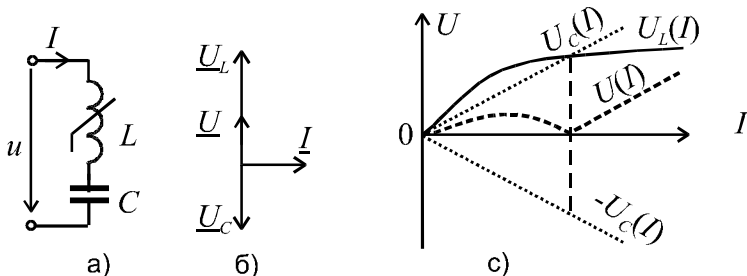


Рис. 11.11

Для реальної котушки, з врахуванням втрат, діюче значення напруги буде описуватись формулою

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}.$$

Відповідна ВАХ кола приведена на рис. 11.12.

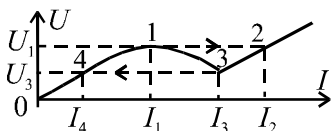


Рис. 11.12

Розглянемо роботу кола з ВАХ за рис. 11.12. При зміні напруги від нуля до  $U_1$  струм плавно змінюється від нуля до  $I_1$ , при цьому він відстає по фазі від напруги ( $U_L > U_C$ ).

Якщо напругу  $U_1$  збільшити на величину  $\Delta U$ , то струм стрибком збільшується до величини  $I_2$ . При цьому після завершення стрибка він вже буде випереджати напругу ( $U_C > U_L$ ). Для ідеальної котушки зміна фази в процесі стрибка змінюється на  $\pi$ . При подальшому збільшенні напруги ВАХ кола однозначна. Якщо напругу будемо зменшувати до величини  $U_3$ , то струм буде зменшуватись до величини  $I_3$ . При напрузі  $U_3 - \Delta U$  відбувається стрибок струму до величини  $I_4$  знову зі зміною його фази приблизно на  $\pi$ .

Ділянка ВАХ 1-3 не може бути знята при живленні від джерела напруги, так як на цій ділянці  $I Z < U$ ;  $\frac{dU}{dI} < 0$ , що характерно для ділянки з нестійким режимом роботи.

Аналітичні розрахунки нелінійних кіл змінного струму значно складніші від аналізу лінійних кіл синусоїдального струму, навіть для

простих схем. Проілюструємо це прикладом.

**Приклад 11.5.** Реальна котушка індуктивності з феромагнітним осердям приєднана до синусоїдальної ЕРС  $e = E_m \sin \omega t$ . Опір котушки  $R$ . Розміри осердя та кількість витків відомі, крива намагнічування  $B(H)$  показана на рис. 11.13. Визначити та побудувати залежності  $i(t)$  та  $\psi(t)$ . Індуктивність вважати ідеальною.

### Розв'язок

1. Враховуючи вузьку петлю гістерезису та практично її прямокутну форму (рис. 11.13. а), застосуємо кусково-лінійну апроксимацію кривої  $B(H)$ , яка показана на (рис. 11.13, б). Залежність  $\psi(i)$  повторює залежність  $B(H)$ , тому що  $\psi = B \cdot S \cdot w$ , а  $i = Hl / w$ .

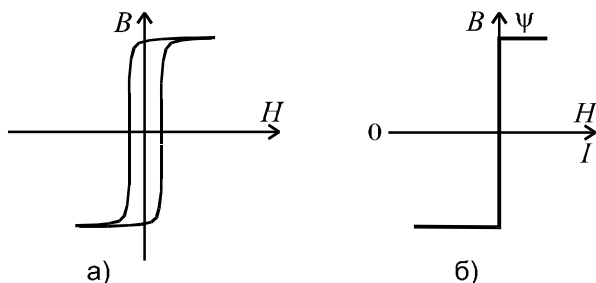


Рис. 11.13

2. Рівняння стану кола

$$\frac{d\psi}{dt} + Ri = E_m \sin \omega t.$$

3. В інтервалі від  $\omega t = 0$  до  $\omega t = \omega t_1$ , коли ЕРС збільшується від нульового значення (рис. 11.14), а потокозчеплення  $\psi$  змінюється по прямій -  $\psi_m \dots + \psi_m$ , струм  $i$  відсутній. Тут індуктивність  $L = \infty$ , і вся напруга джерела прикладена до індуктивності:

$$\frac{d\psi}{dt} = E_m \sin \omega t; \quad \psi = -\frac{E_m}{\omega} \cos \omega t + C.$$

4. В інтервалі  $\omega t_1 \dots \pi$  потокозчеплення  $\psi = \psi_m = const$ , а

значить,  $\frac{d\Psi}{dt} = 0$  ( $L = 0$ ).

Тоді  $Ri = E_m \sin \omega t$  або  $i = \frac{E_m}{R} \sin \omega t$ .

5. Визначаємо постійну  $C$ , для чого в формулу  $\Psi(t)$  підставляємо  $t = 0$  і  $\Psi(0) = -\Psi_m$

$$-\Psi_m = -\frac{E_m}{\omega} + C, \quad \text{звідки} \quad C = -\Psi_m + \frac{E_m}{\omega}.$$

6. Визначаємо  $\omega t_1$ , враховуючи що при  $\omega t_1$   $\Psi = +\Psi_m$ , а  $\Psi_m = -\frac{E_m}{\omega} \cos \omega t_1 - \Psi_m + \frac{E_m}{\omega}$ , звідки  $\omega t_1 = \arccos\left(-\frac{2\omega\Psi_m}{E_m}\right)$ .

7. Графіки залежностей приведені на рис. 11.14.

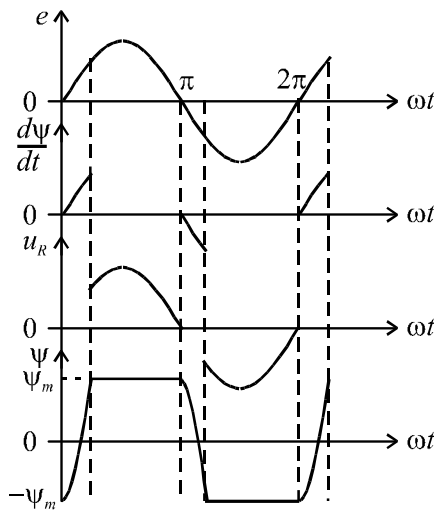


Рис. 11.14

## 11.6. ДО АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В НЕЛІНІЙНИХ КОЛАХ

Перехідні процеси в нелінійних колах мають суттєві особливості. По-перше, тут при дії постійної ЕРС може виникати сталий коливальний режим в колі з одним накопичувачем енергії в залежності від початкових умов, а при дії синусоїдальної ЕРС можуть виникати перехідні струми, максимальні значення яких можуть в десятки разів перевищувати амплітуду струму сталого режиму.

Диференційні рівняння нелінійного кола будуть нелінійними і загального розв'язку не мають. У загальному випадку тут не може бути застосований метод накладання. В якості законів комутації тут застосовуються закон збереження поточкозчеплення  $\psi(+0) = \psi(-0)$  та заряду  $q(+0) = q(-0)$ .

*Перерахуємо основні наближені методи аналізу перехідних процесів в нелінійних колах.*

1. Метод лінійної апроксимації: робоча ділянка нелінійної характеристики замінюється відрізком прямої і аналіз проводиться для постійного параметру.

2. Метод кусково-лінійної апроксимації: тут кожна ділянка характеризується своїм значенням параметру; розв'язок знаходиться для кожної ділянки, при цьому кінцеве значення змінної однієї ділянки є початковою умовою наступної ділянки характеристики.

3. Метод послідовних інтервалів (чисельний метод): тут диференціальне рівняння кола замінюється алгебраїчним рівнянням відносно приростів змінної за рівні інтервали (кроки)  $\Delta t$ . Попередній крок дає дані для наступного кроку шляхом знаходження однієї величини по значенню другої величини в кінці інтервалу  $\Delta t$  по заданій нелінійній характеристиці.

4. Метод аналітичної апроксимації передбачає введення аналітичної функції, яка описує нелінійну характеристику. В деяких випадках підстановка цієї функції в диференціальне рівняння кола дозволяє аналітично розв'язати останнє.

5. Методи графічного інтегрування застосовуються при аналізі перехідних процесів в нелінійних колах з постійними ЕРС. Їх застосовують до розв'язку рівнянь 1-го порядку або другого порядку, які можуть бути зведені до диференціальних рівнянь 1-го порядку. Основний графічний метод відомий в математиці під назвою методу ізоклін.

Приклад 11.6. Проаналізувати перехідний процес при підключенні до котушки з феромагнітним осердям синусоїдальної напруги

### Розв'язок

Рівняння стану кола

$$\frac{d\psi}{dt} + ri = U_m \sin(\omega t + \psi). \quad (11.6)$$

Складемо рівняння відносно потокозчеплення, для чого застосуємо метод лінійної апроксимації і введемо постійну індуктивність  $L$ , яка відповідає амплітудним значенням  $\psi_m$  та  $I_m$  сталого режиму

$$L = \frac{\psi_m}{I_m}.$$

Тоді  $i = \frac{\psi}{L}$ , і рівняння (11.6) приймає вид

$$\frac{d\psi}{dt} + \frac{R}{L}\psi = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

Для лінеаризованого кола розв'язок цього рівняння відомий:

$$\psi = \psi_{np} + \psi_B = \psi_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \psi_m \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t},$$

де:  $\psi_m = \frac{U_m L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}; \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}.$

*Часткові випадки:*

1.  $\psi - \varphi = 0 \Rightarrow \psi = \psi_m \sin \omega t$ , тобто одразу настає сталий режим.

2.  $\psi - \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \psi = \psi_m \cos \omega t - \psi_m e^{-\frac{R}{L}t}$ . При таких параметрах  $R$  та  $L$ , коли  $\tau = \frac{L}{R} \gg T$ , в момент  $t = T/2$  потокозчеплення  $\psi$  наближається до  $2\psi_m$  (рис. 11.15).

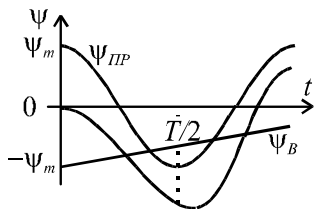


Рис. 11.15

Враховуючи, що робоча точка на нелінійній характеристиці, яка відповідає номінальним значенням амплітуд  $\Psi_{m,n}$  та  $I_{m,n}$ , знаходиться в електротехнічних пристроях за межами лінійної ділянки кривої  $B(H)$  чи  $\psi(i)$ , тобто за коліном кривої, то збільшення практично вдвічі амплітуди поточкозчеплення

обумовлює струм, який при  $t = T/2$  в десятки разів буде перевищувати номінальний струм сталого режиму. Далі перехідний струм поступово зменшується і його амплітуда наближається до  $I_{m,n}$ . На тепловий захист кола цей струм не встигає вплинути, але його потрібно враховувати при розрахунках кріплення обмоток потужних пристроїв (електромагнітні зусилля).

**Приклад 11.7.** Розглянемо виникнення релаксаційних коливань (автоколивань з різко несинусоїдальною формою) в схемі з одним накопичувачем енергії (рис.11.16).

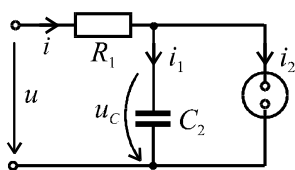


Рис. 11.16

На рис. 11.17, а приведена ВАХ нелінійного елемента – неоновї лампи, а також пряма  $u_c = U_0 - R_1 i_1$ .

При підключенні до кола постійної напруги  $U_0$  в початковий момент напруга  $u_c = 0$  і лампа не горить ( $i_2 \approx 0$ ). Конденсатор починає заряджуватись через опір  $R_1$ , напруга  $u_c$  збільшується за відомим законом  $u_c = U_0(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C}})$ . Коли напруга  $u_c$  досягає значення  $U_2$  (рис. 11.17, б) струм лампи стрибком збільшується до значення  $I_2$ , опір лампи різко зменшується до величини  $R_2 \ll R_1$ .



Конденсатор починає розряджатись на лампу і напруга  $u_C$  зменшується до  $u_C = U_2 e^{-\frac{t-t_1}{R_2 C}}$  ( $R_2$  - середнє значення опору лампи на ділянці характеристики 2-3).

Коли напруга  $u_2 = u_C$  впаде до величини  $U_3 - \Delta U$  струм лампи різко зменшується практично до нуля (точка 4 ВАХ). Далі конденсатор знову починає заряджатись від напруги  $U_3$  до напруги  $U_2$  і процес повторюється.

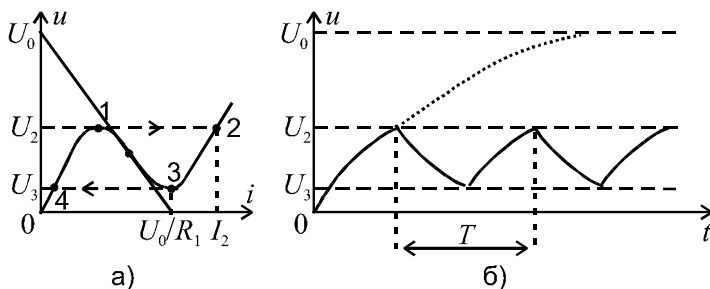


Рис. 11.17

Відмітимо, що автоколивальний процес виникає тоді, коли пряма  $u_C = U_0 - R_1 i_1$  перетинає ВАХ НЕ на ділянці 1-3, де  $R_0 < 0$ . Практично синусоїдальні коливання можна отримати в колі, яке містить два накопичувача енергії: індуктивність та ємність.

### КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 11

1. Класифікація НЕ.
2. Інерційні та безінерційні НЕ.
3. ВАХ реального та ідеального діода.
4. Формула індуктивності котушки з осердям.
5. Особливості котушки з феромагнітним осердям при змінному струмі.
6. Рівняння котушки з осердям.
7. Заступна схема котушки з осердям.
8. Ферорезонанс напруг. ВАХ кола.
9. Особливості перехідних процесів у нелінійних колах змінного струму.

# XII РОЗДІЛ

## ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ

### 12.1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Чотириполіусник – це електричне коло з двома парами полюсів. Як приклади, сюди, в першу чергу, можна віднести пристрої, які включаються між джерелом та навантаженням: трансформатори, фільтри, підсилувачі, лінії тощо.

Якщо до складу чотириполіусника входять тільки пасивні елементи ( $R, L, C$ ), то він називається пасивним, а якщо і активні елементи (керовані чи некеровані джерела) – то активним. На рис. 12.1. показано умовне зображення чотириполіусника з первинними  $1-1'$  та вторинними  $2-2'$  полюсами.

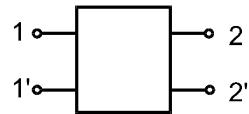


Рис. 12.1

Чотириполіусник, який містить некероване джерело енергії, називають *автономним*. Чотириполіусник, до складу якого входять тільки лінійні елементи, називають *лінійним*.

Якщо при зміні місць підключення джерела і навантаження струм і напруга в навантаженні не змінюється, то чотириполіусник називають *симетричним*, а якщо при такій заміні відношення

$$\frac{U_{ВХ}}{I_{ВИХ}} = const,$$
 то чотириполіусник називають *взаємним*. Всі пасивні прохідні чотириполіусники є взаємними.

Принципово для чотириполіусників підходять всі розглянуті методи аналізу складних кіл, але в теорії чотириполіусників розглядаються додаткові прийоми опису режимів їх роботи.

### 12.2. РІВНЯННЯ ЧОТИРИПОЛЮСНИКІВ

На рис. 12.2,а та 12.2,б показані умовно-позитивні напрями струмів і напруг для пасивних прохідних чотириполіусників та для неавтономних активних чотириполіусників (наприклад, з підсилувачем на транзисторі).

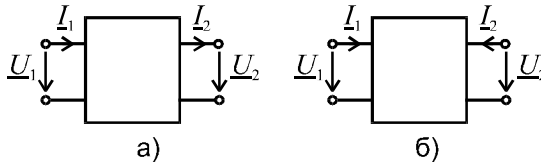


Рис. 12.2

Чотири електричних величини  $\underline{U}_1, \underline{I}_1, \underline{U}_2, \underline{I}_2$  мають шість сполучень по два, тому можливі шість форм систем рівнянь зв'язку. Розглянемо деякі з них.

В  $A$ - формі первинні струм і напруга виражені через вторинні:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2; \\ \underline{I}_1 &= \underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2. \end{aligned} \quad (12.6.)$$

*Примітка.* Використовуються і такі позначення коефіцієнтів  $A$ -форми:  $\underline{A} = \underline{A}_{11}, \underline{B} = \underline{A}_{12}, \underline{C} = \underline{A}_{21}, \underline{D} = \underline{A}_{22}$ .

Встановлено, що для взаємних чотириполюсників

$$\underline{A}\underline{D} - \underline{B}\underline{C} = 1, \quad (12.7)$$

а для симетричних чотириполюсників

$$\underline{A} = \underline{D}. \quad (12.8)$$

В  $Z$ - формі напруги виражені через струми, а значить, коефіцієнтами в рівнянні є опори:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2; \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2. \end{aligned} \quad (12.9)$$

При аналізі електронних схем використовують  $H$ - форму (рис. 12.2)

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{H}_{11}\underline{I}_1 + \underline{H}_{12}\underline{U}_2; \\ \underline{I}_2 &= \underline{H}_{21}\underline{I}_1 + \underline{H}_{22}\underline{U}_2. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Для визначення фізичного змісту коефіцієнтів слід по черзі прирівнювати до нуля одну електричну величину і визначити шуканий параметр по двом величинам, які залишилися.

Наприклад, для  $H$ - форми:

$\underline{H}_{11} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right)_{U_2=0}$  – вхідний опір при короткому замиканні на виході;

$\underline{H}_{21} = \left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\right)_{U_2=0}$  - коефіцієнт передачі (підсилювання) по струму при

короткому замиканні на виході і т. д.

Якщо відомі коефіцієнти однієї форми, то шляхом перетворень рівнянь цієї форми до рівнянь іншої форми можна отримати коефіцієнти останньої.

Далі теорію чотириполюсників розглянемо відносно  $A$ -форми.

### 12.3. ЕКВІВАЛЕНТНІ СХЕМИ ЧОТИРИПОЛЮСНИКІВ

Якщо пасивний чотириполюсник характеризується трьома незалежними коефіцієнтами ( $\underline{AD} - \underline{BC} = 1$ ), то на еквівалентній схемі (рис. 12.3) його можна зобразити трьома опорами. До таких схем відносяться  $T$ -схема (опори з'єднані зіркою) та  $\Pi$ -схема (опори з'єднані трикутником).

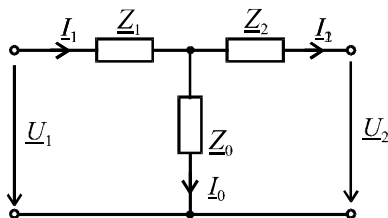


Рис. 12.3

Встановимо зв'язок між параметрами  $T$ -схеми та коефіцієнтами чотириполюсника  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{D}$ . Для цього визначимо  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{I}_1$  через  $\underline{U}_2$ ,  $\underline{I}_2$  та параметри схеми (рис. 12.3), а потім порівняємо ці вирази з рівняннями чотириполюсника у  $A$ -формі.

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_0 = \underline{I}_2 + \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_0} = \frac{1}{\underline{Z}_0} \underline{U}_2 + \left(1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}\right) \underline{I}_2;$$

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{U}_2 = \left[ \frac{1}{\underline{Z}_0} \underline{U}_2 + \left(1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}\right) \underline{I}_2 \right] \cdot \underline{Z}_1 +$$

$$+ \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{U}_2 = \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_0}\right) \underline{U}_2 + \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}\right) \underline{I}_2.$$

Порівняння з системою

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2; \\ \underline{I}_1 &= \underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2. \end{aligned} \right\}$$

встановлює, що:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_0}; \quad \underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}; \\ \underline{C} &= \frac{1}{\underline{Z}_0}; \quad \underline{D} = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Якщо з цього рівняння визначити опори схеми, то отримуємо

$$\underline{Z}_0 = \frac{1}{\underline{C}}; \quad \underline{Z}_1 = \frac{\underline{A}-1}{\underline{C}}; \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{D}-1}{\underline{C}}. \quad (12.12)$$

Зрозуміло, що для симетричного чотириполюсника  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$ , а це має місце при  $\underline{A} = \underline{D}$ .

Можна перевірити, що

$$\underline{A}\underline{D} - \underline{B}\underline{C} = \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_0}\right) \left(1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}\right) - \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}\right) \frac{1}{\underline{Z}_0} = 1.$$

Параметри  $\Pi$ - схеми (рис. 12.4) можна визначити аналогічно або через параметри  $T$ - схеми шляхом застосування формул перетворення зірки та трикутника опорів. Частковим випадком  $T$ - схеми або  $\Pi$ - схеми при відсутності опорів  $\underline{Z}_1$  або  $\underline{Z}_2$  є  $\Gamma$ - схема чотириполюсника.

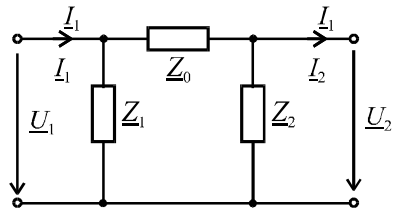


Рис. 12.4

#### 12.4. ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ЧОТИРИПОЛЮСНИКА ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ ВИМІРЮВАНЬ

Розглянутий підхід до визначення коефіцієнтів може застосовуватись при довільній, але відомій схемі пасивного чотириполюсника. В той же час при складних схемах або при невідомих схемах («чорний ящик») застосовуються експериментальні методи визначення коефіцієнтів. Розглянемо один з таких методів, в якому вико-

ристовуються два режими: неробочий режим та режим короткого замикання.

1. В неробочому режимі  $\underline{I}_2 = 0$  і система рівнянь  $A$ - форми приймає вид:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{10} &= \underline{A} \cdot \underline{U}_{20}; \\ \underline{I}_{10} &= \underline{C} \cdot \underline{U}_{20},\end{aligned}$$

де позначка «0» відноситься до неробочого режиму.

Якщо за допомогою вольтметра, амперметра та фазометра отримали  $U_{10}$ ,  $U_{20}$ ,  $\psi_{u_{12}}$ ,  $I_{10}$ ,  $\phi_{10}$ , тоді:

$$\underline{A} = \frac{U_{10}}{U_{20}} e^{-j\psi_{12}}; \quad \underline{C} = \frac{I_{10}}{U_{20}} = \frac{U_{10}}{I_{10}} e^{-j\phi_{10}} \Rightarrow \underline{C}.$$

Застосовуючи аналогічний підхід в досліді короткого замикання ( $\underline{U}_2 = 0$ ), можна визначити коефіцієнти  $\underline{B}$  і  $\underline{D}$ .

Якщо неможливо включити фазометр між входом та виходом чотириполюсника (наприклад, в довгій лінії), то коефіцієнти чотириполюсника знаходять через вхідні опори неробочого режиму та короткого замикання.

Визначивши коефіцієнти чотириполюсника  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{D}$ , можна замінити чотириполюсник будь-якої складності еквівалентною схемою з трьома опорами. Однак, слід пам'ятати, що і коефіцієнти  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{D}$ , і опори  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$ ,  $\underline{Z}_0$  дійсні тільки для однієї частоти.

## 12.5. ХАРАКТЕРИСТИЧНІ ПАРАМЕТРИ ТА УЗГОДЖЕНИЙ РЕЖИМ РОБОТИ ЧОТИРИПОЛЮСНИКА

Характеристичним опором симетричного чотириполюсника називають такий опір  $\underline{Z}_c$ , який, після підключення його до вихідних полюсів, обумовлює вхідний опір

$$\underline{Z}_{1_{BX}} = \underline{Z}_c. \quad (12.13)$$

Якщо опір навантаження  $\underline{Z}_H$  дорівнює характеристичному опору  $\underline{Z}_c$ , то кажуть, що навантаження узгоджене з чотириполюсником.

Визначимо опір  $\underline{Z}_c$  через коефіцієнти чотириполюсника

$$\underline{Z}_{1BX} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2}{\underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2} = \frac{\underline{A} \cdot \underline{I}_2 \underline{Z}_C + \underline{B}\underline{I}_2}{\underline{C}\underline{I}_2 \underline{Z}_C + \underline{D}\underline{I}_2} = \frac{\underline{A}\underline{Z}_C + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_C + \underline{D}} = \underline{Z}_C,$$

звідки

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\underline{B}/\underline{C}}. \quad (12.14)$$

Порівняємо напруги на вході та виході в узгодженому режимі

$$\begin{aligned} \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} &= \frac{\underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B} \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C}}{\underline{U}_2} = \\ &= \underline{A} + \sqrt{\underline{B}\underline{C}} = Me^{j\beta} = e^\alpha \cdot e^{j\beta} = e^\gamma, \end{aligned} \quad (12.15)$$

де:  $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$  - коефіцієнт розповсюдження;  $\alpha$  - коефіцієнт затухання;  $\beta$  - коефіцієнт фази.

Як і у довгої лінії коефіцієнт  $\underline{\gamma}$  називають вторинним параметром чотириполюсника.

Таким чином, в узгодженому режимі для симетричного чотириполюсника  $\underline{U}_1 = \underline{U}_2 e^\gamma$ ;  $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 e^\gamma$ .

## 12.6. АНАЛІЗ СХЕМ З ОПЕРАЦІЙНИМ ПІДСИЛЮВАЧЕМ

Операційний підсилювач (ОП) відноситься до активних неавтономних багатополіусників.

ОП – це підсилювач напруги з широкою смугою пропускання, великими коефіцієнтом підсилення і вхідним опором, який має диференційний вхід. Операційний підсилювач виконується у виді інтегральної мікросхеми. На рис. 12.5 показано умовне графічне зображення (УГЗ) ОП.

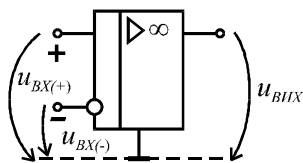


Рис. 12.5

Коефіцієнт підсилення реального ОП сягає  $10^5$ , а ідеального -  $\infty$ . На УГЗ знаком «+» показаний неінвертуючий вхід, а знаком «-» – інвертуючий вхід. Тоді:

$$u_{BX} = u_{BX(+)} - u_{BX(-)};$$

$$u_{BHX} = k_u \cdot u_{BX}.$$

Для ідеального ОП  $k_u = \infty$  і  $R_{BX} = \infty$ , а це значить що кінцеве значення  $u_{BIX}$  може бути отримано при  $u_{BX} = 0$  та  $i_{BX} = 0$ . Особливий інтерес представляють схеми зі зворотним зв'язком, тому що вони дозволяють отримати чітко визначений коефіцієнт підсилення та інші операції (дії) над вхідним сигналом.

Розглянемо приклад схеми, яка зведена до чотирьохполюсника, а ОП має зворотній зв'язок (рис. 12.6).

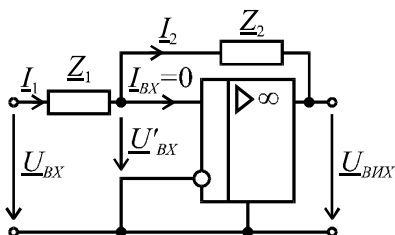


Рис. 12.6

Запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа:

$$-U_{BX} + I_1 Z_1 + U'_{BX} = 0;$$

$$U_{BIX} - U'_{BX} + I_1 Z_2 = 0.$$

Для зовнішнього контуру враховано, що  $I_1 = I_2$ , тому що  $I_{BX} = 0$ .

Якщо  $U'_{BX} = 0$ , то отримаємо коефіцієнт передачі

$$\underline{k}_u = \frac{U_{BIX}}{U_{BX}} = \frac{-I_1 Z_2}{I_1 Z_1} = -\frac{Z_2}{Z_1}.$$

Тобто, для наведеної схеми з ідеальним ОП коефіцієнт  $\underline{k}_u$  визначається тільки опорам  $Z_1$  та  $Z_2$ .

Розглянемо варіанти підключення опорів  $Z_1$  та  $Z_2$ , які показані на рис. 12.7 та рис. 12.8.

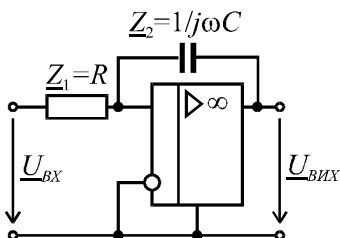


Рис. 12.7

Для схеми рис. 12.7

$$\underline{k}_u = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{1}{j\omega C R} = -\frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{RC}.$$

З врахуванням того, що  $\frac{1}{j\omega} \div \int dt$ , маємо ідеальне інтегруюче коло.



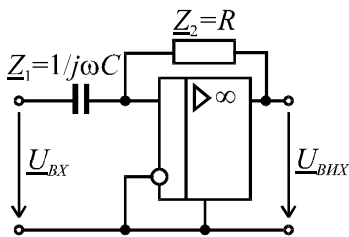


Рис. 12.8

Для схеми рис. 12.8

$$\underline{k}_u = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} = -\frac{R}{1/j\omega C} = -j\omega RC.$$

З врахуванням того, що  $j\omega \div \frac{d}{dt}$ , маємо ідеальне диференціююче коло.

Якщо  $\underline{Z}_1 = R_1$ , а  $\underline{Z}_2 = R_2$ , то

$$\underline{k}_u = -\frac{R_2}{R_1},$$

і маємо просто підсилювач з потрібним коефіцієнтом підсилення, який при цьому інвертує вхідний сигнал. Якщо  $R_1 = R_2$ , то  $\underline{k}_u = -1$  і схема тільки інвертує вхідний сигнал.

**Приклад 12.1.** Розрахувати  $A$  – параметри симетричного мостового чотириполюсника по рис. 12.9, якщо відомо:  $R_1 = 3$  Ом;  $R_2 = 6$  Ом. Визначити параметри еквівалентної  $T$  - схеми.

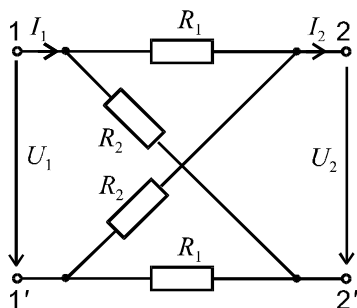


Рис. 12.9

**Розв'язок.**

1. Застосуємо неробочий режим та режим короткого замикання.

2. В неробочому режимі

$$I_2 = 0.$$

Складаємо рівняння Кірхгофа для контуру 1 – 2 – 2' – 1

$$I_{R_1} \cdot R_1 + U_2 - I_{R_2} \cdot R_2 = 0,$$

або:

$$\frac{U_1}{R_1 + R_2} R_1 - \frac{U_1}{R_1 + R_2} R_2 + U_2 = 0.$$

$$\text{Звідки } U_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_2 - R_1} U_2.$$

Порівнюючи з рівнянням  $U_1 = AU_2 + BI_2$  при  $I_2 = 0$  встановлюємо, що

$$A = \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1} = \frac{6 + 3}{6 - 3} = 3.$$

3. Визначимо струм  $I_1$  в неробочому режимі

$$\begin{aligned} I_1 = I_{R_1} + I_{R_2} &= 2 \cdot \frac{U_1}{R_1 + R_2} = 2 \cdot \frac{1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2 - R_1} \cdot U_2 = \\ &= \frac{2}{R_2 - R_1} U_2. \end{aligned}$$

Таким чином,  $C = \frac{2}{R_2 - R_1} = \frac{2}{6 - 3} = \frac{2}{3}$  См.

4. В режимі короткого замикання (рис. 12.10) вихідний струм:

$$I_2 = I_{R_1} - I_{R_2} = \frac{U_1}{2} \cdot \frac{1}{R_1} - \frac{U_1}{2} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{U_1}{2} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_2 \cdot R_1},$$

звідки  $U_1 = 2 \frac{R_2 \cdot R_1}{R_2 - R_1} I_2$ .

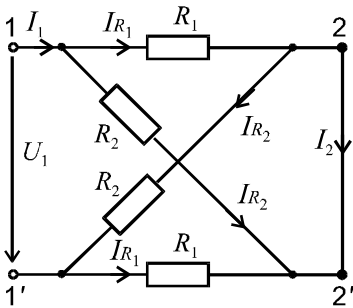


Рис. 12.10

Порівнюючи з рівняннями  $U_1 = AU_2 + BI_2$  при  $U_2 = 0$ , встановлюємо, що

$$B = 2 \frac{R_2 \cdot R_1}{R_2 - R_1} = 2 \frac{6 \cdot 3}{6 - 3} = 12 \text{ Ом.}$$

5. З рівняння  $AD - BC = 1$  знаходимо

$$D = \frac{1 + B \cdot C}{A} = \frac{1 + 12 \cdot \frac{1}{3}}{3} = 3.$$

(Хоча для симетричного чотириполюсника можна було б одразу записати  $A = D = 3$ ).

6. Параметри еквівалентної  $T$ - схеми (рис. 12.11):

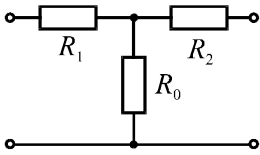


Рис. 12.11

$$R_0 = \frac{1}{C} = \frac{3}{2} \text{ Ом};$$

$$R_1 = \frac{A-1}{C} = \frac{3-1}{2/3} = 3 \text{ Ом};$$

$$R_2 = R_1 = 3 \text{ Ом}.$$

**Приклад 12.2.** Для чотириполюсника («чорного ящика») проведені вимірювання в неробочому режимі, в режимі короткого замикання і отримані такі результати:

а) неробочий режим ( $I_2 = 0$ ):

$$U_{10} = 20 \text{ В}; I_{10} = 1 \text{ А}; \varphi_{10} = -53^\circ; U_{20} = 5 \text{ В}; \psi_{12} = +37^\circ.$$

б) режим короткого замикання:

$$U_{1k} = 20 \text{ В}; I_{1k} = 1,03 \text{ А}; \varphi_{1k} = -46^\circ.$$

Визначити коефіцієнти чотириполюсника та параметри еквівалентної  $T$ -схеми.

**Розв'язок.**

1. Рівняння  $A$ -форми при  $I_2 = 0$  мають вид:

$$\underline{U}_{10} = \underline{A} \underline{U}_{20}; \quad \underline{I}_{10} = \underline{C} \underline{U}_{20}.$$

Тоді 
$$\underline{A} = \frac{U_{10}}{U_{20}} e^{-j\psi_{12}} = \frac{20}{5} e^{-j37^\circ} = 4e^{-j37^\circ};$$

$$\underline{C} = \frac{U_{10}}{I_{10}} e^{-j\varphi_{10}} = \frac{20}{1} e^{+j53^\circ} = 20e^{j53^\circ};$$

$$\underline{C} = \frac{4e^{-j37^\circ}}{20e^{j53^\circ}} = 0,2e^{-j90^\circ} = -j0,2 \text{ См}.$$

2. При  $U_2 = 0$  рівняння  $A$ -форми мають вид:

$$\underline{U}_{1k} = \underline{B} \underline{I}_{2k}; \quad \underline{I}_{1k} = \underline{D} \underline{I}_{2k}.$$

$$\text{Тоді } \frac{\underline{B}}{\underline{D}} = \frac{U_{1k}}{I_{1k}} e^{-j\varphi_{1k}} = \frac{20}{1,03} e^{j46^{\circ}} = 19,5 e^{j46^{\circ}}.$$

3. З рівняння  $\underline{A}\underline{D} - \underline{B}\underline{C} = 1$  знаходимо

$$\underline{A} - \frac{\underline{B}}{\underline{D}} \underline{C} = \frac{1}{\underline{D}}.$$

Визначимо ліву частину:

$$4e^{-j37^{\circ}} - 19,5e^{j46^{\circ}} \cdot 0,2e^{-j90^{\circ}} = 4e^{-j37^{\circ}} - 3,9e^{-j44^{\circ}} = \\ = 3,2 - j2,4 - 2,8 + j2,7 = 0,4 + j0,3 = 0,5e^{j37^{\circ}}.$$

$$\text{Тоді } \underline{D} = \frac{1}{0,5e^{j37^{\circ}}} = 2e^{-j37^{\circ}}.$$

4. Параметри  $T$ - схеми:

$$\underline{Z}_0 = \frac{1}{\underline{C}} = \frac{1}{-j0,2} = j5 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{A}-1}{\underline{C}} = \frac{4e^{-j37^{\circ}} - 1}{-j0,2} = 12 + j11 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{D}-1}{\underline{C}} = \frac{2e^{-j37^{\circ}} - 1}{-j0,2} = 6 + j3 \text{ Ом}.$$

Таким чином, схема має вид (рис. 12.12).

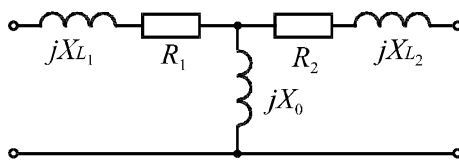


Рис. 12.12

Таку еквівалентну схему має повітряний трансформатор.

*Приклад 12.3.* Для чотириполюсника по схемі рис. 12.13 задані

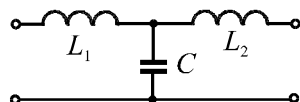


Рис. 12.13

$X_{L_1} = X_{L_2} = 50\text{ Ом}; X_C = 100\text{ Ом}$ . Розрахувати: 1) опір навантаження для узгодженого режиму роботи; 2) напругу на вході чотириполюсника  $\underline{U}_1$ , яка забезпечить на навантаженні напругу  $\underline{U}_2 = 10\text{ В}$ ; 3) коефіцієнт розповсюдження  $\underline{\gamma}$ .

*Розв'язок.*

1. Визначаємо коефіцієнти  $A$ - форми чотириполюсника, використовуючи формули зв'язку між опорами  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_0$  та коефіцієнти  $A, B, C, D$   $T$ - схеми:

$$\underline{A} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_0} = 1 + \frac{jX_{L_1}}{-jX_C} = 1 + \frac{j5}{-j10} = \frac{1}{2};$$

$$\underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_0} = jX_{L_1} + jX_{L_2} + \frac{jX_{L_1} \cdot jX_{L_2}}{-jX_C} = j5 + j5 + \frac{j5 \cdot j5}{-j10} = j7,5\text{ Ом};$$

$$\underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_0} = \frac{1}{-j10} = j0,1\text{ См};$$

$$\underline{D} = \underline{A} = \frac{1}{2}.$$

2. В узгодженому режимі опір навантаження дорівнює характеристичному опору

$$\underline{Z}_H = \underline{Z}_C = \sqrt{\underline{B}/\underline{C}} = \sqrt{j7,5/j0,1} = 8,66\text{ Ом}.$$

3. Напруга на вході

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2 = \underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{2} \cdot 10 + j7,5 \cdot \frac{10}{8,66} = \\ &= 5 + j8,66 = 10e^{j60^\circ}\text{ В}. \end{aligned}$$

4. Коефіцієнт розповсюдження визначаємо з відношення

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{10e^{j60^\circ}}{10} = e^{j60^\circ}.$$

Враховуючи, що в узгодженому режимі  $\underline{U}_1 = \underline{U}_2 e^{\gamma}$ , то в нашому випадку  $\underline{\gamma} = j\beta = j60^\circ$  ( $\beta = 60^\circ$  - коефіцієнт фази;  $\alpha = 0$  - коефіцієнт затухання).

*Примітка.* Коефіцієнт розповсюдження можна визначити також без напруг  $\underline{U}_1$  та  $\underline{U}_2$  з формули  $\underline{A} + \sqrt{\underline{B} \cdot \underline{C}} = e^{\gamma}$ . Якщо в цю формулу підставимо числові значення, то отримуємо

$$\frac{1}{2} + \sqrt{j7,5 \cdot j0,1} = \frac{1}{2} + j0,866 = e^{j60^\circ}; \quad \underline{\gamma} = j60^\circ.$$

### 12.7. СКЛАДНІ ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ

*Складними* називаються чотириполюсники, які можна представити у вигляді з'єднання декількох простих чотириполюсників, параметри яких визначаються простіше. Якщо відомі параметри простих чотириполюсників, то через них можна виразити та знайти параметри складного чотириполюсника.

Розрізняють п'ять основних способів з'єднання чотириполюсників: послідовне, паралельне, послідовно-паралельне, паралельно-послідовне та каскадне. Розглянемо деякі види з'єднань:

**Послідовне з'єднання (рис.12.14)**

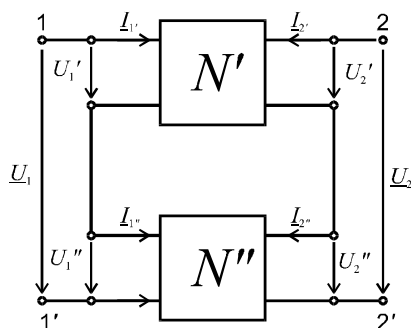


Рис 12.14

Послідовне з'єднання характеризується співвідношеннями

$$\begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{U}_1' \\ \underline{U}_2' \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{U}_1'' \\ \underline{U}_2'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{U}_1' + \underline{U}_1'' \\ \underline{U}_2' + \underline{U}_2'' \end{Bmatrix} \quad \text{та} \quad \begin{Bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{I}_1' \\ \underline{I}_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{I}_1'' \\ \underline{I}_2'' \end{Bmatrix}$$

Тому

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{I}'_2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \underline{Z}'_{11} & \underline{Z}'_{12} \\ \underline{Z}'_{21} & \underline{Z}'_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{Z}''_{11} & \underline{Z}''_{12} \\ \underline{Z}''_{21} & \underline{Z}''_{22} \end{pmatrix} \right\} \times \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}'_{11} & \underline{Z}'_{12} \\ \underline{Z}'_{21} & \underline{Z}'_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{Z}''_{11} & \underline{Z}''_{12} \\ \underline{Z}''_{21} & \underline{Z}''_{22} \end{pmatrix} \quad (12.16)$$

При послідовному з'єднанні матриця  $\underline{Z}$ -параметрів складного чотириполюсника дорівнює сумі матриць  $\underline{Z}$ -параметрів простих чотириполюсників, які він містить.

#### Паралельне з'єднання (рис.12.15)

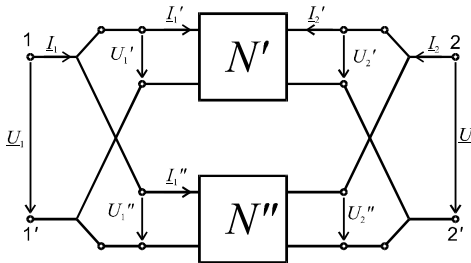


Рис 2.15

Паралельне з'єднання характеризується співвідношеннями:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{U}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U}''_1 \\ \underline{U}''_2 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{I}'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{I}''_1 \\ \underline{I}''_2 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$\begin{pmatrix} \underline{Y}_1 \\ \underline{Y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \underline{Y}'_{11} & \underline{Y}'_{12} \\ \underline{Y}'_{21} & \underline{Y}'_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{Y}''_{11} & \underline{Y}''_{12} \\ \underline{Y}''_{21} & \underline{Y}''_{22} \end{pmatrix} \right\} \times \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix},$$

тобто

$$\|\underline{Y}\| = \|\underline{Y}'_{11}\| + \|\underline{Y}'_{12}\| \quad (2.17)$$

При паралельному з'єднанні матриця  $\underline{Y}$ -параметрів складного чотириполюсника дорівнює сумі матриць  $\underline{Y}$ -параметрів простих чотириполюсників, які він містить.

Каскадне з'єднання (рис. 12.16)

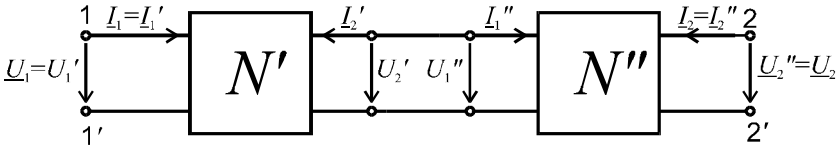


Рис 2.16

Каскадне з'єднання чотириполюсників характеризується співвідношеннями:

$$\begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{I}'_1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \underline{U}'_2 \\ \underline{I}'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{U}''_1 \\ \underline{I}''_1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \underline{U}''_2 \\ \underline{I}''_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix}$$

Тоді

$$\begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{I}'_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{A}' & \underline{B}' \\ \underline{C}' & \underline{D}' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \underline{U}'_2 \\ \underline{I}'_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \underline{A}' & \underline{B}' \\ \underline{C}' & \underline{D}' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{I}'_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{A}' & \underline{B}' \\ \underline{C}' & \underline{D}' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \underline{A}'' & \underline{B}'' \\ \underline{C}'' & \underline{D}'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix},$$

тобто

$$\begin{vmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{A}' & \underline{B}' \\ \underline{C}' & \underline{D}' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \underline{A}'' & \underline{B}'' \\ \underline{C}'' & \underline{D}'' \end{vmatrix} \quad (2.18)$$

При каскадному з'єднанні матриця  $\underline{A}$ -параметрів складного чотириполюсника дорівнює добутку матриць  $\underline{A}$ -параметрів простих чотириполюсників, які він містить.



## 12.8. ГІРАТОР-НЕВЗАСМНИЙ ЧОТИРИПОЛЮСНИК

Гіратором називають трьохполюсний елемент, значення напруг і струмів на його полюсах зв'язані співвідношенням

$$I_1 = gU_2; \quad I_2 = -gU_1 \quad (12.19)$$

де  $g$  - коефіцієнт гірації або гіраторна провідність.

На рис.12.17 показані графічне позначення гіратора (а) та його еквівалентна схема (б).

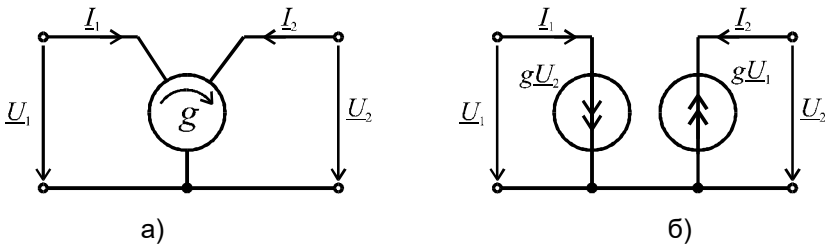


Рис 2.17

Вхідний опір гіратора

$$Z_{BX1} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{1}{g^2 Z_H} \quad (12.20)$$

Отже, якщо  $Z_H = \frac{1}{j\omega C}$ , маємо  $Z_{ex} = \frac{j\omega C}{g^2} = j\omega L_{екв}$ ,

$$\text{де } L_{екв} = \frac{C}{g^2}.$$

Отже гіратор трансформує характер опору, і можна створити еквівалентний індуктивний опір без котушки індуктивності, що важливо в мікроелектроніці.

З практичною реалізацією гіратора можна ознайомитись в [8]

### КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 12

1. Симетричний та взаємний чотириполюсники.
2. Рівняння чотириполюсника в А-формі, Z-формі, Y-формі, H-формі.
3. Зв'язок коефіцієнтів А, В, С, Д для взаємного чотириполюсника.
4. Зв'язок коефіцієнтів А, В, С, Д для симетричного чотириполюсника.

5. Т і П-схеми чотириполюсників.
6. Зв'язок опорів Т-схеми з коефіцієнтами А, В, С, Д.
7. Узгоджений режим роботи чотириполюсника.
8. Міра передачі симетричного чотириполюсника.
9. Особливості аналізу схем з операційними підсилювачами.
10. Послідовне, паралельне та каскадне з'єднання чотириполюсників. Матриці параметрів еквівалентних чотириполюсників.



## ВСТУП ДО ТЕОРІЇ СИНТЕЗУ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

### 13.1. ХАРАКТЕРИСТИКА СИНТЕЗУ

Синтез лінійного електричного кола – це визначення структури кола та числових значень її елементів  $R$ ,  $L$ ,  $C$  по заданій операторній характеристиці кола.

Для двополюсника операторною характеристикою є вираз для вхідного опору  $Z_{BX}(p)$ , а для чотириполюсника – вираз для передаточної характеристики  $K(p)$ . Замість операторних характеристик використовуються також частотні характеристики  $Z_{BX}(j\omega)$ ,  $K(j\omega)$ .

Одній операторній характеристиці може відповідати декілька схемних рішень, а в деяких випадках операторна характеристика не може бути реалізована позитивними значеннями параметрів  $R$ ,  $L$ ,  $C$ .

Тому задача синтезу складається з двох етапів:

1. По заданій операторній (частотній) характеристиці встановлюється фізична можливість побудови кола.

2. Методами теорії синтезу визначається структура і параметри кола, яке має задану характеристику. Враховуючи неоднозначність розв'язку, процес синтезу суміщають з процесом оптимізації, обирають схему з меншою кількістю елементів або з меншою кількістю індуктивностей та інше.

Далі розглянемо приклади реалізації пасивних двополюсників деякими з методів синтезу.

### 13.2. УМОВИ МОЖЛИВОСТІ ПОБУДОВИ ПАСИВНИХ ДВОПОЛЮСНИКІВ

Запишемо вираз  $Z_{BX}(p)$  у виді відношення поліномів

$$Z_{BX}(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p_{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}. \quad (13.1)$$

Операторна характеристика може бути реалізована пасивним двополюсником при виконанні умов:

1. Всі коефіцієнти  $a_k$  та  $b_k$  повинні бути позитивними.
2. Степінь поліному чисельника  $n$  не може відрізнятись від степені поліному знаменнику  $m$  більш ніж на одиницю.
3. Нулі операторної функції (корені рівняння  $Z(p) = 0$ ) та її полюси (корені рівняння  $Z(p) = \infty$ ) повинні бути розташовані в лівій частині комплексної площини  $p$ .
4. Нулі, які розташовані на уявній осі площини  $p$ , повинні бути прості.
5. При заміні  $p \rightarrow j\omega$  повинно бути  $\operatorname{Re}Z(j\omega) \geq 0$  при будь-якому значенні  $\omega$ .

### 13.3. РЕАЛІЗАЦІЯ ДВОПОЛЮСНИКІВ МЕТОДОМ ПОСЛІДОВНОГО ВИДІЛЕННЯ ПРОСТИХ СКЛАДОВИХ (МЕТОД ФОСТЕРА)

Суть методу полягає в тому, що заданий вираз  $Z(p)$  представляють у виді

$$Z(p) = a_{\infty}p + \frac{a_0}{p} + \sum_{i=1}^n \frac{2a_i p}{p^2 + \omega_i^2} + Z_1(p). \quad (13.2)$$

Першій та другій складовим відповідають послідовно з'єднані індуктивність  $L = a_{\infty}$  та ємність  $C = \frac{1}{a_0}$ . Кожній складовій  $\frac{2a_i p}{p^2 + \omega_i^2}$  відповідає ідеальний паралельний резонансний контур з ємністю  $C_i = \frac{1}{2a_i}$  та індуктивністю  $L_i = \frac{2a_i}{\omega_i}$ , а їх кількість дорівнює  $n$  ( $n$  - число пар чисто уявних комплексно – спряжених полюсів функції  $Z(p)$ ). Такі контури з'єднуються послідовно. Залишок  $Z_1(p)$  представляє функцію, яка не має полюсів на уявній осі.

Таким чином, в загальному випадку схемна реалізація двополюсника при використанні цього методу має вид, представлений на рис. 13.1.

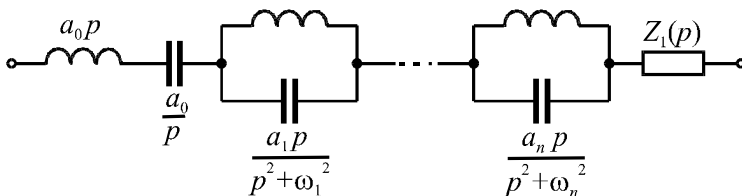


Рис. 13.1

Коефіцієнти в розкладанні, отже і параметри схеми, визначають таким чином

$$a_{\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} Z(p)/p; \quad a_0 = \left[ \frac{N(p)}{M'(p)} \right]_{p=0}; \quad a_i = \left[ \frac{N(p)}{M'(p)} \right]_{p=j\omega_i}.$$

Відносно  $Z_1(p)$  в розкладанні можливі такі варіанти:

а)  $Z_1(p) = b_0$  - йому відповідає активний опір  $R = b_0$ ;

б)  $Z_1(p) = \frac{a_k p}{p + m_k}$  - йому відповідає паралельне з'єднання

елементів  $R_k$  та  $L_k$  ( $R_k = a_k; L_k = \frac{a_k}{m_k}$ );

в)  $Z_1(p) = \frac{b_k}{p + d_k}$  - йому відповідає паралельне з'єднання

елементів  $R_k$  та  $C_k$ , ( $R_k = \frac{b_k}{d_k}; C_k = \frac{1}{b_k}$ ).

В загальному випадку складові пунктів "б" та "в" можуть бути у вигляді сум.

Взагалі  $Z_1(p)$  притаманне двополюснику з втратами. При відсутності в розкладанні  $Z_1(p)$  двополюсник буде без втрат, тобто складений з чисто реактивних елементів.

Процес синтезу методом Фостера проводиться в такій послідовності:

1) діленням  $\frac{N(p)}{M(p)}$  виділяємо цілу частину

$$Z(p) = a_{\infty} \cdot p + \frac{N_1(p)}{M(p)};$$

2) знаходимо полюси  $p = 0$  та  $p = \pm j\omega$  дробу, розв'язуючи рівняння  $M(p) = 0$ ;

3) знаходимо коефіцієнти:

$$a_0 = \left[ \frac{N_1(p)}{M'(p)} \right]_{p=0}; \quad a_i = \left[ \frac{N_1(p)}{M'(p)} \right]_{p=j\omega_i};$$

4) знаходимо залишок  $Z_1(p)$

$$Z_1(p) = Z(p) - \left[ a_{\infty} p + \frac{a_1}{p} + \sum_{i=1}^n \frac{2a_i p}{p^2 + \omega_i^2} \right];$$

5) з врахуванням всіх складових рисуємо схему двополюсника. Зауважимо, що в залежності від виду дробу (13.1) в розкладанні (13.2) можуть бути відсутні ті чи інші складові.

*Приклад 13.1.* Реалізувати двополюсником задану операторну характеристику

$$Z(p) = \frac{p^5 + 6p^3 + 8p}{p^4 + 4p^2 + 3}.$$

*Розв'язок.*

1. Виділяємо цілу частину дробу  $Z(p)$

$$Z(p) = p + \frac{2p^3 + 5p}{p^4 + 4p^2 + 3}.$$

2. Знаходимо полюси відношення  $\frac{N_1(p)}{M(p)}$  з рівняння

$$p^4 + 4p^2 + 3 = 0.$$

Позначимо  $p^2 = y$ . Тоді розв'язок рівняння  $y^2 + 4y + 3 = 0$  дає корені  $y_1 = -1$ ;  $y_2 = -3$ . Отже,  $p_{1,2} = \pm j$ ;  $p_{3,4} = \pm j\sqrt{3}$ .

3. Визначасмо коефіцієнти розкладання:

$$a_1 = \left[ \frac{N_1(p)}{M'(p)} \right]_{p=p_1} = \left[ \frac{2p^3 + 5p}{4p^3 + 8p} \right]_{p=j} = \frac{3}{4};$$

$$a_2 = \left[ \frac{2p^3 + 5p}{4p^3 + 8p} \right]_{p=j\sqrt{3}} = \frac{1}{4}.$$

Корінь  $p = 0$  в  $N(p) = 0$  відсутній, тому коефіцієнта  $a_0$  і відповідно складової  $\frac{a_0}{p}$  в розкладі немає.

4. Залишок  $Z_1(p)$  відсутній.

5. Загальний вид розкладання:

$$Z(p) = p + \frac{2ap}{p^2 + \omega_1^2} + \frac{2a_2p}{p^2 + \omega_2^2} = p + \frac{\frac{3}{2}p}{p^2 + 1} + \frac{\frac{1}{2}p}{p^2 + 3},$$

з якого виходить в відносних одиницях (рис. 13.2):

$$L_\infty = 1; C_1 = \frac{2}{3}; L_1 = \frac{1}{\omega_1^2 C_1} = \frac{3}{2}; C_2 = 2; L_2 = \frac{1}{\omega_2^2 C_2} = \frac{1}{6}.$$

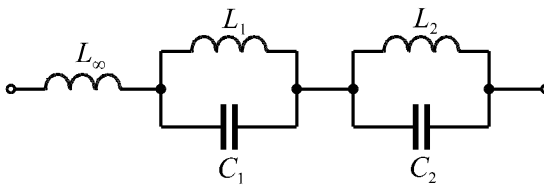


Рис. 13.2

**Приклад 13.2.** Методом Фостера побудувати двополюсник, вхідний опір якого  $Z(p) = (2p^4 + 5p^2 + 2)/(p^3 + p)$ .

*Розв'язок.*

1. Виділяємо цілу частину виразу  $Z(p)$ :

$$Z(p) = 2p + \frac{3p^2 + 2}{p^3 + p},$$

де  $a_\infty = 2$ ;  $L_\infty = 2$  Гн.

2. Знаходимо корені рівняння  $p^3 + p = 0$

$$p_1 = 0; p_{2,3} = \pm j.$$

3. Визначасмо коефіцієнти:

$$a_0 = \left[ \frac{N_1(p)}{M'(p)} \right]_{p=0} = \left[ \frac{3p^2 + 2}{3p^2 + 1} \right]_{p=0} = 2,$$

значить,  $C_0 = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{2} \Phi$ ;

$$a_1 = \left[ \frac{3p^2 + 2}{3p^2 + 1} \right]_{p=j} = \frac{1}{2},$$

значить:  $C_1 = \frac{1}{2a_1} = \frac{1}{1} = 1 \Phi$ ;  $L_1 = \frac{2a_1}{\omega_1} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1} = 1$  Гн.

4. Складова  $Z_1(p)$  відсутня.

5. Схема двополюсника має вид (рис.13.3):

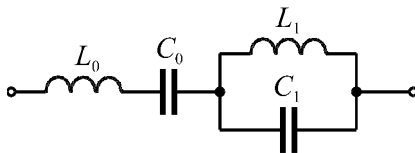


Рис. 13.3

**Приклад 13.3.** Реалізувати двополюсник з операторною характеристикою

$$Z(p) = \frac{p^3 + p^2 + p}{p^3 + p^2 + p + 1}.$$

*Розв'язок.*



1. При однакових величинах степені  $M(p)$  та  $N(p)$  в розкладанні буде відсутня складова  $a_\infty \cdot p$ . Крім того, рівняння  $M(p) = 0$  не має кореня  $p = 0$ , а значить, в схемі відсутня ємність  $C_0$ .

2. Представимо  $Z(p)$  у виді:

$$Z(p) = \frac{p^3 + p^2 + p}{(p^2 + 1)(p + 1)}.$$

3. Наявність коренів  $p_{1,2} = \pm j$  дає коефіцієнт

$$a_1 = \left[ \frac{p^3 + p^2 + 2p}{3p^2 + 2p + 1} \right]_{p=j} = \frac{1}{2},$$

тоді:  $C_1 = \frac{1}{2a_1} = 1 \text{ Ф}$ ;  $L_1 = \frac{2a_1}{\omega_1} = 1 \text{ Гн}$ .

4. Залишок в розкладанні:

$$Z_1(p) = Z(p) - \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{p}{p + 1},$$

якому відповідають  $R = 1 \text{ Ом}$ ;  $L_2 = 1 \text{ Гн}$ .

5. Схема двополюсника (рис. 13.4).

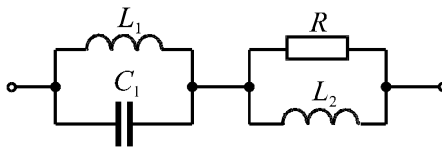


Рис. 13.4

### 13.4. РЕАЛІЗАЦІЯ ДВОПОЛЮСНИКІВ ЛАНЦЮГОВИМИ СХЕМАМИ (МЕТОД КАУЕРА)

Згідно з методом Кауера реактивний двополюсник по заданій операторній характеристиці може бути реалізований по двох канонічних схемах: в першій схемі індуктивності включаються в повздовжні

вітки, а ємності в поперечні (рис. 13.5); а в другій – навпаки.

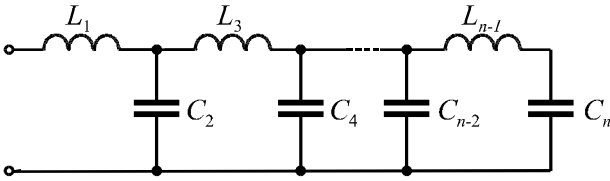


Рис. 13.5

Схемі рис. 13.5 відповідає розкладання операторного вхідного опору у вигляді

$$Z(p) = pL + \frac{1}{pC_2 + \frac{1}{pL_3 + \dots + \frac{1}{pL_{n-1} + 1/pC_n}}} \quad (13.3)$$

Процес розкладання полягає в послідовному виділенні елементів дроби  $Z(p) = M(p)/N(p)$  в результаті ділення полінома  $N(p)$  на поліном  $M(p)$ , потім полінома  $M(p)$  - на залишок  $Z_1(p)$  від першого ділення, потім залишку від першого ділення  $Z_1(p)$  на залишок від другого ділення  $Z_2(p)$  і т. д., поки залишок не буде рівний нулю

$$\begin{aligned} Z(p) &= \frac{N(p)}{M(p)} = Z_1(p) + \frac{Z_1(p)}{M(p)} = Z_1(p) + \frac{1}{M(p)/Z_1(p)} = \\ &= Z_1(p) + \frac{1}{Y_2(p) + \frac{1}{Z_1(p)/Z_2(p)}} = \dots \end{aligned} \quad (13.4)$$

**Приклад 13.4.** Побудувати методом Кауера двополюсник, операторна характеристика якого задана виразом

$$Z(p) = (2p^4 + 5p^2 + 2)/(p^3 + p).$$

*Розв'язок.*

1. Перетворюємо вираз  $Z(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$  до вигляду

$$Z(p) = Z_1(p) + \frac{3_1(p)}{M(p)}, \text{ виділивши цілу частину}$$

$$Z(p) = (2p^4 + 5p^2 + 2) : (p^3 + p) = 2p + \frac{3p^2 + 2}{p^3 + p}.$$

2. Далі виконуємо ділення поліному знаменника на поліном чисельника

$$\frac{1}{M(p) : 3_1(p)} = \frac{1}{(p^3 + p) : (3p^2 + 2)} = \frac{1}{\frac{p}{3} + \frac{p/3}{3p^2 + 2}}$$

і отримаємо  $Y_2(p) = p/3$  та  $3_2(p) = p/3$ .

3. Знаходимо:

$$\frac{1}{3_1(p) : 3_2(p)} = \frac{1}{(3p^2 + 2) : p/3} = \frac{1}{9p + \frac{1}{p/6}},$$

де:  $9p = Z_2(p)$ ;  $p/6 = Y_3(p)$ .

4. Таким чином, ланцюговий дріб буде мати вид

$$Z(p) = 2p + \frac{1}{p/3 + \frac{1}{9p + 1/p/6}}.$$

5. Параметри схеми (рис.13.6):

$$L_1 = 2 \text{ Гн}; C_2 = 1/3 \text{ Ф}; L_3 = 9 \text{ Гн}; C_4 = \frac{1}{6} \text{ Ф}.$$

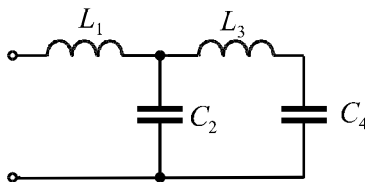


Рис. 13.6

З порівняння розв'язків прикладів 13.2 та 13.4 бачимо, що одна операторна характеристика різними методами реалізується різними схемами.

Більш об'ємна інформація стосовно синтезу двополюсників та чотириполюсників, у тому числі і активних, дана в роботі [1].

### КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 13

1. Задача синтезу електричних кіл.
2. Умови фізичної реалізації заданої операторної характеристики.
3. Сутність метода Фостера.
4. Схемна реалізація складових виразу  $Z_1(p)$  в методі Фостера.
5. Варіанти реалізації залишку  $Z_1(p)$ .
6. Послідовність процесу синтезу методом Фостера.
7. Реалізація двополюсників ланцюговими схемами. Різновиди схем.
8. Навести ланцюговий дріб, коли повздовжні вітки схеми містять індуктивності.
9. Послідовність процесу синтезу.

# XIV РОЗДІЛ

## АНАЛІЗ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ ЧАСОВИМ МЕТОДОМ

(за допомогою  
інтегралів Дюамеля)

### 14.1. ПЕРЕХІДНІ ТА ІМПУЛЬСНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КІЛ

В теорії кіл, наприклад, при увімкненні кола під напругу ми маємо справу з функціями виду:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{нпу } t < 0; \\ \varphi(t) & \text{нпу } t \geq 0. \end{cases} \quad (14.1)$$

Для зручності опису подібних функцій Хевісайд запропонував одиничну функцію або функцію включення (рис. 14.1):

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{нпу } t < 0; \\ 1 & \text{нпу } t \geq 0; \end{cases} \quad (14.2)$$

З врахуванням 14.2 функцію 14.1 можна записати

$$f(t) = \varphi(t) \cdot 1(t), \quad (14.3)$$

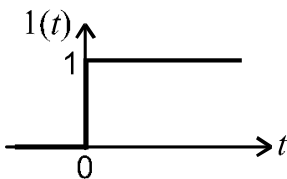


Рис. 14.1

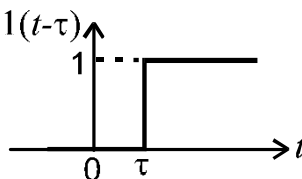


Рис. 14.2

Аналогічно визначається функція  $1(t - \tau)$  (рис. 14.2):

$$1(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{нпу } t < \tau; \\ 1 & \text{нпу } t \geq \tau. \end{cases} \quad (14.4)$$

Множення будь якої функції  $f(t)$  на  $1(t - \tau)$  дає функцію:

$$f(t) \cdot 1(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{нпу } t < \tau; \\ f(t) & \text{нпу } t \geq \tau. \end{cases} \quad (14.5)$$

Стосовно перехідних процесів  $e(t) \cdot 1(t)$  означає, що джерело вмикається в коло при  $t = 0$  (або при  $t = \tau$ ).

Для зручності аналізу кіл при імпульсних діях зі стрибкоподібною зміною ЕРС (їх тривалість приблизно дорівнює тривалості перехідних процесів) Дірак ввів одиничну імпульсну функцію – дельта функцію  $\delta(t)$ , яка дорівнює нулю при всіх значеннях  $t$  крім  $t = 0$ . При  $t = 0$  дельта функція дорівнює нескінченності  $\delta(0) = \infty$  (рис.14.3), а інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (14.6)$$

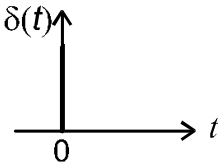


Рис.14.3

Дельта функцію  $\delta(t)$  можна представити як імпульс з нескінченно великою амплітудою та нескінченно малою тривалістю (рис. 14.4). Площа такого імпульсу кінцева і дорівнює одиниці  $S = \tau \frac{1}{\tau} = 1$ .

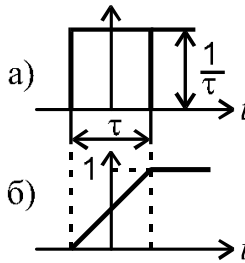


Рис.14.4

Функція рис. 14.4а при  $\tau \rightarrow 0$  перетворюється в дельта-функцію.

Функція рис. 14.4б при  $\tau \rightarrow 0$  перетворюється в  $1(t)$ .

Легко побачити, що функція рис.14.4а є похідна від функції рис.14.4б.Тоді:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \cdot 1(t) \quad (14.7)$$

Аналогічно описується дельта - функція  $\delta(t - \tau)$ , що зміщена відносно нуля (рис.14.5).

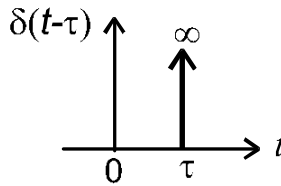


Рис.14.5

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{для всіх } t \neq \tau; \\ \infty & \text{для } t = \tau. \end{cases}$$

Для будь якої неперервної функції при  $t = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt = f(0), \quad (14.8)$$

а при  $t = \tau$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - \tau) dt = f(\tau). \quad (14.9)$$

Тобто, інтеграл від добутку довільної обмеженої функції  $f(t)$  на  $\delta(t - \tau_0)$  дорівнює значенню цієї функції в момент при  $t = \tau_0$  (якщо точка  $\tau_0$  належить інтервалу інтегрування), або дорівнює нулю (якщо не належить інтервалу інтегрування).

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) \delta(t - \tau_0) dt = \begin{cases} f(t_0) & \text{нпу } t_0 \in [t_1; t_2]; \\ 0 & \text{нпу } t_0 \notin [t_1; t_2]. \end{cases} \quad (14.10)$$

Реакцію кола на дію  $l(t)$  або  $\delta(t)$  називають *часовою характеристикою* (перехідною або імпульсною).

Перехідна характеристика – реакція кола при нульових початкових умовах на одиничну функцію  $l(t)$ .

Імпульсна характеристика – реакція кола при нульових початкових умовах на одиничну імпульсну функцію  $\delta(t)$ .

Зовнішня дія може бути напругою або струмом і реакція кола (вихідна величина) може бути напругою або струмом. Тому перехідна (імпульсна) характеристика  $h(t) = \frac{X_{ВИХ}(t)}{X_{ВХ}(t)}$  може бути коефіцієнтом передачі по напрузі чи струму  $k(t)$  (безрозмірна величина), перехідною провідністю  $g(t)$  чи опором.

Незважаючи на різний фізичний зміст перехідних характеристик, можна для них використовувати загальне позначення  $h(t)$ , а для імпульсних характеристик  $a(t)$ .

Перехідні характеристики знаходять шляхом розрахунку перехідного процесу при підключенні джерела ЕРС  $E = 1 В$  (або струму

$I = 1 А$ ). Якщо, наприклад, знаходимо струм  $i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$ , то перехідна характеристика – провідність:

$$g(t) = \frac{i(t)}{E} = \frac{\frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}}{E} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R} e^{-\frac{R}{L}t}. \text{ Зрозуміло, що}$$

$$g_{\delta}(t) = g'(t). \quad (14.11)$$

Для знаходження перехідних характеристик застосовують класичний або операторний метод. При цьому в операторному методі  $1(t) \div \frac{1}{p}$ ;  $\delta(t) \div 1$ .

Приклад 14.1.

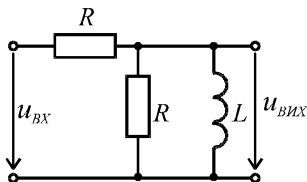


Рис. 14.6

Для схеми (рис.14.6) знайти перехідну характеристику  $k(t) = \frac{u_{ВИХ}(t)}{u_{ВХ}(t)}$ .

Розв'язок



1. Складаємо операторну схему кола (рис. 14.7)

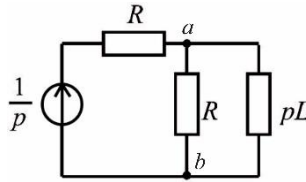


Рис. 14.7

2 За законом Ома:

$$U_{ab}(p) = \frac{\frac{1}{p} \cdot Z_{ab}(p)}{Z(p)} = \frac{\frac{1}{p}}{R + \frac{R \cdot pL}{R + pL}} \cdot \frac{R \cdot pL}{R + pL} = \frac{L}{R + 2pL} = \frac{M(p)}{N(p)}.$$

3. Переходимо до оригіналу напруги  $u_{ab}$  за допомогою формули розкладання

$$N(p) = R + 2pL = 0 \rightarrow p = -\frac{R}{2L}; \quad N'(p) = 2L;$$

$$u_{ab}(t) = \frac{M(p)}{N'(p)} e^{-pt} = \frac{L}{2L} e^{-\frac{R}{2L}t} = \frac{1}{2} e^{-\frac{R}{2L}t}, \text{ В.}$$

4. Знаходимо перехідну характеристику

$$k(t) = \frac{u_{ab}(t)}{1(t)} = \frac{1}{2} e^{-\frac{R}{2L}t}.$$

#### 14.2. АНАЛІЗ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ ПРИ ДІЇ ЕРС ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ ІНТЕГРАЛАМИ ДЮАМЕЛЯ З ВИКОРИСТАННЯМ ПЕРЕХІДНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Представимо напругу довільної форми сумою напруг  $\Delta u(k\Delta\tau)$ , що зміщені на інтервал  $\Delta\tau$  (рис.14.8).

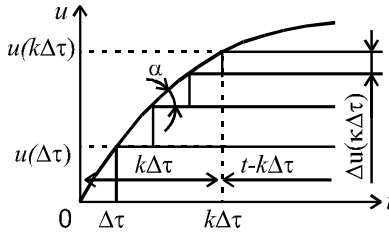


Рис 14.8

$$u(t) = \sum_k \Delta u(k\Delta\tau) \cdot 1(t - k\Delta\tau). \quad (14.12)$$

Реакція кола у вигляді струму на складову  $\Delta u(k\Delta\tau)$ :  
 $\Delta u(k\Delta\tau) \cdot g(t - k\Delta\tau)$ , а повна реакція:

$$i(t) = \sum_k \Delta u(k\Delta\tau) \cdot g(t - k\Delta\tau). \quad (14.13)$$

Представимо

$$\Delta u(k\Delta\tau) \approx \Delta\tau \cdot tg\alpha \approx \Delta\tau \Delta u'(k\Delta\tau) \quad (14.14)$$

Тоді

$$i(t) = \sum_k u'(k\Delta\tau) \cdot g(t - k\Delta\tau) \Delta\tau. \quad (14.15)$$

Якщо  $k \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta\tau \rightarrow d\tau, k\Delta\tau \rightarrow \tau$ .

$$i(t) = \int_0^t u'(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau \quad (14.16)$$

Якщо шукаємо напругу, то замість  $g(t - \tau)$  використовуємо  $k_u(t - \tau)$ .

$$u(t) = \int_0^t u'(\tau) \cdot k_u(t - \tau) d\tau. \quad (14.17)$$

*Послідовність застосування інтегралів Дюамеля*

1. Визначаємо перехідну характеристику  $g(t)$  або  $k(t)$  (Аналізуємо перехідний процес при  $E = 1B$ ).
2. Замінюємо  $t \rightarrow (t - \tau)$  і отримуємо  $g(t - \tau)$  або  $k(t - \tau)$ .
3. Знаходимо  $u'(t)$ .

4. Замінюємо  $t \rightarrow \tau$ :  $u'(\tau)$ .

5. Обчислюємо інтеграл 14.16 чи 14.17.

Розглянемо випадок, коли напруга  $u_1(t)$  має розриви 1-го роду (рис. 14.9).

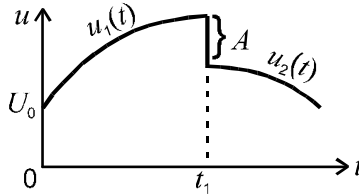


Рис.14.9

На першому інтервалі часу  $t < t_1$  присутній стрибок напруги  $U_0$  при  $t = 0$ , а реакція на нього дорівнює добутку величини стрибка на перехідну характеристику. Тоді струм описується виразом:

$$i_1 = U_0 \cdot g(t) + \int_0^t u_1'(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau \quad (14.18)$$

При  $t > t_1$  реакція кола враховує реакцію на напругу  $u_1(t)$  з межами інтегрування  $0 \dots t_1$ , реакцію на стрибок напруги величиною  $A$  при  $t = t_1$  та реакцію на напругу  $u_2(t)$ , яка діє з моменту  $t_1$ . Реакція кола на стрибок  $A$  в загальному випадку враховується добутком величини стрибка на перехідну характеристику  $g(t - \tau)$ , де замість  $\tau$  підставляється час дії стрибка:

$$\pm A \cdot g(t - \tau). \quad (14.19)$$

Таким чином, при  $t > t_1$  струм описується виразом:

$$i_1 = U_0 \cdot g(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau - A g(t - t_1) + \int_{t_1}^t u_2'(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau. \quad (14.20)$$

Приклад 14.2.

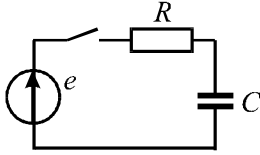


Рис.14.10

Для заданого кола першого порядку (рис. 14.10) визначити струм  $i(t)$  після комутації при дії  $e(t)$  (рис. 14.11).

Параметри:  $A = 5 \text{ В}$ ;  $t_1 = 5 \text{ мс}$ ;  $R = 100 \text{ Ом}$ ;  $C = 100 \text{ мкФ}$ .

*Розв'язок*

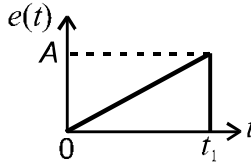


Рис. 14.11

1. Визначаємо перехідну характеристику  $g(t)$  операторним методом. Для цього складаємо операторну схему (рис.14.12) після комутації.

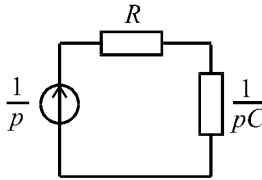


Рис. 14.12

$$I(p) = \frac{\frac{1}{p}}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{C}{pRC + 1} = \frac{M(p)}{N(p)};$$

$$pRC + 1 = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{100 \cdot 10^{-4}} = -100 \text{ с}^{-1};$$

$$N' = RC; \quad i(t) = \frac{C}{RC} e^{pt} = \frac{1}{100} e^{-100t} \text{ A};$$

$$g(t) = \frac{i(t)}{1} = \frac{1}{100} e^{-100t} \text{ Ом}^{-1}.$$

2. Змінну  $t$  замінюємо на  $t - \tau$ , тоді перехідна характеристика

$$g(t - \tau) \text{ матиме вигляд: } g(t - \tau) = \frac{1}{100} e^{-100(t-\tau)}.$$

3. Записуємо закон зміни  $e(t)$  згідно рис.14.11

$$e(t) = kt, \text{ де } k = \frac{A}{t_1} = \frac{5}{5 \cdot 10^{-3}} = 10^3 \text{ B/c}.$$

4. Похідна  $e'(t) = k$ .

5.  $e'(\tau) = k = 10^3 \text{ B/c}$ .

6. Визначаємо струм  $i(t)$  за допомогою інтегралу Дюамеля

для інтервалу  $t \in [0; t_1]$ :

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_0^t 10^3 \frac{1}{100} e^{-100(t-\tau)} d\tau = 10 e^{-100(t)} \int_0^t e^{100\tau} d\tau = \\ &= \frac{10}{100} e^{-100t} \cdot e^{100\tau} \Big|_0^t = 0,1 e^{-100t} (e^{100t} - 1) = 0,1(1 - e^{-100t}). \end{aligned}$$

для інтервалу  $t \in [t_1; \infty)$ :

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_0^{t_1} 10^3 \frac{1}{100} e^{-100t} e^{100\tau} d\tau - \frac{5}{100} e^{-100(t-t_1)} = \\ &= 10 e^{-100t} \cdot \frac{1}{100} (e^{100t_1} - 1) - 0,05 e^{-100t} e^{100t_1} = \\ &= 0,1 e^{-100t} (e^{0,5} - 1) - 0,05 e^{-100t} e^{0,5} = 0,0175 e^{-100t} \text{ A}, \end{aligned}$$

тут  $100t_1 = 100 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 0,5$ .

### 14.3. ІНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ З ВИКОРИСТАННЯМ ІМПУЛЬСНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ

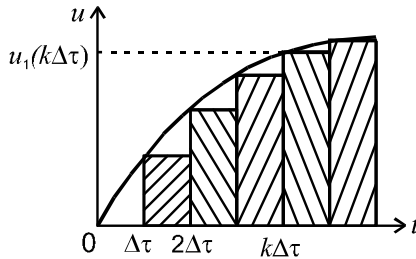


Рис. 14.13

Представимо  $u_1(t)$ , сумою імпульсів  $u_1(k\Delta\tau)$ , що зміщені на  $\Delta\tau$  (рис. 14.13). Реакцією на імпульс  $u_1(k\Delta\tau)$ , буде:

$$u_1(k\Delta\tau) \cdot a(t - k\Delta\tau), \text{ а на всі імпульси у випадку, коли вихідною величиною є напруга } u_2: u_2 = \sum_k u_1(k\Delta\tau) \cdot a(t - k\Delta\tau).$$

При  $k \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta\tau \rightarrow d\tau, k\Delta\tau \rightarrow \tau$ .

$$u_2 = \int_0^t u_1(\tau) \cdot a(t - \tau) d\tau. \quad (14.21)$$

*Послідовність застосування інтегралів Дюамеля*

1. Знаходимо перехідну характеристику  $h(t)$ .
2. Знаходимо похідну  $h(t)$ , тобто імпульсну характеристику  $a(t)$ .
3. Змінну  $t$  замінюємо на  $(t - \tau) \rightarrow a(t - \tau)$ .
4. В формулі вхідної напруги замінюємо  $t$  на  $\tau \rightarrow u_1(\tau)$ .
5. Підставляємо  $u_1(\tau)$  та  $a(t - \tau)$  в інтеграл Дюамеля.

*Примітки*

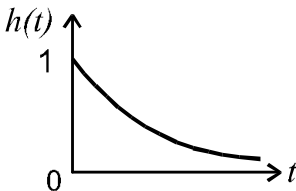


Рис.14.14

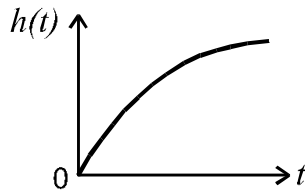


Рис.14.15

1. Якщо  $h(t)$ , має стрибок при  $t = 0$ , наприклад: (рис. 14.14), то  $a(t)$  містить дельта - функцію  $\delta(t)$ , тобто:  
 $a(t) = 1 \cdot \delta(t) + h'(t)$ , де  $h'(t)$  беремо від неперервної функції.  
 Якщо  $h(t)$  починається з нуля (рис. 14.15), складова з  $\delta(t)$  відсутня.
2. Інтеграл (14.21) обчислюється на кожному інтервалі функції  $u_1(t)$ .
3. Під інтегралом (14.21) складова  $1 \cdot \delta(t - \tau)u_1(\tau)$  враховується тільки на першому інтервалі зміни  $u_1(t)$ , а для інших інтервалів дорівнює нулю, тобто, якщо  $u_1(\tau)$  змінюється при  $\tau = t_1$ , то до  $t_1$ , тобто на інтервалі  $t \in [0; t_1[$

$$u_2 = \int_0^t u_1'(\tau)[a(t - \tau)]d\tau = \int_0^t u_1'(\tau)[1 \cdot \delta(t - \tau) + h'(t - \tau)]d\tau.$$

4. Інтеграл (14.21) орієнтовно рівнозначний інтегралу з використанням перехідної характеристики при експоненціальному законі  $u_1(t)$ , а при лінійному законі поступається по складності інтегралу з  $h(t)$ .
5. Реакція на стрибок  $u_1(t)$  інтегралом (14.21) окремо не враховується!

### Приклад 14.3.

Для кола (рис. 14.16) визначити напругу на виході  $u_2(t)$  при дії напруги на вході  $u_1(t)$  (рис. 14.17).

Параметри:  $R = 1 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,01 \text{ Гн}$ ;  $u_1 = 1e^{-200t} \text{ А}$ ;  $t_1 = 0,005 \text{ с}$ ;

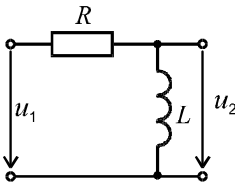


Рис.14 16

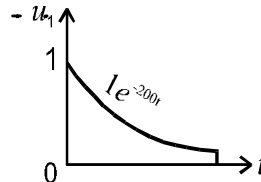


Рис.14 17

### Розв'язок

1. Визначаємо перехідну характеристику  $k(t)$  операторним методом.

$$u_2(p) = \frac{1/p}{R + pL} pL = \frac{L}{R + pL} = \frac{0,01}{1 + 0,01p} = \frac{M(p)}{N(p)}.$$

$$N(p) = 0,01p + 1 = 0 \rightarrow p = -100c^{-1}.$$

$$N'(p) = 0,01; u_2(p) = \frac{0,01}{0,01p} e^{-100t} = 1e^{-100t} B, \quad k(t) = 1e^{-100t}.$$

Графік  $k(t)$  представлено на рис. 14.18.

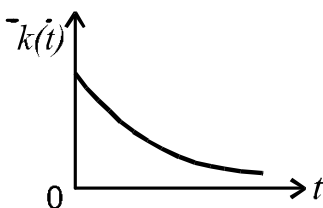


Рис. 14.18

2. Визначаємо імпульсну характеристику  $a(t)$  через перехідну

$$a(t) = k'(t) = 1\delta(t) + (-100)e^{-100t}.$$

3. Змінну  $\tau$  замінюємо на  $t - \tau$ :

$$a(t - \tau) = 1\delta(t - \tau) - 100e^{-100t} \cdot e^{100\tau}.$$

$$4. \quad u_1(\tau) = 1 \cdot e^{-200\tau}.$$

5. Визначаємо напругу на виході  $u_2(t)$  за допомогою інтегралу Дюамеля з використанням імпульсної характеристики на інтервалі  $t \in [0; t_1)$ :

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \int_0^t u_1(\tau) \cdot a(t - \tau) d\tau = \int_0^t 1 \cdot e^{-200\tau} [\delta(t - \tau) - 100 \cdot e^{-100t} \cdot e^{100\tau}] d\tau = \\ &= \int_0^t e^{-200\tau} \cdot \delta(t - \tau) d\tau - 100 \cdot e^{-100t} \int_0^t e^{-100\tau} d\tau = \\ &= e^{-200t} + e^{-100t} \cdot e^{-100t} \Big|_0^t = \end{aligned}$$



$$= e^{-200t} + e^{-100t}(e^{-100t} - 1) = 2e^{-200t} - e^{-100t} B.$$

При  $t > t_1$ :

$$u_2(t) = \int_0^{t_1} e^{-200\tau} [\delta(t-\tau) - 100 \cdot e^{-100t} \cdot e^{100\tau}] d\tau + \int_{t_1}^t u_1(\tau) \cdot a(t-\tau) d\tau =$$

$$= -100 \cdot e^{-100t} \int_0^{t_1} e^{-100\tau} d\tau = e^{-100t} (e^{-100t_1} - 1) = e^{-100t} (e^{-0,5} - 1) B.$$

Складова  $u_1(\tau)$  при  $t > t_1$  дорівнює нулю.

#### Приклад 14.4.

Для кола (рис. 14.19) визначити напругу на виході  $u_2(t)$  при дії напруги на вході  $u_1(t)$  (рис. 14.20).

Параметри:  $R = 10 \text{ Ом}$ ;  $C = 1 \cdot 10^{-3} \text{ Ф}$ ;  $k_1 = 200$ ;  $t_1 = 0,005 \text{ с}$ ;

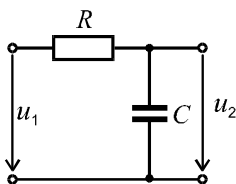


Рис.14.19

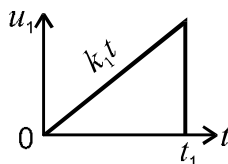


Рис.14.20

#### Розв'язок

1. Визначимо перехідну характеристику  $k(t)$  класичним методом з врахуванням того, що  $u_1 = 1 B$ .

$$u_{C(0)} = 0; u_{C_{\text{пр}}} = 1 B; p = -\frac{1}{RC} = -100 \text{ с}^{-1}; u_{C_B} = A e^{-\frac{1}{RC}t},$$

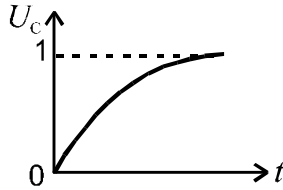


Рис. 14.21

$$u_C(t) = 1 + Ae^{-\frac{1}{RC}t}.$$

При  $t=0$ :  $0 = 1 + A \rightarrow A = -1$ ,  $u_C(t) = 1 - 1e^{-100t}$ .

Отже  $k(t) = 1 - 1e^{-100t}$ .

Графік  $u_C(t)$  наведено на рис.14.21.

2. Визначаємо імпульсну характеристику  $a(t)$  через перехідну

$$a(t) = k'(t) = 100e^{-100t}.$$

3. Змінну  $t$  замінюємо на  $t - \tau$ :

$$a(t - \tau) = 100e^{-100t} \cdot e^{100\tau}.$$

4. Вхідна напруга  $u_1 = k_1 t = 200t$ ;  $t \rightarrow \tau$ :  $u_1(\tau) = 200\tau$ .

5. Визначаємо напругу на виході  $u_2(t)$  за допомогою інтегралу Дюамеля з використанням імпульсної характеристики на інтервалі  $t \in [0; t_1)$ :

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \int_0^t 200\tau \cdot 100e^{-100t} \cdot e^{100\tau} d\tau = 2 \cdot 10^4 e^{-100t} \int_0^t \tau \cdot 100e^{100\tau} d\tau = \\ &= 2 \cdot 10^4 e^{-100t} \frac{1}{100} \int_0^t \tau \cdot de^{100\tau} = 200 \cdot e^{-100t} \left[ \tau e^{100\tau} \Big|_0^t - \int_0^t e^{100\tau} d\tau \right] = \end{aligned}$$

$$= 200e^{-100t} \left[ te^{100t} - \frac{1}{100}(e^{100t} - 1) \right] = 200t - 2(1 - e^{-100t})B.$$

При  $t > t_1$ :

$$\begin{aligned} u_2 &= \int_0^{t_1} 200\tau \cdot 100e^{-100t} e^{100\tau} d\tau + \int_{t_1}^t u_1(\tau) \cdot a(t - \tau) d\tau = \\ &= 200 \cdot e^{-100t} \left[ t_1 e^{100t_1} - \frac{1}{100}(e^{100t_1} - 1) \right] = \\ &= e^{-100t} [e^{0.5} - 2(e^{0.5} - 1)] = e^{-100t} (2 - e^{0.5})B. \end{aligned}$$

Тут  $u_1(\tau) = 0$  при  $t > t_1$ .

#### Контрольні запитання до розділу 14

1. Одинична функція.
2. Дельта – функція.
3. Перехідна характеристика кола.
4. Імпульсна характеристика кола.
5. Інтеграл Дюамеля з використанням перехідної характеристики кола.
6. Послідовність визначення реакції кола на імпульсну дію з використанням перехідної характеристики.
7. Інтеграл Дюамеля з використанням імпульсної характеристики кола.
8. Послідовність визначення реакції кола на імпульсну дію з використанням імпульсної характеристики.

# XV РОЗДІЛ

## ЧАСТОТНІ ЕЛЕКТРИЧНІ ФІЛЬТРИ

### 15.1. ВСТУП. СМУГА ПРОПУСКАННЯ ТА ЗАТРИМКИ.

**Фільтр** – це чотириполюсник, який включається між джерелом та приймачем для проходження без згасання струмів одних частот і затримки (непропускання) струмів інших частот.

Так, в радіоприймачах фільтри виділяють сигнал потрібної станції з сигналів усіх станцій ефіру.

В лініях зв'язку фільтри розділяють сигнали окремих абонентів при їх одночасній передачі по лінії.

В енергетичних системах сигнали телевимірювань, контролю та телекерування передаються по лініям електропередач (ЛЕП), а виділяються за допомогою фільтрів.

Розділяють різні типи електричних фільтрів (рис.15.1): фільтри нижніх частот (ФНЧ), фільтри високих частот (ФВЧ), смугові фільтри, режекторні фільтри.

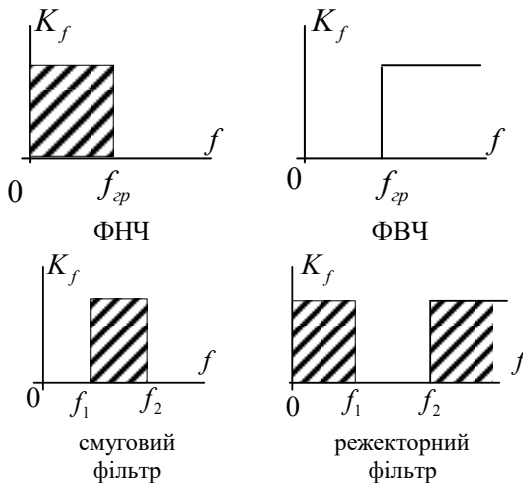


Рис.15.1

На рис.15.1 наведені характеристики  $K(f)$  ідеальних фільтрів: шаштрихованою показана смуга пропускання фільтра, а незаштрихованою – смуга затримки.

### 15.2. МІРА ПЕРЕДАЧІ СИМЕТРИЧНОГО ЧОТИРИПОЛЮСНИКА

Характеристичним опором симетричного чотириполюсника називають такий опір  $\underline{Z}_n$  який забезпечує  $\underline{Z}_{ex} = \underline{Z}_n$ .

$$\underline{Z}_{ex} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{A} \cdot \underline{U}_2 + \underline{B} \cdot \underline{I}_2}{\underline{C} \cdot \underline{U}_2 + \underline{D} \cdot \underline{I}_2} = \frac{\underline{A} \cdot \underline{Z}_n + \underline{B}}{\underline{C} \cdot \underline{Z}_n + \underline{D}} = \underline{Z}_n \Rightarrow \underline{Z}_n = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} \quad (15.1)$$

Такий режим називається режимом узгодженого навантаження. При цьому:

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{U_1 e^{j\psi_1}}{U_2 e^{j\psi_2}} = m \cdot e^{j\beta} = e^\alpha e^{j\beta} = e^{\underline{g}}, \quad (15.2)$$

де  $m = e^\alpha = \frac{U_1}{U_2}$  – показує, у скільки разів зміниться напруга при проходженні через чотириполюсник, а  $\beta = \psi_1 - \psi_2$  – показує зсув фаз,  $\underline{g} = \alpha + j\beta$  – міра передачі чотириполюсника.

$\alpha$  – Нп ( $\alpha_{Hn} = \ln \frac{U_1}{U_2}$ ),  $\beta$  – радіани. Згасання в 1Нп, це коли  $U_2$  в  $e$  разів менше за  $U_1$ .

$$\alpha_{дБ} = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} \Rightarrow 1\text{Нп} = 8,686 \text{ дБ}; \quad 1\text{дБ} = 0,115\text{Нп}.$$

$$e^{\underline{g}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2}{\underline{U}_2} = \underline{A} + \frac{\underline{B}}{\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}} = \underline{A} + \frac{\underline{B}}{\underline{Z}_c} = \underline{A} + \sqrt{\underline{B}\underline{C}} \quad (15.3)$$

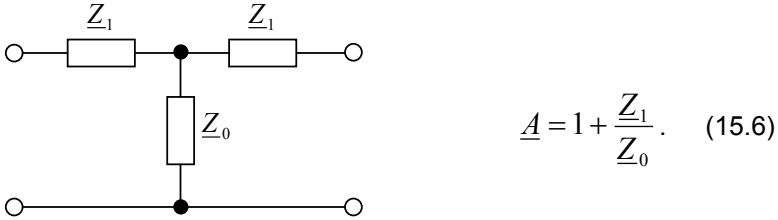
Для симетричного чотириполюсника:  $\underline{A}^2 - \underline{B} \cdot \underline{C} = 1$ . Розділивши цей вираз на (15.3) отримаємо:

$$\frac{\underline{A}^2 - \underline{B} \cdot \underline{C}}{\underline{A} + \sqrt{\underline{B}\underline{C}}} = \frac{1}{e^{\underline{g}}} \Rightarrow e^{-\underline{g}} = \underline{A} - \sqrt{\underline{B}\underline{C}}. \quad (15.4)$$

При порівнянні виразів (15.3) та (15.4) отримаємо:

$$\underline{A} = \frac{e^{\underline{g}} + e^{-\underline{g}}}{2} = \operatorname{ch} \underline{g}. \quad (15.5)$$

Для симетричного чотириполюсника (рис.15.2):  $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_1$



$$\underline{A} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_0}. \quad (15.6)$$

Рис.15.2.

Але для каскадного з'єднання чотириполюсників використовують такі схеми (рис. 15.3):

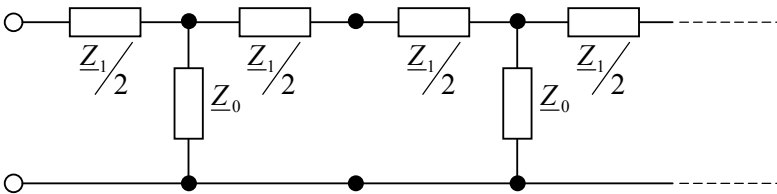


Рис.15.3.

Тоді:

$$\underline{A} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_0} \quad (15.7)$$

Розглянемо фільтр, що складається з чисто реактивних елементів. Якщо  $\underline{Z}_1 = j\omega L$ , а  $\underline{Z}_0 = 1/j\omega L$ , тоді:

$$\underline{A} = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} = A, \text{ тобто } A \text{ є дійсне.}$$

При  $\underline{Z}_1 = 1/j\omega L$ , а  $\underline{Z}_0 = j\omega L$ :  $\underline{A} = 1 - \frac{1}{2\omega^2 LC} = A$ , і також є дійсним.

Якщо  $\underline{Z}_1$  та  $\underline{Z}_2$  однакового характеру, то  $\underline{A} = 1,5$ .

Враховуючи те, що:

$$\underline{A} = \operatorname{ch}(\alpha + j\beta) = \operatorname{ch} \alpha \cdot \operatorname{ch} j\beta + \operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{sh} j\beta = \\ = \operatorname{ch} \alpha \cdot \cos \beta + j \operatorname{sh} \alpha \cdot \sin \beta \quad \operatorname{sh} \alpha \cdot \sin \beta = 0$$

є дійсним, тоді

Це має місце при  $\alpha = 0$ , або при  $\beta = 0$ .

У смузі пропускання  $\alpha = 0$  ( $U_2 = U_1$ ), тоді  $\operatorname{ch} \alpha = 1$ , а значить  $A = \cos \beta$ .

Отже  $|A| \leq 1$ , або  $-1 \leq A \leq 1$ .

З цього виходить, що  $\underline{Z}_1$  та  $\underline{Z}_2$  не можуть бути елементами одного характеру.

Переходячи до  $L, C$  елементів можна одне з основних рівнянь фільтрів записати у вигляді:

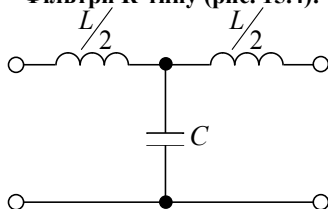
$$-1 \leq 1 - \frac{X_1}{2X_0} \leq 1, \text{ або } X_1 \leq 4X_0. \quad (15.8)$$

Смуга пропускання фільтра лежить в діапазоні частот  $\omega_1$  та  $\omega_2$ , які визначаються розв'язком  $A = \pm 1$ .

У смузі затримки  $\alpha \neq 0$ , тоді  $A$  дійсне, якщо  $\beta = 0$  (або  $= \pi$ ), звідки  $\cos \beta = \pm 1 \rightarrow \pm \operatorname{ch} \alpha = 1 - \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} = 1 - \frac{X_1}{2X_0}$  – цей вираз дозволяє визначити  $\alpha$  за межею смуги пропускання.

### 15.3. ФІЛЬТР НИЖНІХ ЧАСТОТ (ФНЧ)

Фільтри К-типу (рис. 15.4):



$$\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = \frac{L}{C} = K^2 \quad (15.9)$$

( $K$  – не залежить від частоти)

Рис. 15.4.

Смуга пропускання обмежена частотами:  $\omega_1 = 0$  та  $\omega_2 = \frac{2}{\sqrt{LC}}$  Це впливає з розв'язку рівнянь:

$$\begin{cases} 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} = 1 & \Rightarrow \omega_1 = 0; \\ 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} = -1 & \Rightarrow \omega_2 = \frac{2}{\sqrt{LC}}. \end{cases} \quad (15.10)$$

На рис.15.5 наведені залежності  $\alpha(\omega)$  та  $\beta(\omega)$ .

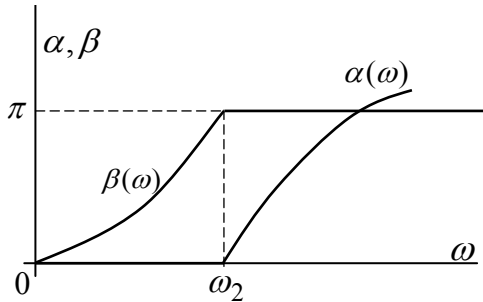


Рис. 15.5.

У смузі пропускання  $\cos\beta = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} = 1 - \frac{2\omega^2}{\omega_2^2} \Rightarrow \beta$ .

Відзначимо, що характеристичний опір фільтра  $\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{B}{C}}$  при зміні

$\omega$  не залишається постійним ( $\underline{Z}_c(\omega) \neq const$ ), а значить опір навантаження  $\underline{Z}_n$  не буде узгодженим весь час у смузі пропускання, а значить  $U_2 \neq U_1$  (рис.15.6).

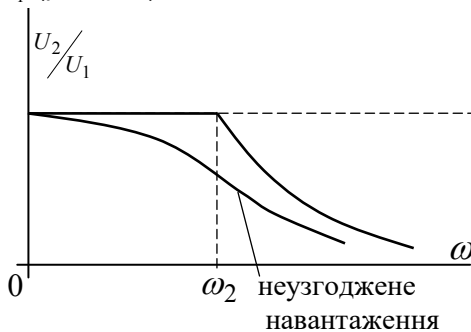


Рис. 15.6.



Зміну сигналу оцінюють виразом  $20 \lg \frac{U_{\alpha x}}{U_{\text{вих}}} = \alpha$  (дБ). Розгля-

немо визначення  $\alpha$  за межею смуги пропускання, коли  $\cos \beta = \pm 1$ :

$$1) \operatorname{ch} \alpha = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} \quad \Rightarrow \operatorname{ch} \alpha < 1 \text{ - неможливо.}$$

$$2) \operatorname{ch} \alpha = \frac{\omega^2 LC}{2} - 1 \quad \Rightarrow \operatorname{ch} \alpha + 1 = \frac{\omega^2 LC}{2}. \text{ Враховуючи,}$$

що  $\operatorname{ch} \alpha + 1 = 2 \operatorname{ch}^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right)$ , отримуємо:

$$\operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} = \frac{\omega}{\omega_2}. \quad (15.11)$$

Коефіцієнт згасання одного фільтра буває недостатнім для подавлення усіх сигналів, які не повинні попасти в приймач.

$$\text{Так при } \omega = 2\omega_2 \quad \Rightarrow \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} = 2 \quad \Rightarrow \alpha = 2,6 \text{ Нп.}$$

Для отримання більшого згасання застосовують каскадне включення  $n$  фільтрів. Тоді смуга пропускання залишається як у одного фільтра, а коефіцієнт згасання зростає в  $n$  разів.

*Приклад 15.1.* Визначити  $L$  та  $C$  ФНЧ, у якого  $K = 600$  Ом, а  $\alpha = 40$  дБ на  $f = 10$  кГц. Визначити граничну частоту і відношення  $\frac{U_1}{U_2}$  на  $f = 10$  кГц. Фільтр узгоджений з навантаженням.

$$\text{Розв'язок.} \quad \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} = \frac{\omega}{\omega_2} = \frac{f}{f_2} = \pi f \sqrt{LC}.$$

При  $\alpha = 40$  дБ  $= 40 \cdot 0,115 = 4,6$  Нп (на  $f = 10$  кГц):

$$\operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} = 5,04.$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi f \sqrt{LC} = 5,04 \\ \sqrt{\frac{L}{C}} = 600 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} L = 96 \text{ мГн}, \\ C = 26,6 \cdot 10^{-2} \text{ мкФ}. \end{array}$$

Гранична частота  $f_2 = \frac{1}{\pi \sqrt{LC}} = 2 \text{ кГц}$ .

$$\alpha = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} = 40 \quad \Rightarrow \quad \frac{U_1}{U_2} = 100.$$

ФНЧ можна побудувати і за П-схемою (рис.15.7):

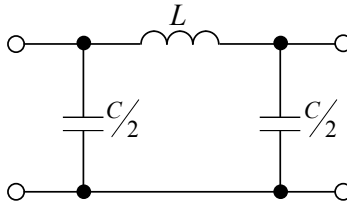


Рис. 15.7.

*Примітка:* Аналіз показує, характеристичний опір Т- та П-схем в смузі пропускання мають активний характер, а в смузі затримки – реактвний.

В достатньо більшій частині смуги пропускання  $Z_c \approx K$  (рис.15.8):

$$\left[ Z_{cн} = \frac{K}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_2}\right)^2}}; \quad Z_{cр} = K \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_2}\right)^2} \right]$$

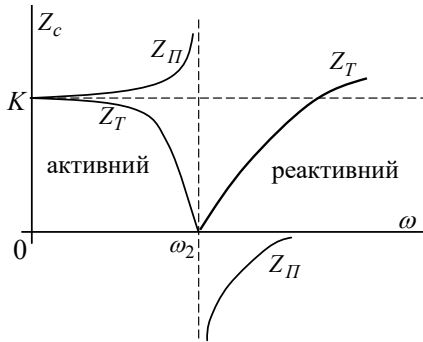


Рис. 15.8.

#### 15.4. ПОНЯТТЯ ПРО $m$ -ФІЛЬТРИ

На рис.15.9 зображено  $m$ -фільтр Т-типу, а на рис.15.10 –  $Z_c(\omega)$ .

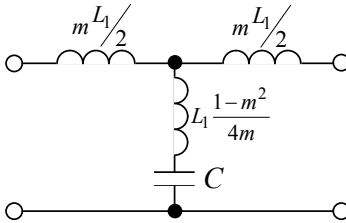


Рис. 15.9.

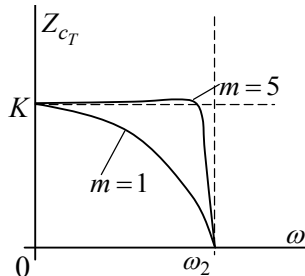


Рис. 15.10.

В  $m$ -фільтрах більша рівномірність  $Z_c$  в смузі пропускання. Крім того, повне згасання ( $\alpha \rightarrow \infty$ ) буде не при  $f \rightarrow \infty$ , а при  $f = \frac{f_2}{\sqrt{1-m^2}}$ . Так при  $m = 0,6$   $f = 1,25 f_2$ .

Але після  $f_\infty$   $\alpha$  зменшується і буде менше ніж у К-фільтра (рис.15.11):

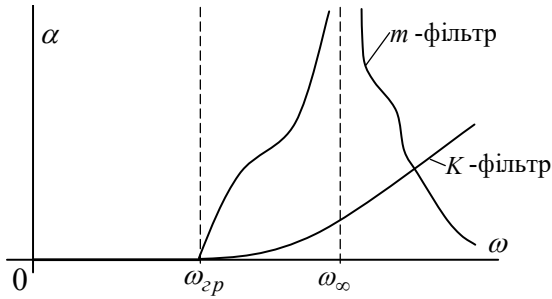


Рис. 15.11.

### 15.5. ФІЛЬТРИ ВИСОКИХ ЧАСТОТ (ФВЧ)

У ФВЧ  $L$  та  $C$  міняються місцями (рис.15.12).

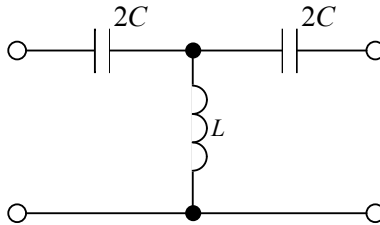


Рис. 15.12.

Граничні частоти смуги пропускання:

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{2\sqrt{LC}} \\ \omega_2 = \infty \end{cases} \quad (15.12)$$

На рис.15.13 показані залежності  $\alpha(\omega)$  та  $\beta(\omega)$ , а на рис.15.14 –  $Z(\omega)$ .

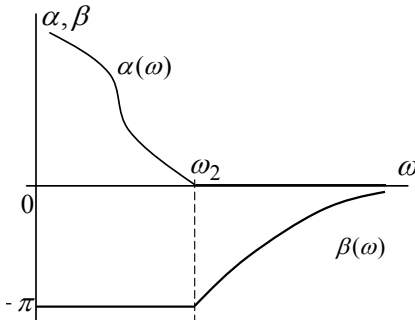


Рис. 15.13.

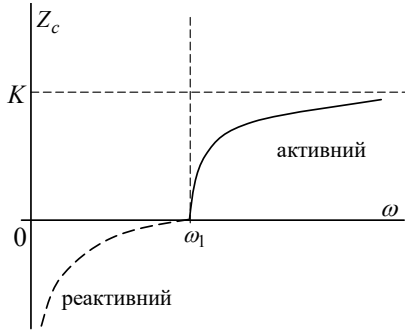


Рис. 15.14.

**Приклад 15.2.** В системі зв'язку по лінії електропередач (ЛЕП) з напругою  $U = 500\text{В}$  апаратуру передачі та прийому захищають урівноважуючи Т-фільтром К-типу (рис.15.15).

Дано:

$$4C = 0,15\text{мкФ.}$$

$$K = \sqrt{\frac{L}{C}} = 600\text{Ом}$$

$f_{cp} - ?$ ,  $U_{вих} - ?$  (навантаження узгоджене)

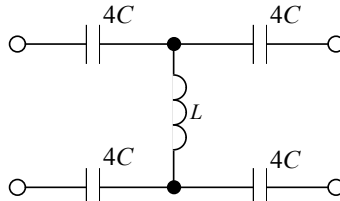


Рис.15.15.

**Розв'язок:**

1) Визначаємо індуктивність фільтра:

$$K = \sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow K^2 = \frac{L}{C} \Rightarrow L = K^2 C = 600^2 \cdot \frac{0,15 \cdot 10^{-6}}{4} = 13,5 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} = 13,5 \text{ мГн}$$

2) Визначаємо граничну частоту ФВЧ:

$$f_{cp} = \frac{1}{4\pi\sqrt{LC}} = 3600 \text{ Гц} = 3,6 \text{ кГц.}$$

3) Визначаємо згасання на промисловій частоті:

$$\operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} = \frac{\omega_{zp}}{\omega} = \frac{f_{zp}}{f} = \frac{3600}{50} = 72 \quad \Rightarrow \alpha = 8,94 \text{ Нп} .$$

4) Визначаємо вихідну напругу:

$$\alpha = \ln \frac{U_1}{U_2} \quad \Rightarrow U_2 = \frac{U_1}{e^\alpha} = \frac{500}{e^{8,94}} = 72 \cdot 10^{-3} \text{ В} = 72 \text{ мВ} .$$

### 15.6. СМУГОВІ ФІЛЬТРИ

Широке застосування смугові фільтри знайшли у системах багатоканального зв'язку. Смугові фільтри є комбінацією ФНЧ та ФВЧ (рис.15.16).

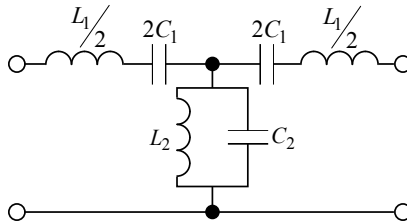


Рис.15.16.

Тут резонансні частоти:

$$\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \omega_0 . \quad (15.13)$$

$$\underline{Z}_1 = j \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) = j \frac{1}{\omega C_1} \left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right)$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{j \left( \omega C_2 - \frac{1}{\omega L_2} \right)} = -j \frac{\omega L_2}{\left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right)}$$

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = K^2 = \frac{L_2}{C_1} = \frac{L_1}{C_2} \quad \Rightarrow K = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} . \quad (15.14)$$

Можна побудувати безліч смугових фільтрів К-типу з одним значенням резонансної частоти  $\omega_0$ , змінюючи відношення:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{C_1}{C_2} = n^2. \quad (15.15)$$

Від величини  $n$  залежить смуга пропускання фільтра.

Запишемо умову  $\frac{Z_1}{4Z_2} = 1$ , або  $Z_1 = 4Z_2$  для смугового фільтра:

тра:

$$\frac{1}{\omega C_1} \left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right) = 4\omega L_2 \frac{1}{\left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right)} \Rightarrow (\omega^2 - \omega_0^2)^2 = 4\omega_0^2 \omega^2 n^2 L_1 C_1 \Rightarrow$$

$\omega^2 \mp 2n\omega_0\omega - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \omega_{1,2} = \pm n\omega_0 \pm \sqrt{n^2\omega_0^2 + \omega^2}$  (частоти з «-» відкидаємо), тоді:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left( \sqrt{n^2 + 1} \mp n \right), \quad (15.16)$$

де  $\omega_1 \cdot \omega_2 = \omega_0^2$ .

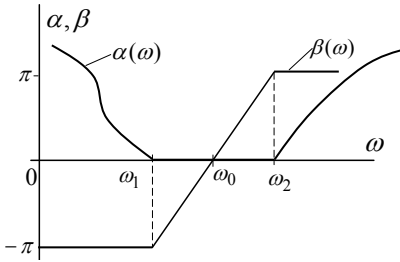


Рис.15.17.

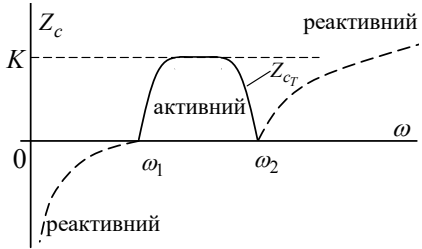


Рис.15.18.

На рис.15.17 показані залежності  $\alpha(\omega)$  та  $\beta(\omega)$ , а на рис.15.18 –  $Z_c(\omega)$ . Зауважимо, що  $\cos \beta$  змінюється від  $-1$  до  $+1$ , тобто  $\beta$  змінюється від  $-\pi$  до  $+\pi$ , а при  $\omega = \omega_0$ , то  $\beta = 0$ .

### 15.7. ФІЛЬТРИ З ХАРАКТЕРИСТИКАМИ БАТТЕРВОРТА, ЧЕБИШЕВА, ЗОЛОТАРЬОВА

У ФНЧ Баттерворта ослаблення при  $\omega = 0$  дорівнює нулю і монотонно зростає, причому, залежно від порядку фільтра (рис.15.19).

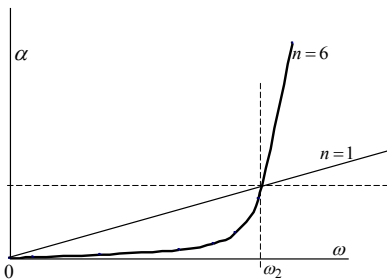


Рис.15.19.

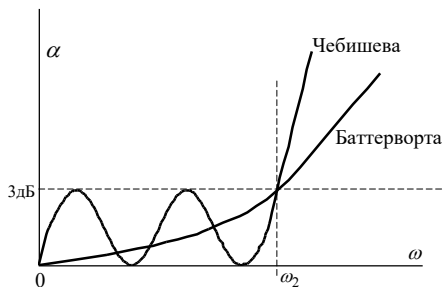


Рис.15.20.

У фільтрів Чебишева характеристика  $\alpha(\omega)$  у зоні пропускання має коливальний характер з амплітудою до 3дБ, а в зоні затримки – зростає швидше, ніж у фільтрів Баттерворта однакового з ним порядку (рис.15.20). Число максимумів та мінімумів дорівнює  $n$  – порядку фільтра. Фільтри Золотарьова у зоні пропускання мають коливальний характер  $\alpha(\omega)$ , а у зоні затримки мають розриви II-го роду (рис.15.21).

Розрахунок фільтрів, порядок яких перевищує  $n = 3$ , є достатньо складним і виконується на ЕОМ. В літературі [1, 8] наведені данні по величинам реактивних параметрів у нормованому вигляді: значення  $L$  та  $C$  були б такими, як в таблицях, якщо опір генератора  $R_i = 1 \text{ Ом}$ , опір навантаження  $R_n = 1 \text{ Ом}$ , а гранична частота  $\omega_{gp} = 1 \text{ с}^{-1}$ .

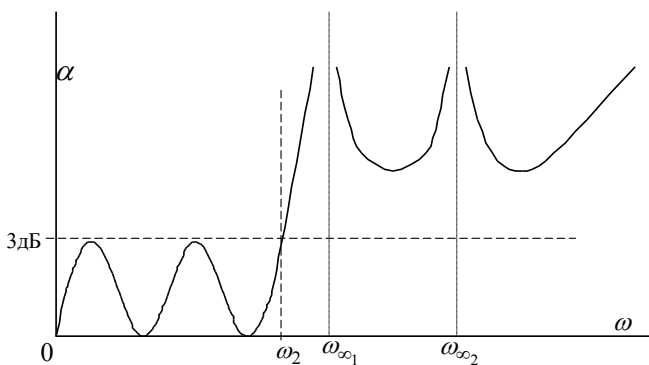


Рис.15.21.

У фільтрів Баттерворта коефіцієнт згасання описується формулою:



$$\alpha = 10 \lg \left( 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_{zp}} \right)^{2n} \right), \quad (15.17)$$

де  $n$  – кількість реактивних елементів.

$$\text{Звідси: } n \geq \frac{\lg(10^{0,1\alpha} - 1)}{2 \lg \left( \frac{\omega}{\omega_{zp}} \right)}.$$

Якщо  $10^{0,1\alpha} \gg 1$ , тоді:

$$n \geq \frac{\alpha}{20 \lg \left( \frac{\omega}{\omega_{zp}} \right)}. \quad (15.18)$$

У фільтрах Чебишева:

$$\alpha = 10 \lg \left( 1 + T_n^2 \left( \frac{\omega}{\omega_{zp}} \right) \right), \quad (15.19)$$

$$\begin{aligned} \text{де } T_n^2 \left( \frac{\omega}{\omega_{zp}} \right) &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\omega}{\omega_{zp}} + \sqrt{\left( \frac{\omega}{\omega_{zp}} \right)^2 - 1} \right)^n + \left( \frac{\omega}{\omega_{zp}} - \sqrt{\left( \frac{\omega}{\omega_{zp}} \right)^2 - 1} \right)^n \right] \Rightarrow \\ n &\geq \frac{\lg(\sqrt{10^{0,1\alpha} - 1} + \sqrt{10^{0,1\alpha} - 2})}{\lg \left( \frac{\omega}{\omega_{zp}} + \sqrt{\left( \frac{\omega}{\omega_{zp}} \right)^2 - 1} \right)}. \end{aligned}$$

Якщо  $10^{0,1\alpha} \gg 1$  та  $10^{0,1\alpha} \gg 2$ , тоді:

$$n \geq \frac{\lg(2\sqrt{10^{0,1\alpha}})}{\lg \left( \frac{\omega}{\omega_{zp}} + \sqrt{\left( \frac{\omega}{\omega_{zp}} \right)^2 - 1} \right)}. \quad (15.2)$$

**Приклад розрахунку ФНЧ Баттерворта**

Розрахувати ФНЧ, у якого на частоті  $\omega_{зр}$  ослаблення  $\alpha = 3$  дБ, а на частоті  $f = 16$  кГц  $-\alpha = 20$  дБ. Частота зрізу:  $f_{зр} = 10$  кГц.

1) Визначимо порядок фільтра:

$$n \geq \frac{\alpha}{20 \lg\left(\frac{\omega}{\omega_{зр}}\right)} = \frac{20}{20 \lg\left(\frac{16}{10}\right)} = 4,9.$$

Отже,  $n = 5$ .

Можливі дві схеми (рис.15.22 та рис.15.23):

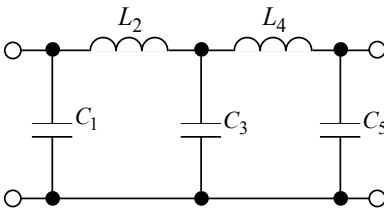


Рис.15.22.

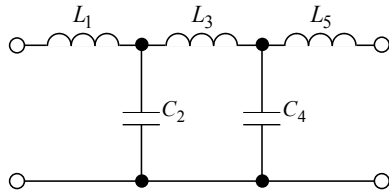


Рис.15.23.

Оберемо, наприклад, варіант перший, де менше індуктивностей.

2) Випишемо елементи 5-ї строки:

$$\begin{matrix} 0,618 & 1,618 & 2,000 & 1,618 & 0,618 \\ (K_{C_1}) & (K_{L_2}) & (K_{C_3}) & (K_{L_4}) & (K_{C_5}) \end{matrix}$$

3) Якщо в реальному колі  $R_i$  та  $R_n = R$  збільшені в  $K$  – разів порівняно з 1 Ом, то і реактивні опори елементів  $L$  та  $C$  потрібно збільшити також в  $K$  – раз (властивості лінійного кола не зміняться, якщо всі опори збільшити в  $K$  – разів). Значить індуктивність котушок  $L$  потрібно збільшити, а ємність конденсаторів  $C$  – зменшити в  $K$  – разів.

Крім того, якщо частота зрізу  $\omega_{зр} \neq 1$ , то параметри  $L$  та  $C$  необхідно зменшити в  $\omega_{зр}$  – разів. Отже:

$$C_1 = C_5 = K_{C_1} \cdot \frac{1}{R \cdot \omega_{zp}}, \quad L_2 = L_4 = K_{L_2} \cdot \frac{R}{\omega_{zp}}, \quad C_3 = K_{C_3} \cdot \frac{1}{R \cdot \omega_{zp}}$$

Нехай  $R_i = R_n = R = 1000 \text{ Ом}$ , тоді:

$$C_1 = C_5 = \frac{0,618}{1000 \cdot 2\pi \cdot 10^4} = 9,84 \cdot 10^{-9} \text{ Ф} = 9,84 \text{ нФ},$$

$$L_2 = L_4 = \frac{1,618 \cdot 1000}{2\pi \cdot 10^4} = 25,7 \text{ мГн},$$

$$C_3 = \frac{2,000}{1000 \cdot 2\pi \cdot 10^4} = 31,8 \text{ нФ}.$$

Якщо за заданими параметрами будувати фільтр Чебишева, то:

$$n \geq \frac{\lg(2\sqrt{10^{0,1\alpha}})}{\lg\left(\frac{\omega}{\omega_{zp}} + \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_{zp}}\right)^2 - 1}\right)} = \frac{\lg(2\sqrt{10^2})}{\lg(1,6 + \sqrt{1,6^2 - 1})} = 2,88 \Rightarrow n = 3.$$

Тобто, кількість елементів у фільтра Чебишева менше. Параметри цих елементів обираються з відповідних таблиць для фільтрів Чебишева.

# XVI РОЗДІЛ

## СПЕКТРАЛЬНИЙ МЕТОД

### 16.1. ЗОБРАЖЕННЯ НЕПЕРІОДИЧНОЇ ФУНКЦІЇ ЧАСУ. ІНТЕГРАЛ ФУР'Є. СПЕКТРАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА

Відомо, що синусоїдну періодичну функцію часу можна представити рядом Фур'є з частотами гармонік кратними основній  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ .

$$f(t) = f(k\omega_1 t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \cdot \sin(k\omega_1 t + \varphi_k), \quad (16.1)$$

$$\text{де} \quad A_{km} = B_{km} + jC_{km} = F(jk\omega_1). \quad (16.2)$$

$$(B_{km} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin k\omega_1 t dt; \quad C_{km} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos k\omega_1 t dt)$$

Або в комплексній формі:

$$A_{km} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{jk\omega_1 t} \cdot dt.$$

Тобто, замість аналізу кола в функції  $t$  здійснений перехід в область нової змінної  $k\omega_1$  і знаходяться струми  $\underline{I}(\omega_1), \underline{I}(\omega_2), \dots$

Потім здійснюється, за необхідності, перехід до  $i(t)$  за виразом (16.1).

Зауважимо, що у періодичної функції спектр дискретний.

Нехай задана неперіодична функція  $f(t)$ .

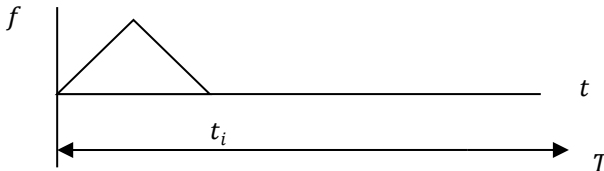


Рис. 16.1

Будемо вважати таку функцію періодичною з періодом  $T \rightarrow \infty$ .

$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow d\omega$ , а  $k\omega_1 \rightarrow \omega$ , тобто різниця між частотами суміжних гармонік наближається до нескінченно малої величини  $d\omega$ , а це означає, що від дискретного спектру ми перейшли до суцільного: присутні частоти, починаючи з  $\omega = 0$ .

Також бачимо з виразів  $B_{km}, C_{km}, A_{km}$ , що при  $T \rightarrow \infty$  амплітуди гармонік наближаються до нуля. однак взаємне співвідношення між рівнями гармонік залишається незмінним.

Для спектрального аналізу неперіодичного сигналу формула ряду Фур'є модифікується таким чином:

1.  $k\omega_1 \rightarrow \omega$
2. Видаляється множина  $\frac{1}{T}$
3. Результатом обчислень замість нумерованих коефіцієнтів  $A_{km}$  з'являється функція частоти  $F(j\omega)$  – пряме інтегральне перетворення Фур'є.

Формула прямого перетворення Фур'є з області  $t$  в область  $j\omega$  для функції  $f(t)$ , що задана при  $t < 0$  та при  $t > 0$ , має вигляд:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} \cdot dt. \quad (16.3)$$

Якщо розглядати включення кола в момент  $t = 0$  під дією  $e(t) = f(t)$ , то

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} \cdot dt. \quad (16.4)$$

Формули (16.3) та (16.4) застосовуються до функції  $f(t)$ , які абсолютно інтегровані.

*Примітка.* Інтеграл (16.3) та (16.4) при дії імпульсу беруться в межах дії імпульсу, наприклад від 0 до  $t_i$ .

Зворотнє перетворення Фур'є в часову площину для інтеграла (16.4) має вигляд:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} e^{j\omega t} \cdot F(j\omega) d\omega. \quad (16.5)$$

Останній інтеграл показує, що імпульсний сигнал є сукупністю нескінченної кількості гармонік з нескінченно малими амплітудами  $\frac{1}{\pi} F(j\omega) d\omega$ .

Для опису частотних властивостей імпульсного сигналу використовується спектральна характеристика або спектральна густина  $F(j\omega)$ . Функція  $F(j\omega)$  характеризує густину розподілу амплітуд по частоті. (Якщо  $f(t) = e(t)$ , то для періодичного сигналу  $A_{km}$  вимірюється в вольтгах, то для неперіодичного – спектральна густина в вольт.секундах).

Комплексна функція  $F(j\omega)$  в показниковій формі записується:

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)} = F(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}. \quad (16.6)$$

тут  $F(j\omega) = |F(j\omega)|$  – амплітудно-частотна характеристика (амплітудний спектр);

$\varphi(\omega)$  – фазо-частотна характеристика, яка характеризує залежність початкових фаз відповідних гармонік від частоти.

При цьому амплітудний спектр – парна, а фазовий – непарна функція.

Зауважимо, що функція  $F(j\omega)$  характеризує за модулем і фазою гармоніку частоти  $\omega$ , а вираз  $\frac{1}{\pi} e^{j\omega t} \cdot F(j\omega) d\omega$  – представляє гармоніку частоти  $\omega$  функції  $f(t)$  у виразі (16.5).

#### Приклад 16.1.

Визначити для прямокутного імпульсу АЧХ та ФЧХ, побудувати графік.

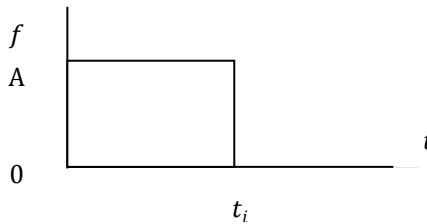


Рис. 16.2

Розв'язок:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_0^{t_i} A \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = -\frac{A}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_0^{t_i} = \frac{A}{j\omega} (1 - e^{-j\omega t_i}) = \\ &= \frac{A}{j\omega} e^{-j\omega \frac{t_i}{2}} \left( e^{j\omega \frac{t_i}{2}} - e^{-j\omega \frac{t_i}{2}} \right) = \frac{2A}{\omega} \cdot \sin \frac{\omega t_i}{2} \cdot e^{-j\omega \frac{t_i}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{Отже: } F(\omega) = \frac{2A}{\omega} \cdot \sin \frac{\omega t_i}{2}; \quad \varphi(\omega) = -\frac{\omega t_i}{2}$$

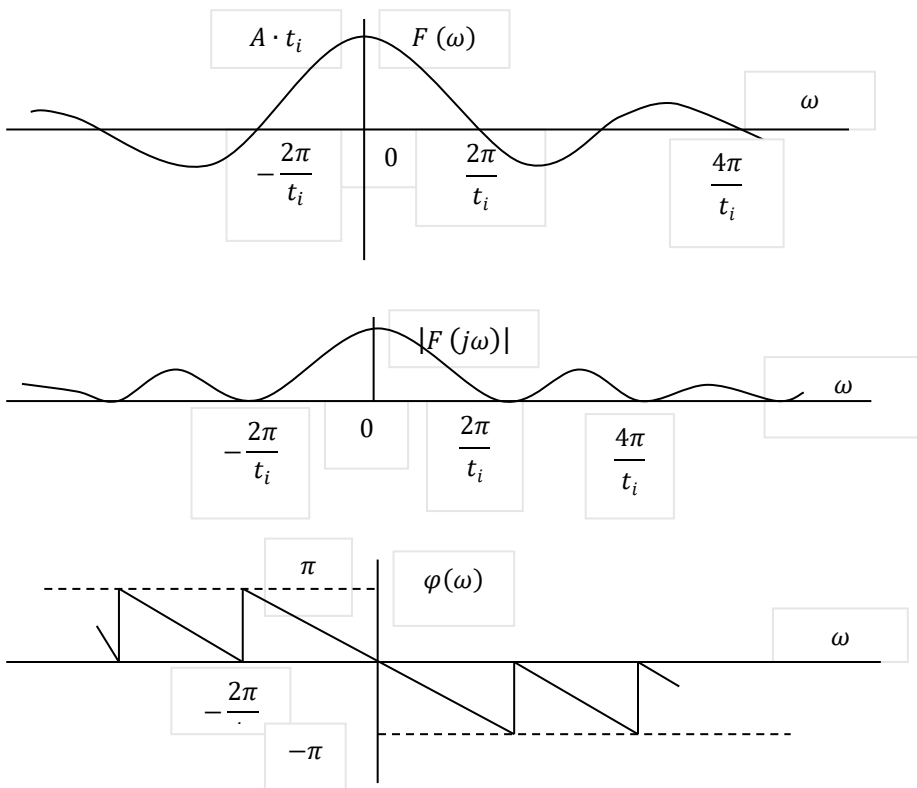


Рис.16.3

Бачимо, що суцільний спектр обіймає частота від 0 до  $\infty$ , але реально його обмежують практичною шириною смуги частот, де зосереджена основна частина енергії сигналу. Так, наприклад, для частотних характеристик  $F(j\omega)$ , які перетинають вісь  $\omega$ , спектр обмежують частотами від нуля до першого перетину. В нашому випадку це буде гранична частота  $\omega_{гр} = \frac{2\pi}{t_i}$ .

*Приклад 16.2.* Визначити АЧХ та ФЧХ експоненціального імпульсу  $e(t) = E_0 \cdot e^{-\alpha t}$ .

Розв'язок:

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} E_0 \cdot e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = E_0 \cdot \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t} \cdot dt =$$

$$= \frac{E_0}{-(\alpha + j\omega)} \cdot e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^\infty = \frac{E_0}{-(\alpha + j\omega)} (e^{-\infty} - e^0) =$$

$$= \frac{E_0}{\alpha + j\omega} = \frac{E_0}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \cdot e^{j \arctg \omega / \alpha}} = \frac{E_0}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \cdot e^{-j \arctg \omega / \alpha}$$

Отже: АЧХ  $F(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$ ; ФЧХ  $\varphi(\omega) = -\arctg \omega / \alpha$ .  
 графіки АЧХ та ФЧХ мають вигляд:

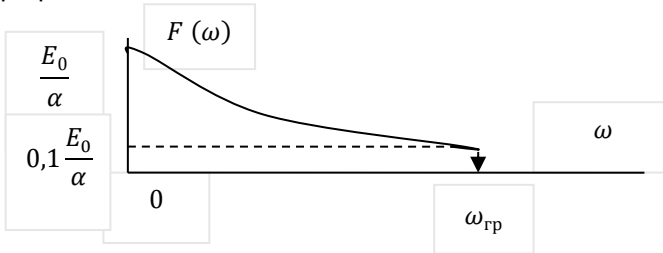


Рис.16.4

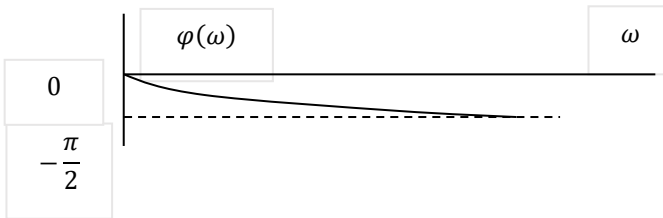


Рис. 16.5

Для функцій  $F(\omega)$ , що не перетинають вісь абсцис, практичну ширину спектра обмежують на рівні  $0,1 \cdot F(\omega)_{max}$  (в деяких випадках на рівні  $0,5 \cdot F(\omega)_{max}$  або  $0,7 \cdot F(\omega)_{max}$ ).

## 16.2. ЗАСТОСУВАННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ДО АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

Формально можна діяти за аналогією символічного методу:

1. Від  $e(t)$  переходимо до  $E(j\omega)$ .
2. Записуємо вираз для комплексного опору кола  $Z(j\omega)$  ( $L \rightarrow j\omega L$ ;  $C \rightarrow \frac{1}{j\omega C}$ ).
3. Записуємо вираз для комплексного струму  $I(j\omega) = \frac{E(j\omega)}{Z(j\omega)}$ .
4. За теоремою розкладання або за таблицями переходимо



до  $i(t)$ .

Порівняно з рядом Фур'є для періодичної функції, де є нескінченна кількість гармонік, тут ми отримуємо результат в замкненій формі. Але такий підхід не дає нічого нового порівняно з перетворенням Лапласа (розглянемо далі), який є більш загальним методом.

Значення перетворення Фур'є полягає у тому, що воно дозволяє зв'язати струми (напруги) при перехідному процесі з частотними характеристиками кола. Так, знаючи спектр вхідної напруги та частотну характеристику кола, можна визначити спектр вихідної напруги (струму), оцінити вплив частотної характеристики кола на вихідний сигнал. Тобто, можна розв'язати задачу вибору смуги пропускання кола, форми частотної характеристики кола та ін. Цей метод широко використовується в радіотехніці при дослідженні проходження сигналів крізь чотириполюсник.

Розглянемо низку задач.

*Приклад 16.3.* Треба здійснити передачу сигналу крізь чотириполюсник без спотворень

*Розв'язок.*

Через те, що інформація зберігається у формі сигналу, то для передачі сигналу без спотворень необхідно щоб амплітуди усіх гармонік змінювались в однаковій мірі, а це значить, що коефіцієнт передачі не повинен залежати від частоти, тобто  $K(\omega) = const$ .

Другою умовою є те, щоб ФЧХ кола була лінійною функцією частоти, тобто  $\theta(\omega) = 0$ .

Практично, враховуючи те, що опори  $L$  та  $C$  змінному струму залежать від частоти, ці умови не можуть бути точно виконані. Але намагається, щоб ці умови були приблизно виконані в практичній ширині смуги частот сигналу.

Встановлено, що для імпульсних сигналів форми, представленої на рис. 16.6.

Практична ширина спектра сигналу обіймає смугу частот від  $\omega = 0$  до  $\omega_{гр} = \frac{2\pi}{t_i}$ .

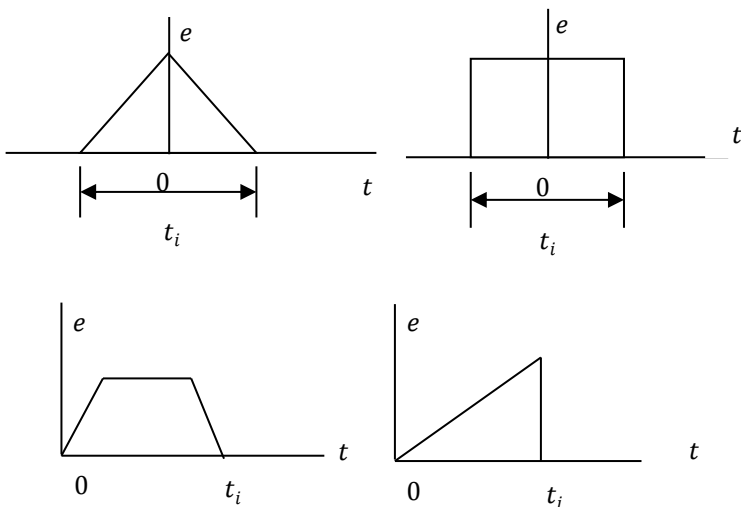
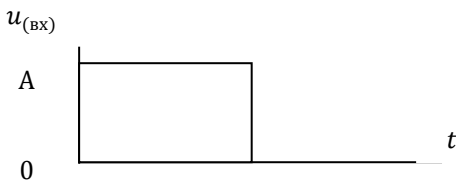


Рис. 16.6

**Приклад 16.4.**

Маємо вхідний сигнал  $u(t)$



Він поступає на вхід кола

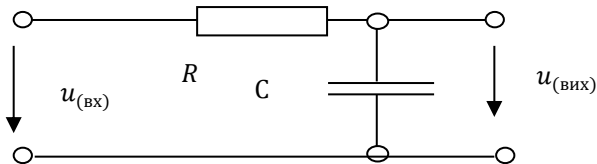


Рис. 16.7

Оцінити вплив кола на вхідний сигнал.

**Розв'язок.**

1. Коефіцієнт передачі кола

$$K(j\omega) = \frac{U_{\text{ВИХ}}(j\omega)}{U_{\text{ВХ}}(j\omega)} = \frac{\frac{U_{\text{ВХ}}(j\omega)}{R + 1/j\omega C} \cdot 1/j\omega C}{U_{\text{ВХ}}(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

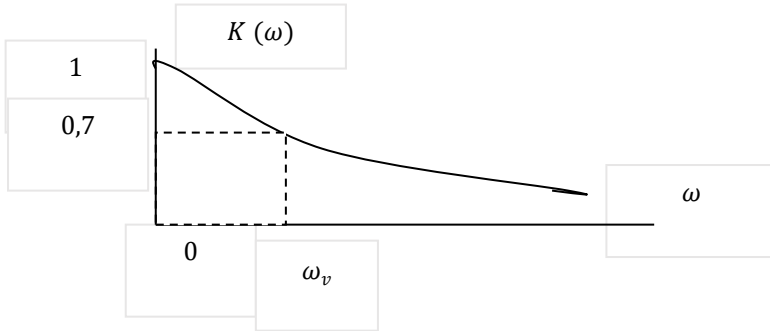


Рис. 16.8

Проведемо оцінювання практичної ширини смуги пропускання кола на рівні  $0,7K(\omega)_{\max}$ : смуга пропускання буде  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_{\text{П}}RC)^2 + 1}}$   
 $\Rightarrow \omega_{\text{П}} = \frac{1}{RC}$

Практична ширина спектру прямокутного імпульсу  $\omega_{\text{ГР}} \approx \frac{2\pi}{t_i}$

Якщо  $\omega_{\text{ГР}} \leq \omega_{\text{П}}$ , то сигнал практично не спотворюється. Тобто  $\frac{2\pi}{t_i} \leq \frac{1}{RC}$ .

З цієї умови обираємо параметр  $R, C$ .

*Приклад 16.5.* За допомогою електричного кола здійснити диференціювання вхідного сигналу.

*Розв'язок.* Розглянемо схему (рис. 16.9).

Тут коефіцієнт передачі  $K(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC}$ .

Якщо підібрати  $R, C$  таким чином, що в практичній ширини спектру вхідного сигналу  $\omega RC \leq 1$ , то  $K(j\omega) \approx j\omega RC$ . Тоді  $U_{\text{ВИХ}}(j\omega) = K(j\omega) \cdot U_{\text{ВХ}}(j\omega) \approx j\omega RC \cdot U_{\text{ВХ}}(j\omega)$ .

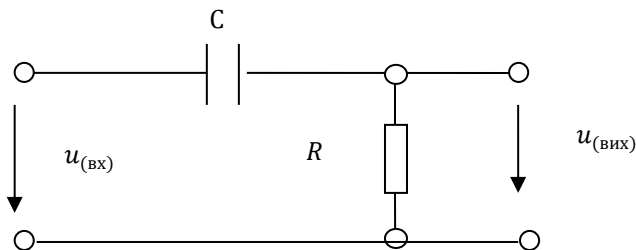


Рис. 16.9

Відомо, що множенню зображення на  $j\omega$  відповідає диференціювання оригіналу, то  $U_{\text{вих}} = RC \cdot \frac{dU_{\text{вх}}}{dt}$ .

Також можна електричним шляхом здійснити інтегрування вхідного сигналу. Для цього в попередній схемі вихідною буде напруга на ємності. Цю задачу розглянути самостійно.

Ще одне практичне значення спектрального методу полягає в тому, що для складного кола (в тому числі для кола з невідомою схемою) можна експериментально зняти амплітудно-частотну характеристику  $K(\omega)$  та фазочастотну характеристику. тоді вихідний сигнал:  $U_{\text{вих}}(j\omega) = K(j\omega) \cdot U_1(j\omega)$ .

#### КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 16

1. Запишіть комплексну форму ряду Фур'є.
2. Яка формула визначає комплексну амплітуду?
3. Формула прямого інтегрального перетворення Фур'є. Спектральна характеристика.
4. АЧХ сигналу.
5. ФХЧ сигналу.
6. Як відрізняються спектри періодичного та неперіодичного сигналів?
7. Формула зворотнього інтегрального перетворення Фур'є.
8. Графік АЧХ прямокутного імпульсу.
9. Графік АЧХ експоненціального імпульсу.
10. Практична ширина спектра сигналу.
11. Вибір параметрів кола для неспотворювального проходження сигналу.
12. Вибір параметрів кола для здійснення операції диференціювання (або інтегрування) характеристики  $s(t)$  сигналу.

# XVII РОЗДІЛ

## ТРИФАЗНІ КОЛА

### 17.1. ПОНЯТТЯ ПРО БАГАТОФАЗНІ СИСТЕМИ. ВИЗНАЧЕННЯ

Багатофазною системою електричних кіл називають сукупність електричних кіл, в яких діють синусоїдальні *ЕРС* однакової частоти, зсунуті одна відносно іншої по фазі та утворені одним джерелом електричної енергії.

Під фазою багатофазної системи розуміють ділянку кола, по якій проходить один і той же струм. Кількість фаз позначають  $m$ .

В симетричній системі *ЕРС* в кожній фазі *ЕРС* мають однакову амплітуду, а фазовий зсув дорівнює  $\frac{2\pi}{m}$  (виключення становить двофазна система, де зсув дорівнює  $\frac{\pi}{m} = \frac{\pi}{2}$ ). Відмітимо, що порівняно з фазою синусоїдальної функції часу тут з'явилося ще поняття фази як ділянки кола.

Найбільше розповсюдження отримала трифазна система: це виробництво, передача та розподіл електричної енергії. Які ж переваги вона має?

1. Трифазні асинхронні двигуни є найбільш простими, надійними та дешевими порівняно з іншими електричними двигунами.
2. Трифазна ЛЕП більш економічна порівняно з однофазною двохпровідною тієї ж потужності.
3. Можливість отримання двох напруг – фазної та лінійної.
4. У трифазних електричних двигунів відсутня пульсуюча складова електромагнітного елемента.

Усі складові трифазної системи (трифазний генератор, трансформатор, ЛЕП, асинхронний двигун) розробив в 1889-1891рр. М.О. Доливо-Добровольський. Паралельно в США інженер Тесла запатентував двофазну систему, але вона не отримала розповсюдження. Про це мова піде нижче. На рис. 17.1 наведена умовно конструктивна схема трифазного генератора, а на рис. 17.2 графіки  $e(t)$  трьох фазних обмоток.

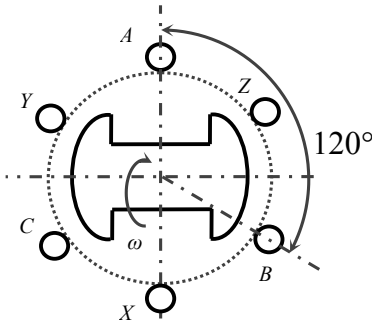


Рис. 17.1

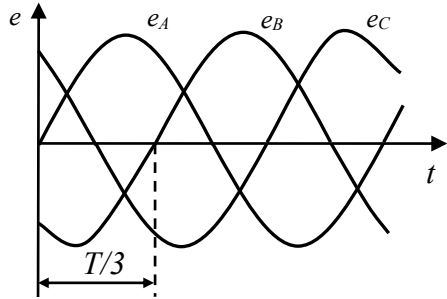


Рис. 17.2

Позначення: А, В, С – початок обмоток, X, Y, Z – кінці обмоток.  
Миттєвим значенням ЕРС

$e_A = E_m \times \sin \omega t$ ;  $e_B = E_m \times \sin(\omega t - 120^\circ)$ ;  $e_C = E_m \times \sin(\omega t + 120^\circ)$  відповідає векторна діаграма (рис.17.3) для діючих значень.

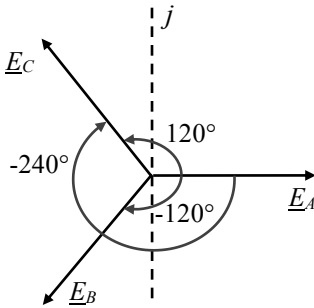


Рис. 17.3

Отже:

$$\underline{E}_A = E \left( E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\underline{E}_B = E \times e^{-j120^\circ},$$

$$\underline{E}_C = E \times e^{j240^\circ} = E \times e^{-j120^\circ}.$$

Іноді для спрощення запису вводять оператор

$$a = e^{j120^\circ} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$a^2 = e^{j240^\circ} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(e^{j240^\circ} = e^{-j120^\circ}).$$

Тоді  $1 + a + a^2 = 0$ , тобто в симетричній системі  $\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = 0$  (це саме і для  $e_A + e_B + e_C = 0$ ).

Порядок слідування фаз А-В-С називають системою прямої послідовності фаз, а якщо С-В-А – то зворотна послідовність фаз.

### 17.2. З'ЄДНАННЯ ТРИФАЗНОЇ СИСТЕМИ ЗІРКОЮ.

Кожна фаза генератора представляє собою джерело, яке може бути підключене на власне навантаження (рис.17.4).

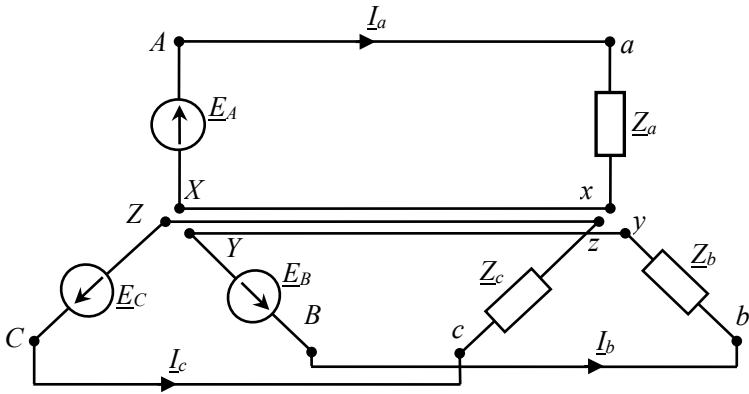


Рис. 17.4

У приймачів енергії позначення  $a - x$ ,  $b - y$ ,  $c - z$ . Недолік такої незв'язної системи – 6 дротів і немає переваги по ЛЕП порівняно з однофазною.

Якщо об'єднати кінці обмоток генератора  $X, Y, Z$  в точку  $O$ , кінцеві затискувачі приймачів  $x, y, z$  – в точку  $O'$ ; то одержимо чотирипровідну систему, з'єднання якої називають зірковою і позначають  $Y$  (рис.17.5).

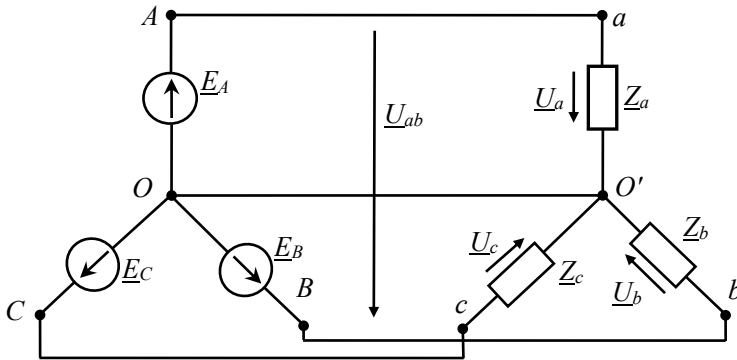


Рис. 17.5

Провід, що з'єднує  $t.O$  і  $t.O'$  називають нульовим або нейтральним, а інші  $A - a$ ,  $B - b$ ,  $C - c$  лінійними.

Напруги між лінійним та нульовим провідником (або напруга на кожному навантаженні) називають фазними -  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$ , а напруги між лінійними провідниками – лінійними:  $\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{bc}, \underline{U}_{ca}$ .

Встановимо зв'язок між лінійними та фазними напругами. Так

за другим законом Кірхгофа для  $\underline{U}_{ab} = \underline{U}_a - \underline{U}_b = U_\varphi - U_\varphi e^{-j120^\circ} = U_\varphi \left(1 + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}U_\varphi e^{j30^\circ}$ , тобто  $U_L = \sqrt{3}U_\varphi$

Струми, що йдуть по лінійним проводам, називають лінійними, а по опорам навантаження – фазними.

Зрозуміло, що для Y:  $I_L = I_\varphi$ .

Струм в нульовому проводі  $\underline{I}_N = \underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c$ .

При симетричному навантаженні ( $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c$ ) струми мають однакову величину і зсунуті по фазі на  $\pm 120^\circ$ . Тоді струм  $\underline{I}_N = 0$ , і нульовий провід не потрібен. (рис.17.6).

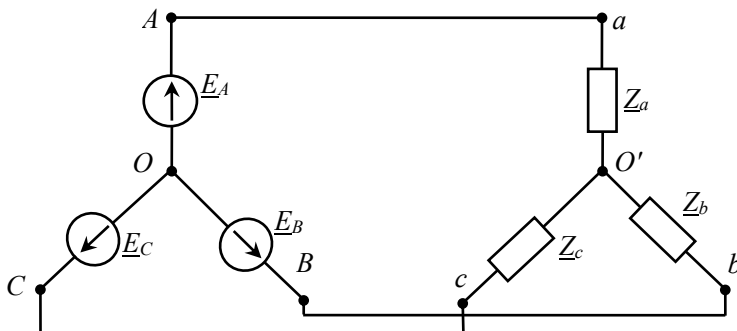


Рис. 17.6

Така трьохпровідна система використовується тільки для симетричного навантаження.

Роль нульового проводу полягає в тому, що він забезпечує рівність напруг на навантаженні  $U_a = U_b = U_c$  при несиметричному навантаженні.

Тепер можна повернутися до питання: чому не знайшла розповсюдження двухфазна система Тесли.

Як показано вище, при симетричному навантаженні в трифазній системі  $\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0$ , в двухфазній системі  $\underline{I}_N = \underline{I}_a + \underline{I}_b = \underline{I}_\varphi + \underline{I}_\varphi e^{-j90^\circ} = \sqrt{2}I_\varphi e^{-j45^\circ}$ , тобто в нульовому проводі струм в  $\sqrt{2}$  разів більше фазного.

### 17.3. З'ЄДНАННЯ ТРИФАЗНОЇ СИСТЕМИ ТРИКУТНИКОМ

Якщо кінець кожної фазної обмотки генератора з'єднати з початком наступної фазної обмотки, то отримуємо замкнений трикутник ( $\Delta$ ), а напруги між точками з'єднання подаються в мережу.

Якщо аналогічно з'єднати і приймачі то отримуємо з'єднання  $\Delta - \Delta$  (рис.17.7).



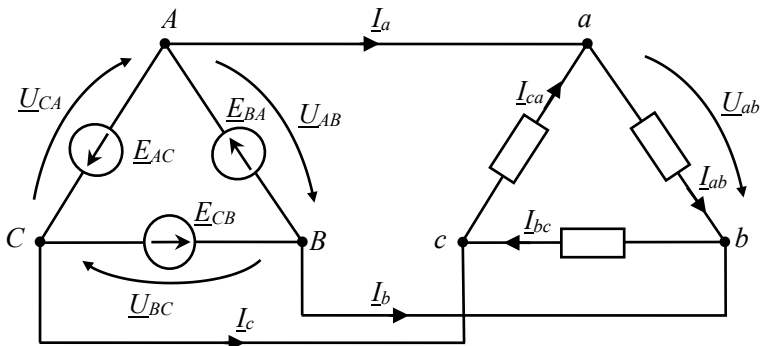


Рис. 17.7

В ідеальному випадку  $\underline{E}_{BA} + \underline{E}_{AC} + \underline{E}_{CB} = 0$ .

Бачимо, що приймачі знаходяться під лінійними напругами, а значить:

$$U_{л} = U_{\phi}$$

А лінійні струми визначаються за першим законом Кірхгофа для вузлів  $a, b, c$ :

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_A &= \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} \\ \underline{I}_B &= \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} \\ \underline{I}_C &= \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} \end{aligned} \right\}$$

Пам'ятаємо, що ця різниця комплексних величин або векторних величин.

Якщо навантаження симетричне, то фазні струми за модулем  $I_{ab} = I_{bc} = I_{ca}$ , а за фазою зсунуті на  $\pm 120^\circ$ .

Тоді наприклад,

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = I_{\phi} - I_{\phi} e^{j120^\circ} = I_{\phi} \left( 1 + \frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{2} I_{\phi} e^{-j30^\circ}$$

Тобто:

$$I_{л} = \sqrt{3} I_{\phi}$$

Помітимо, що обмотки генератора та приймачі можуть мати різні схеми з'єднання. Втім, обмотки генератора з'єднують, як правило, зіркою. Справа в тому, що при невеликій не симетрії фазних ЕРС (наприклад, відхилення від синусоїди), в контурі трикутника з'являється  $\Delta E$ , а враховуючи невеликий внутрішній опір обмоток, в контурі може існувати великий струм і при відсутності навантаження.

Примітка. Ми ведемо мову про генератор, як електричну машину, але це може бути інвертор, який перетворює постійну напругу (наприклад, від сонячних батарей) в симетричну трифазну напругу.

#### 17.4. АНАЛІЗ СИМЕТРИЧНИХ РЕЖИМІВ РОБОТИ ТРИФАЗНИХ КІЛ

Для усіх режимів будемо вважати, що діє симетрична система трифазних ЕРС.

З'єднання  $Y - Y$  (рис. 17.8):

$$\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z}_\phi \text{ тобто } \begin{pmatrix} Z_a = Z_b = Z_c \\ \varphi_a = \varphi_b = \varphi_c \end{pmatrix}$$

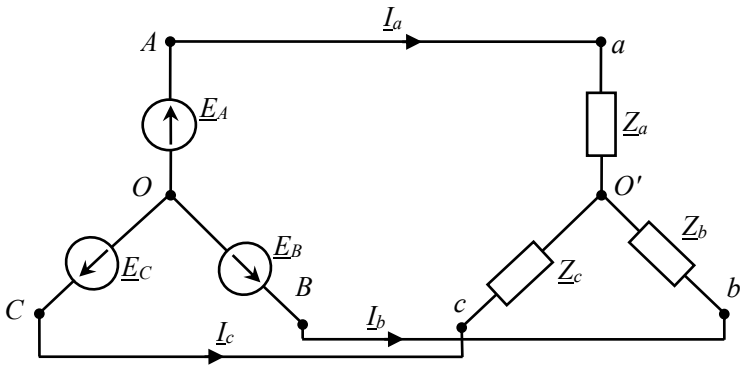


Рис. 17.8

З урахуванням того, що  $\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0$ ;  $\varphi_0 = \varphi_0'$ ;  $\underline{U}_{0/0} = 0$ , то  $\underline{I}_a = \frac{\underline{E}_a}{\underline{Z}_\phi}$ ;  $\underline{I}_b = \underline{I}_a e^{-j120^\circ}$ ;  $\underline{I}_c = \underline{I}_a e^{j120^\circ}$ .

Аналогічно розраховуються струми з урахуванням опору провідників лінії  $\underline{Z}_l$ :  $\underline{I}_a = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_l + \underline{Z}_\phi}$  і т.д.

Аварійні режими:

1. Обрив лінії  $A - a$ .

Тепер струм  $\underline{I}_a = 0$ .

Опири  $\underline{Z}_b$  та  $\underline{Z}_c$  знаходяться під лінійною напругою  $\underline{U}_{BC}$ , а так як відносно цієї напруги вони з'єднані послідовно, то напруга на кожному з них буде  $\frac{U_\phi}{2} = \frac{\sqrt{3}U_\phi}{2}$ . Таким чином, напруга на фазних опорах, а відповідно, і струми зменшились в  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  разів по відношенню до нормального режиму роботи.

2.Закорочений опір, наприклад  $\underline{Z}_a$ .

Тоді потенціал  $\underline{\varphi}_{O'} = \underline{\varphi}_A$  і фазні опори  $\underline{Z}_b$  та  $\underline{Z}_c$  будуть під лінійними напругами  $\underline{U}_{ba}$  та  $\underline{U}_{ca}$  відповідно, а струми  $\underline{I}_b$  та  $\underline{I}_c$  збільшаться в  $\sqrt{3}$  разів.

Струми  $\underline{I}_a = -(\underline{I}_b + \underline{I}_c)$  також збільшаться в  $\sqrt{3}$  разів.

4.2 З'єднання Y – Δ (рис. 17.9):  $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = \underline{Z}_\phi$ .

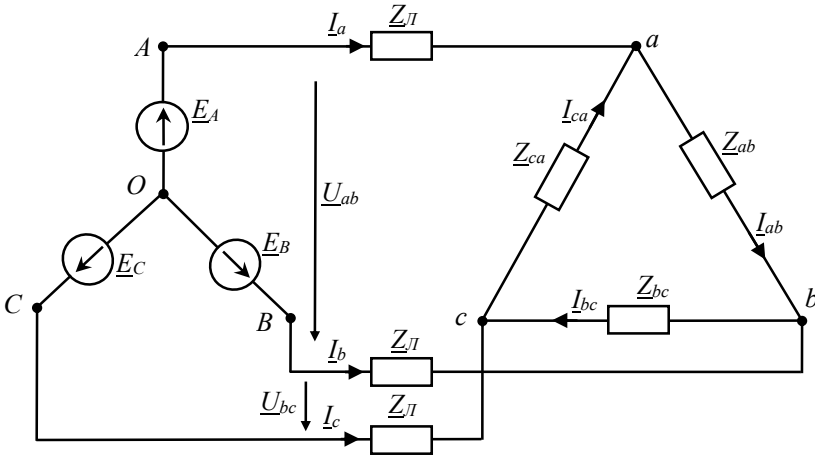


Рис. 17.9

1)  $\underline{Z}_l = 0$  ( $\underline{Z}_l \ll \underline{Z}_\phi$ )

Тоді  $\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{ab}$ ;  $\underline{U}_{BC} = \underline{U}_{bc}$ ;  $\underline{U}_{CA} = \underline{U}_{ca}$ .

Припустимо, що  $\underline{U}_{ab} = U_{ab}$  ( $\varphi_{ab} = 0$ ).

Тоді  $\underline{I}_{ab} = \frac{U_{ab}}{\underline{Z}_{ab}}$ ;  $\underline{I}_{bc} = a^2 \underline{I}_{ab} = \underline{I}_{ab} e^{-j120^\circ}$ ;  $\underline{I}_{ca} = \underline{I}_{ab} \cdot a = \underline{I}_{ab} e^{j120^\circ}$ .

Лінійні струми:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca};$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab};$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc}.$$

При цьому модулі  $I_l = \sqrt{3} I_\phi$

2)  $\underline{Z}_l \neq 0$ .

У цьому випадку Δ перетворюється на Y (рис. 17.10):

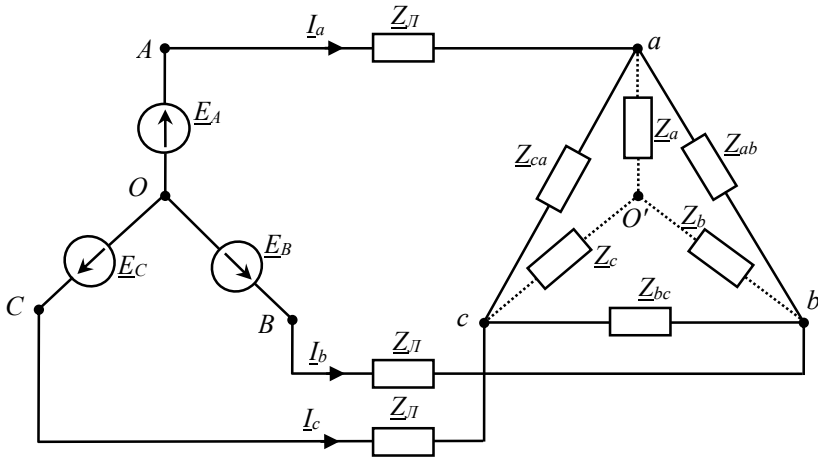


Рис. 17.10

$$\underline{Z}_a = \frac{\underline{Z}_{ab} \cdot \underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}} = \frac{\underline{Z}_\phi^2}{3\underline{Z}_\phi} = \frac{\underline{Z}_\phi}{3}, \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z}_a.$$

$$\text{Далі: } \underline{I}_a = \frac{U_A}{\underline{Z}_l + \underline{Z}_\phi}; \underline{I}_B = \underline{I}_a e^{-j120^\circ}; \underline{I}_C = \underline{I}_a e^{j120^\circ}.$$

Тепер переходимо до заданої схеми і через лінійні струми визначаємо фазні трикутника:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{I}_a}{\sqrt{3}} \cdot e^{j30^\circ}; \underline{I}_{bc} \text{ та } \underline{I}_{ca} \text{ зсунуті по фазі відносно } \underline{I}_{ab} \text{ на } \pm 120^\circ$$

### 3) Аварійні режими:

- Обрив провідника  $A - a$  (при  $\underline{Z}_l = 0$ ). Тоді  $\Delta$  навантаження буде під лінійною напругою  $\underline{U}_{BC}$ . При цьому струм  $\underline{I}_{bc}$  не зміниться, а опори  $\underline{Z}_{ab}$  та  $\underline{Z}_{ca}$  між собою будуть з'єднанні послідовно, а разом до опору  $\underline{Z}_{bc}$  – паралельно. Модулі струмів в опорах  $\underline{Z}_{ab}$  та  $\underline{Z}_{ca}$  будуть вдвічі менші модуля  $\underline{I}_{bc}$ . Лінійний струм  $\underline{I}_B = \underline{I}_{bc}$ , а  $\underline{I}_C = 1,5\underline{I}_{bc}$ .

- Обрив в фазі  $ab$  (при  $\underline{Z}_l = 0$ ). Тоді  $\underline{I}_{ab} = 0$ . Фазні струми  $\underline{I}_{bc}$  та  $\underline{I}_{ca}$  не змінюються. Лінійні струми  $\underline{I}_A = -\underline{I}_{ca}$ ;  $\underline{I}_B = \underline{I}_{bc}$ ;  $\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc}$  (не змінюються).

### 4.3. З'єднання $\Delta - \Delta$ (рис. 17.11)

$$\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = \underline{Z}_\phi$$

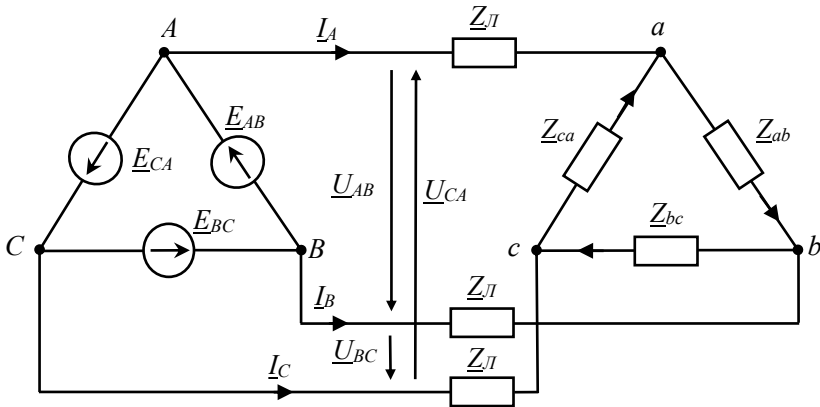


Рис. 17.11

1)  $Z_{\text{л}} = 0$ . Тоді  $\underline{U}_{ab} = \underline{U}_{AB}$ ;  $\underline{U}_{bc} = \underline{U}_{BC}$ ;  $\underline{U}_{ca} = \underline{U}_{CA}$ .

Фазні струми:  $\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{Z_{\phi}}$ ;  $\underline{I}_{bc} = \underline{I}_{ab} \cdot a^2$ ;  $\underline{I}_{ca} = \underline{I}_{ab} \cdot a$ .

Лінійні струми:  $\underline{I}_A = \sqrt{3} \underline{I}_{ab} \cdot e^{-j30^\circ}$ .

$$\underline{I}_B = \underline{I}_A \cdot a^2; \underline{I}_C = \underline{I}_A \cdot a.$$

2)  $Z_{\text{л}} \neq 0$ . Змінюємо  $\Delta$  ЕРС та  $\Delta$  опорів зірками і переходимо до схеми рис.10. При цьому  $\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_{AB}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ}$ , а фазні опори:  $\underline{Z}_a = \frac{Z_{\phi\Delta}}{3} = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z}_{\phi Y}$ .

$$\text{Тоді } \underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A}{Z_{\text{л}} + \underline{Z}_a}; \underline{I}_B = \underline{I}_A \cdot a^2; \underline{I}_C = \underline{I}_A \cdot a.$$

Струми трикутника схеми рис.11:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{I}_A}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ}; \underline{I}_{bc} = a^2 \underline{I}_{ab}; \underline{I}_{ca} = a \cdot \underline{I}_{ab}.$$

Примітка. Частіше на схемах з'єднання фазних ЕРС генератора не показують, а задають тільки відводи:

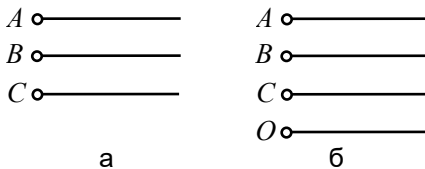


Рис. 17.12

Для рис.12б однозначно, що фази генератора з'єднанні Y, а для рис.12а – також вважаємо Y.

### 17.5. ПОТУЖНОСТІ СЕМИТРИЧНОЇ ТРИФАЗНОЇ СИСТЕМИ.

Для симетричної системи достатньо визначити потужність однієї фази і помножити на три:

- Активна:

$$P = 3U_{\phi}I_{\phi} \cos \varphi_{\phi},$$

для  $\Delta$ :  $U_{\phi} = U_{л}; I_{л} = \sqrt{3}I_{\phi}$

для  $Y$ :  $U_{\phi} = U_{л}/\sqrt{3}; I_{\phi} = I_{л}$

Тоді незалежно від з'єднання через лінійні величини  $P = \sqrt{3}U_{л}I_{л} \cos \varphi_{\phi}$ . (також, через струм та опори навантаження  $P = 3I_{\phi}^2 R_a$ ). Відмітимо, що  $\varphi_{\phi}$  – зсув фазного струму відносно фазної напруги.

- Реактивна:  $Q = 3U_{\phi}I_{\phi} \sin \varphi_{\phi} = \sqrt{3}U_{л}I_{л} \sin \varphi_{\phi}$

Також, через струм та опори навантаження  $Q = 3I_{\phi}^2 X_{\phi}$ .

- Повна:  $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 3U_{\phi}I_{\phi} = \sqrt{3}U_{л}I_{л} = 3I_{\phi}^2 Z_{\phi}$ .

Помітимо, що всі ці потужності можна визначити і в комплексній формі:

$$\underline{S} = 3\underline{U}_{\phi}I_{\phi}^* = 3UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi.$$

### 17.6. НЕСИМЕТРИЧНІ РЕЖИМИ РОБОТИ ТРЬОХФАЗНИХ КІЛ

А. З'єднання зіркою.

Навантаження несиметричне (рис. 17.3).

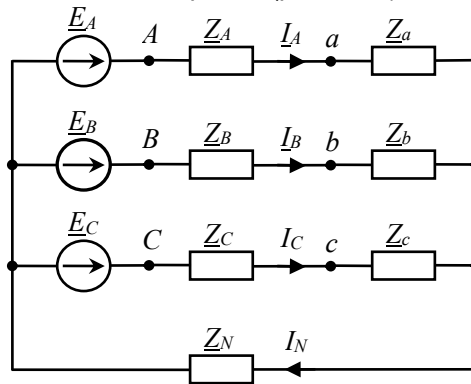


Рис. 17.13

Схема має три контури і може бути розрахована методом контурних струмів, вузлових потенціалів (напруг) тощо. Враховуючи те, що в схемі всього два вузли, зручніше застосувати метод вузлових потенціалів.

Якщо взяти  $\varphi_0 = 0$ , то:

$$\underline{U}_{\dot{O}O} = \underline{\varphi}_0 = \frac{Y_A \underline{E}_A + Y_B \underline{E}_B + Y_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N},$$

де  $\underline{Y}_A = \frac{1}{Z_L + Z_a}$ ;  $\underline{Y}_B = \frac{1}{Z_L + Z_b}$ ;  $\underline{Y}_C = \frac{1}{Z_L + Z_c}$ ;  $\underline{Y}_N = \frac{1}{Z_N}$ .

В сучасних лініях  $Z_N = Z_L$ .

Фазні струми:

$$\underline{I}_A = \underline{U}_{A\dot{O}} \underline{Y}_A = (\underline{E}_A - \underline{U}_{\dot{O}O}) \cdot \underline{Y}_A;$$

$$\underline{I}_B = \underline{U}_{B\dot{O}} \underline{Y}_B = (\underline{E}_B - \underline{U}_{\dot{O}O}) \cdot \underline{Y}_B;$$

$$\underline{I}_C = \underline{U}_{C\dot{O}} \underline{Y}_C = (\underline{E}_C - \underline{U}_{\dot{O}O}) \cdot \underline{Y}_C.$$

Струм в нульовому проводі  $\underline{I}_N = \underline{U}_{\dot{O}O} \underline{Y}_N$  (або  $\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C$ ).

Примітка. Режим, коли виникає обрив нульового проводу при несиметричному навантаженні може призвести до появи на фазах навантаження недопустимих напруг. З цього приводу запобіжник в нульовий провід не включають. Розглянемо приклад з різко вираженою не симетрією по характеру навантаження.

Задача (рис. 17.14).

$$U_\phi = 100\text{В}$$

$$R_a = X_{c(b)} = X_{L(c)} = 10 \text{ Ом.}$$

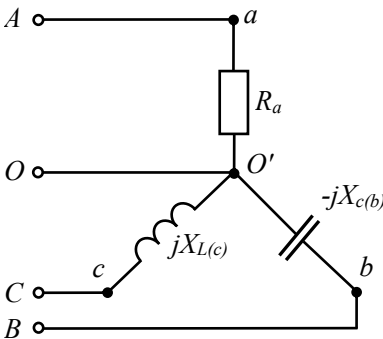


Рис. 17.14

Визначити струми віток (фаз) при наявності нульового проводу та при його обриві.

А.1)  $\underline{U}_a = 100\text{В}$ ,  $\underline{U}_b = 100e^{-j120^\circ}\text{В}$ ,  $\underline{U}_c = 100e^{j120^\circ}\text{В}$ .

3)  $\underline{I}_D = 10 + 10 < -30^\circ + 10 < 30^\circ = 10 + 8,66 - j5 + 8,66 + j5 = 27,3\text{А}$ .

Б.  $\underline{Z}_O = \infty$ .

$$\underline{\varphi}_0 = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_a + \underline{U}_B \underline{Y}_b + \underline{U}_C \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c} = \frac{100 \frac{1}{10} + 100e^{-j120^\circ} \frac{1}{-j10} + 100e^{j120^\circ} \frac{1}{j10}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{-j10} + \frac{1}{j10}}$$

$$= 273\text{В.}$$

$$\underline{U}_{00} = \underline{\varphi}_0 = 273\text{В.}$$

Фазні напруги джерела  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$  – ті самі, що і в пункті А (рис. 17.15).

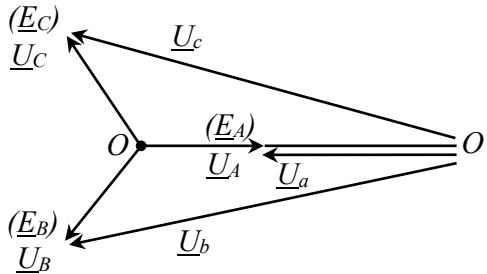


Рис. 17.15

Фазні напруги приймача:

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A - \underline{\varphi}_0 = 100 - 273 = -173 = 173e^{j180^\circ} \text{ В}$$

$$(\underline{E}_A - \underline{\varphi}_0)$$

$$\underline{U}_b = \underline{U}_B - \underline{\varphi}_0 = 100e^{-j120^\circ} - 273 = -50 - j87 - 273 = 335e^{-j165^\circ} \text{ В.}$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_C - \underline{\varphi}_0 = 100e^{j120^\circ} - 273 = -50 + j87 - 273 = 335e^{j165^\circ} \text{ В.}$$

Фазні струми:

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_a}{R_a} = \frac{173e^{j180^\circ}}{10} = 17,3e^{j180^\circ} \text{ А.}$$

$$\underline{I}_b = \frac{335e^{-j165^\circ}}{-j10} = 33,5e^{-j75^\circ} \text{ А}$$

$$\underline{I}_c = \frac{335e^{j165^\circ}}{j10} = 33,5e^{j75^\circ} \text{ А.}$$

$$(\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0) \quad \underline{I}_b + \underline{I}_c = -\underline{I}_a$$

Векторна діаграма відображена на рис. 17.16

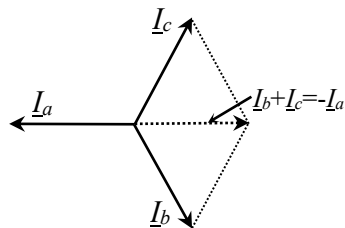


Рис. 17.16

З'єднання трикутником (рис. 17.17).



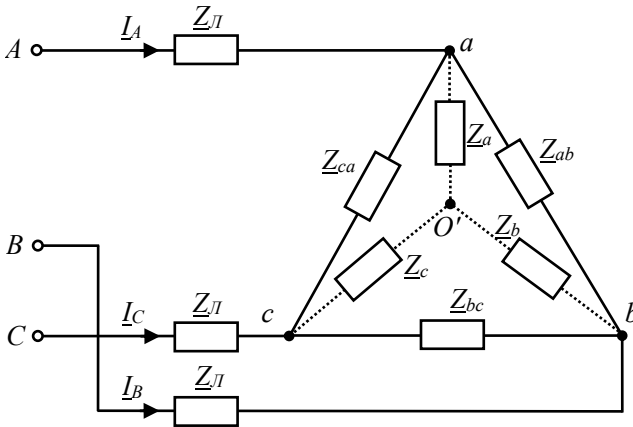


Рис. 17.17

Навантаження несиметричні (опори навантаження можуть розрізнятися, як по величині, так і по характеру)

1. Якщо  $Z_L = 0$  ( $Z_L$  значно менше опорів навантаження), тоді одразу знаходимо фазні струми:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ab} &= \underline{U}_{AB}; \underline{U}_{bc} = \underline{U}_{BC}; \underline{U}_{ca} = \underline{U}_{CA} \\ \underline{I}_{ab} &= \frac{\underline{U}_{ab}}{Z_{ab}}; \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{Z_{bc}}; \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{Z_{ca}}. \end{aligned}$$

Лінійні струми:  $\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca}$ ;  $\underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab}$ ;  $\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc}$ .

2.  $Z_L \neq 0$ ;

- $\Delta$  опорів перетворюємо на  $Y$ :  $Z_a, Z_b, Z_c$ .

- знаходимо  $\varphi_{O'}$  =  $\frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}$ .

Тут приймаємо довільно  $\underline{E}_A = \frac{U_L}{\sqrt{3}}$ , а фази  $\underline{E}_B$  та  $\underline{E}_C$  відповідно зсунуті на  $\pm 120^\circ$ .

- Визначаємо напруги  $\underline{U}_{AO'}, \underline{U}_{BO'}, \underline{U}_{CO'}$  (див. з'єднання зіркою).

- Визначаємо лінійні струми  $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$ .

- Визначаємо напруги на фазах приймачів:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{I}_a \cdot Z_a - \underline{I}_b \cdot Z_b; \underline{U}_{bc} = \underline{I}_b \cdot Z_b - \underline{I}_c \cdot Z_c; \underline{U}_{ca} = \underline{I}_c \cdot Z_c - \underline{I}_a \cdot Z_a.$$

- Знаходимо фазні струми  $\Delta$ :  $\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{Z_{ab}}$ ; .....

### 17.7. ПОТУЖНІСТЬ НЕСИМЕТРИЧНОГО ТРИФАЗНОГО КОЛА ТА ЇЇ ВИМІРЮВАННЯ

В комплексній формі повна потужність:

$$\underline{S} = \underline{U}_A \cdot \underline{I}_A^* + \underline{U}_B \cdot \underline{I}_B^* + \underline{U}_C \cdot \underline{I}_C^* = P + j \cdot Q,$$

де  $P = U_A \cdot I_A \cdot \cos \varphi_A + U_B \cdot I_B \cdot \cos \varphi_B + U_C \cdot I_C \cdot \cos \varphi_C$  – активна;

$Q = U_A \cdot I_A \cdot \sin \varphi_A + U_B \cdot I_B \cdot \sin \varphi_B + U_C \cdot I_C \cdot \sin \varphi_C$  – реактивна.

Зауважимо, що  $P = P_A + P_B + P_C$  – сума арифметична (може бути розрахована і зі сторони навантаження  $P = \sum I_K^2 \cdot R_K$ ).

$Q = Q_A + Q_B + Q_C$  – сума алгебраїчна (зі сторони навантаження  $Q = \sum I_K^2 \cdot X_K$ , де  $+X_L, -X_C$ ).

Для вимірювання трьох складових  $P$  в чотирьох провідному колі необхідно три параметри.

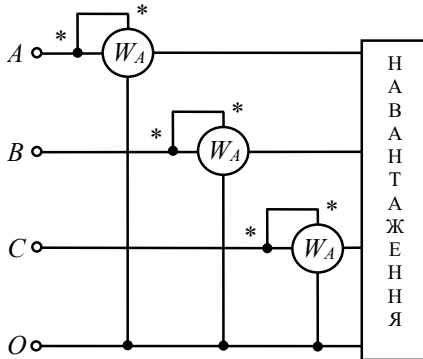


Рис. 17.18

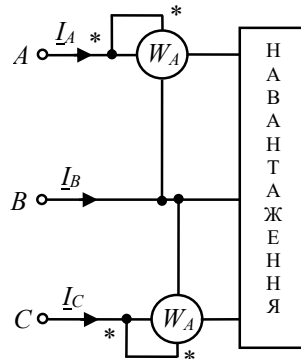


Рис. 17.19

Для трьох провідного кола комплексна потужність з урахуванням  $I_A + I_B + I_C = 0$ :

$$\underline{S} = \underline{U}_A \cdot \underline{I}_A^* + \underline{U}_B \cdot \underline{I}_B^* + \underline{U}_C \cdot \underline{I}_C^* = \underline{U}_A \cdot \underline{I}_A^* + \underline{U}_B \cdot (-\underline{I}_A - \underline{I}_C)^* + \underline{U}_C \cdot \underline{I}_C^* = (\underline{U}_A - \underline{U}_B) \cdot \underline{I}_A^* + (\underline{U}_C - \underline{U}_B) \cdot \underline{I}_C^* = \underline{U}_{AB} \cdot \underline{I}_A^* + \underline{U}_{CB} \cdot \underline{I}_C^*.$$

$$\text{Тоді } P = U_{AB} \cdot I_A \cdot \cos(U_{AB} \wedge I_A) + U_{CB} \cdot I_C \cdot \cos(U_{CB} \wedge I_C).$$

Тобто для несиметричного трьох провідного кола достатньо включити два параметри (рис. 17.18).

Зауважимо, що в загальному випадку покази ватметрів  $W_1$  та  $W_2$  будуть розрізнятися, і може бути, що покази одного ватметра будуть від'ємними. Тоді  $P = P_1 + P_2$  з урахуванням знаків.

Примітка. У випадку симетричного навантаження можна

обійтися одним ватметром, створивши штучно нульову точку, так як показано на рис. 17.19.

$$R_g = R_W$$

$$P = 3P_W$$

### 17.8. ОБЕРТОВЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ

Спочатку розглянемо магнітне поле однієї котушки з змінним струмом (рис. 17.21).

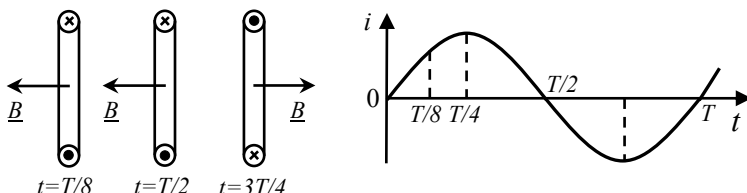


Рис. 17.20

Бачимо, що вектор магнітної індукції  $B$  пульсує вздовж осі, яка перпендикулярна площі котушки та проходить через її центр. Таке поле називається пульсуючим.

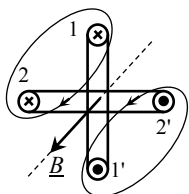


Рис. 17.21

Аналогічний результат дає система двох котушок, осі яких зміщені у просторі, але по ним тече один і той самий струм (рис. 17.21). Різниця тільки в тому, що при однакових котушках, які розміщені під кутом  $90^\circ$ , вісь поля розташована між котушками.

Таким чином, незалежно від кількості котушок, зміщених у просторі, при одному і тому струмі магнітне поле буде пульсуючим.

Розглянемо систему двох котушок, зміщених на  $90^\circ$ , із струмами, зміщеними за фазою на чверть періоду (рис. 17.22).

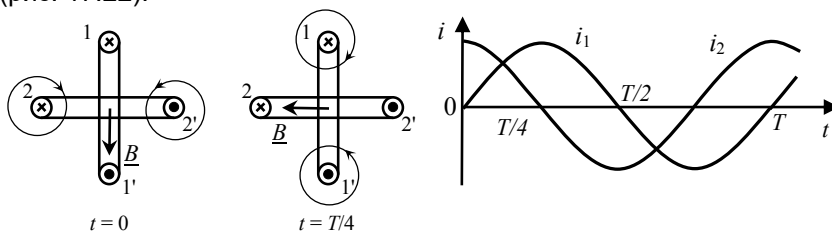


Рис. 17.22

Тут 1;2 – умовні початки, а 1', 2' – умовні кінці котушок.

З рис. 17.22 видно, що за  $\Delta t = T/4$  вектор магнітної індукції повернувся на  $\frac{1}{4}$  обороту. Тоді для двополюсного поля ( $N - S$ ) періоду  $T$  відповідає 1 оберт. Тоді частота обертання двополюсного поля

$$n = f \quad \text{об/с} \quad \text{або} \quad n = 60f \quad \text{об/с}$$

Якщо ці дві котушки розмістити на дузі  $180^\circ$ , то за  $\Delta t = T$  поле здійснить  $\frac{1}{2}$  оборота, а розміщуючи на другій половині ще 2 котушки, ми можемо отримати 4-х полюсну систему  $N - S$ . Отже, чим більше полюсів створюють обмотку, тим менше швидкість обертання. Позначимо  $P$  – кількість пар полюсів, отримуємо

$$n = f/P \quad \text{об/с} \quad \text{або} \quad n = \frac{60f}{P} \quad \text{об/с}$$

При промисловій частоті  $f = 50\text{Гц}$  маємо наступний ряд частот обертання:

$P$	1	2	3	4
$n, \text{об/хв}$	3000	1500	1000	750

Висновок: для утворення обертового магнітного поля необхідно:

1. Мінімум дві котушки (обмотки), осі яких зміщені у просторі.
2. Наявність зсуву фаз між струмами котушок.

В однофазних двигунах, які живляться від однофазної мережі, зсув фаз досягається включенням в одну з обмоток фазо зміщеного елемента, наприклад конденсатора.

Стосовно трифазної мережі ми вже маємо зсув фаз між напругами та струмами на  $T/3$ , а осі обмоток розміщуються під кутом  $\pm 120^\circ$  геометричних градусів. Таким чином, умови утворення обертового магнітного поля виконуються тут автоматично.

### 17.9. ПРИНЦИП РОБОТИ ТРИФАЗНОГО АСИНХРОННОГО ДВИГУНА

Нерухому частиною двигуна є статор, в пазах якого укладена трьох фазна обмотка (осі фазних обмоток зміщені в просторі на кут  $\pm 120^\circ$ ). Рухома частина – ротор виконується в основному короткозамкненим: пази ротора заповнюють алюмінієм, утворюючи короткозамкнену обмотку типу «біляча клітка».

При підключенні трифазної обмотки до трифазної мережі утворюється обертове магнітне поле. Частота обертання поля  $n = \frac{60f}{P}$ .

Обертове магнітне поле перетинає провідники ротора та наводить в них ЕРС  $P_2$ . На рис.23 показані силові лінії магнітного потоку, які обертаються, та провідник ротора.

Застосовуючи правило правої руки, отримуємо напрям ЕРС  $e_2$  та струму  $i_2$  в провіднику (для застосування цього правила, потрібно умовно застопорити магнітний потік, а провідник рухати у протилежному напрямку).

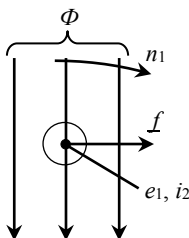


Рис. 17.23

Під дією ЕРС  $e_2$  утворюється струм  $i_2$ . Взаємодія потоку  $\Phi$  і струму  $i_2$  (правило лівої руки) утворює електромагнітну силу  $f$ , яка рухає провідник (ротор) в напрямку обертання поля з частотою  $n_2$ . При цьому завжди  $n_2 < n_1$ . Якщо припустити  $n_2 = n_1$ , то  $e_2 = 0 \rightarrow i_2 = 0 \rightarrow f = 0$ . Тому такий двигун називається асинхронним. Різниця частот обертання характеризує ковзання:

$$S = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \cdot 100\%$$

У номінальному режимі  $S_H = 2 \dots 6\%$ , тобто частота обертання ротора близька до частоти обертання поля.

#### КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 17

1. Що таке трифазна система електричного струму, і які її основні переваги порівняно з однофазною системою?
2. Як визначаються лінійна та фазна напруги в трифазному колі, і в чому їхня різниця?
3. Яка різниця між зірковим та трикутним з'єднанням трифазних навантажень?
4. Як обчислити загальну потужність трифазної системи за відомими фазними та лінійними струмами і напругами?
5. Чому трифазні кола зазвичай використовуються для передачі та розподілу електроенергії в промисловості?
6. Як відбувається симетричне і несиметричне навантаження трифазного кола, і які наслідки можуть виникнути у випадку несиметричного навантаження?
7. Що таке зсув фаз у трифазних системах і як його враховують при обчисленнях?
8. Які параметри трифазного кола можна виміряти за допомогою ватметра, і як здійснюється їх розрахунок?

# XVIII РОЗДІЛ

## МЕТОД СИМЕТРИЧНИХ СКЛАДОВИХ

Метод симетричних складових широко використовують для аналізу і розрахунків несиметричних режимів у трифазних колах. Метод базується на представленні довільної трифазної несиметричної системи величин (струмів, напруг, магнітних потоків) у вигляді суми в загальному вигляді трьох симетричних систем величин. Ці симетричні системи, які в сукупності складають несиметричну систему, називаються її *симетричними складовими*.

### 18.1 ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ ПРО СИМЕТРИЧНІ СИСТЕМИ

Симетричною  $m$ -фазною системою ЕРС або струмів називають систему з  $m$  однакових за величиною ЕРС або струмів за умови, що всі наступні ЕРС або струми відстають по фазі від попередніх на один і той самий кут  $\frac{2\pi q}{m}$ , де  $q$  – довільне ціле число. Змінюючи  $q$  від 0 до  $m-1$  або від 1 до  $m$  ми отримуємо всі можливі типи  $m$ -фазних систем. У 1918 році Чарльз Легейт Фортеск'ю довів, що будь-який набір з  $m$  несиметричних векторів (тобто довільний багатофазний сигнал) може бути виражений сумою  $m$  наборів симетричних векторів.

При  $q=1$  отримуємо систему з прямою послідовністю слідування фаз (пряму систему), при  $q=-1$  – систему з зворотним порядком слідування (обернену систему). Якщо ж прийняти  $q=0$  або  $q=m$ , маємо систему нульового порядку, коли всі вектори співпадають один з одним. Отже, симетричні складові відрізняються одна від одної порядком слідування фаз, тобто порядком, у якому фазні величини проходять через максимум. Ці складові називають *прямою, зворотною і нульовою послідовністю*.

Звідси слідує, що вектори, які відображають всі ЕРС або струми довільної ненульової симетричної системи завжди утворюють симетричну зірку, якщо всі вони мають спільний початок, або замкнутий правильний багатокутник, якщо кінець одного вектору є початком наступного (рис. 18.1, 18.2), а, отже, геометрична сума цих векторів дорівнює нулю.

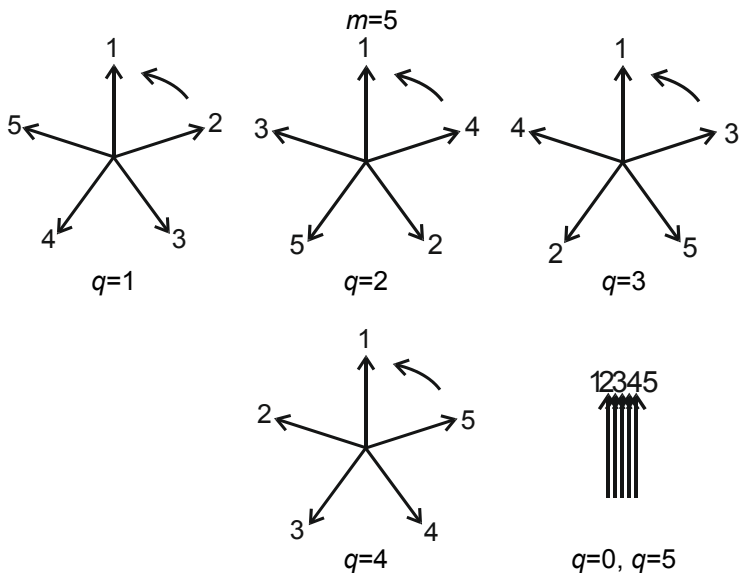


Рис. 18.1. Векторні діаграми всіх типів п'ятифазних симетричних систем

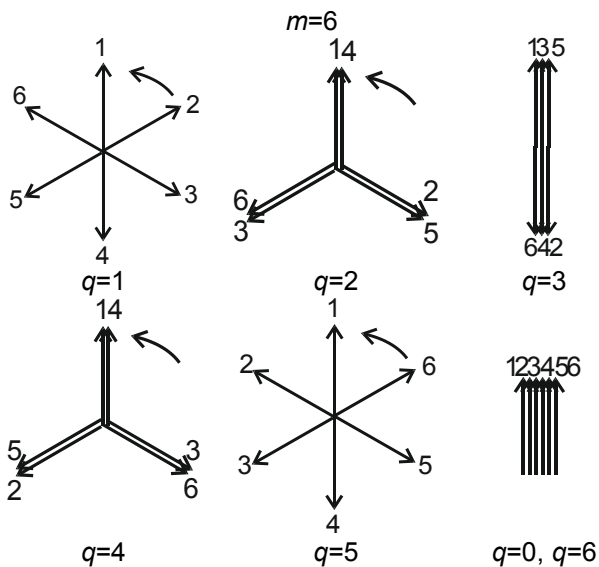


Рис. 18.2. Векторні діаграми всіх типів шестифазних симетричних систем

Сума миттєвих значень усіх ЕРС або струмів, які утворюють симетричну ненульову систему дорівнює нулю у будь який момент часу.

На відміну від цього для нульових симетричних систем маємо:

$$\sum_{k=1}^m e_k = e_1 + e_2 + \dots + e_m = me_1, \tag{18.1}$$

$$\sum_{k=1}^m \underline{E}_k = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \dots + \underline{E}_m = m\underline{E}_1$$

оскільки всі вектори, які є зображеннями ЕРС, що утворюють нульову послідовність, є однаковими за величиною і напрямом.

### 18.2. СИМЕТРИЧНІ СКЛАДОВІ ТРИФАЗНОЇ СИСТЕМИ ВЕЛИЧИН

Базуючись на принципі накладання, який застосовується для лінійних систем, будь-яку довільну несиметричну трифазну систему можна розкласти на три симетричні трифазні системи: нульову, пряму і зворотну. Фактично, цей метод перетворює три несиметричні фази на три незалежних джерела. Такий розклад широко застосовується при аналізі роботи трифазних машин і особливо при розрахунку струмів короткого замикання в трифазних колах.

Позначимо трифазну систему величин (струмів, напруги, магнітних потоків) для загальності літерами A, B, C. Величини, що відносяться до систем прямої, оберненої і нульової послідовності, відмітимо відповідно індексами 1, 2 і 0. На рис. 18.3 показаний приклад векторних діаграм симетричних складових усіх трьох послідовностей.

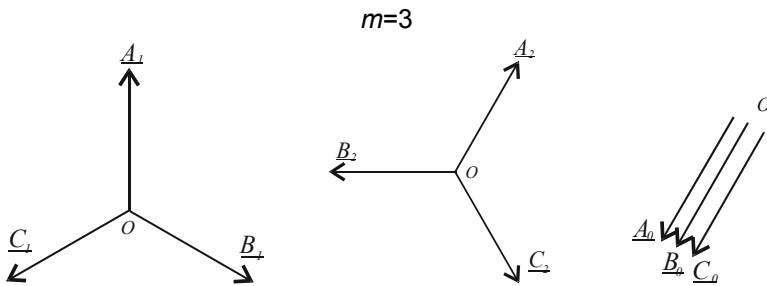


Рис. 18.3. Трифазні системи прямої, оберненої і нульової послідовності



Система прямої послідовності має порядок слідування фаз A, B, C, тобто вектори A, B, C при обраному напрямі обертання векторів проти годинникової стрілки слідують один за одним в порядку букв абетки. Система зворотної послідовності має порядок слідування фаз A, C, B, тобто порядок слідування букв є зворотним. Система нульової послідовності складається з трьох однакових величин, які співпадають по фазі. Для цих трьох систем можна записати наступні залежності:

$$\underline{B}_1 = A_1 e^{-j2\pi/3}, \quad \underline{C}_1 = A_1 e^{j2\pi/3}, \quad (18.2)$$

$$\underline{B}_2 = A_2 e^{j2\pi/3}, \quad \underline{C}_2 = A_2 e^{-j2\pi/3}, \quad (18.3)$$

$$\underline{A}_0 = \underline{B}_0 = \underline{C}_0. \quad (18.4)$$

Комплексне число  $e^{j2\pi/3}$  називають фазним множником і скорочено позначають буквою  $a$ :

$$a = e^{j2\pi/3} = e^{-j4\pi/3} = \cos(2\pi/3) + j \sin(2\pi/3) = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (18.5)$$

Множення вектора на  $a$  відповідає його повороту проти напрямку годинникової стрілки (вперед) на  $120^\circ$  або повороту за напрямом руху годинникової стрілки (назад) на  $240^\circ$ . При цьому множення на  $a^2$  відповідає повороту його вперед на  $240^\circ$  або повороту назад на  $120^\circ$ :

$$a^2 = e^{j2\pi/3} e^{j2\pi/3} = e^{j4\pi/3} = e^{-j2\pi/3} = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (18.6)$$

Отже, за допомогою фазного множника співвідношення (18.2) і (18.3) можна записати як

$$\underline{B}_1 = a^2 \underline{A}_1, \quad \underline{C}_1 = a \underline{A}_1, \quad (18.7)$$

$$\underline{B}_2 = a \underline{A}_2, \quad \underline{C}_2 = a^2 \underline{A}_2, \quad (18.8)$$

Окрім того,

$$a^3 = e^{j2\pi} = 1. \quad (18.9)$$

Використовуючи останнє співвідношення (18.9), можна виключити з залежностей множник  $a$  у степенях, більших за другу, наприклад:

$$a^4 = a^3 a = a, \quad a^5 = a^3 a^2 = a^2.$$

Аналіз залежностей (18.5) і (18.6) показує, що  $1$ ,  $a$  і  $a^2$  утворюють симетричну систему одиничних векторів (рис. 18.4). Їх сума дорівнює нулю:

$$1 + a + a^2 = 0. \quad (18.10)$$

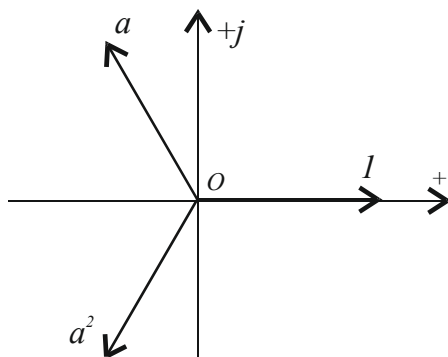


Рис. 18.4. Симетрична система одиничних векторів

*Твердження.* Довільну несиметричну систему векторів  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  і  $\underline{C}$  можна розкласти на симетричні системи прямої, зворотної і нульової послідовності.

*Доведення.* Якщо це має місце, то

$$\underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 + \underline{A}_0, \quad (18.11)$$

$$\underline{B} = \underline{B}_1 + \underline{B}_2 + \underline{B}_0, \quad (18.12)$$

$$\underline{C} = \underline{C}_1 + \underline{C}_2 + \underline{C}_0. \quad (18.13)$$

Виразимо у цих рівняннях всі вектори симетричних систем через вектори  $\underline{A}_1$ ,  $\underline{A}_2$  і  $\underline{A}_0$ , користуючись співвідношеннями (18.4), (18.5) і (18.6)

$$\underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 + \underline{A}_0 \quad (18.14)$$

$$\underline{B} = a^2 \underline{A}_1 + a \underline{A}_2 + \underline{A}_0 \quad (18.15)$$

$$\underline{C} = a \underline{A}_1 + a^2 \underline{A}_2 + \underline{A}_0 \quad (18.16)$$

З отриманих трьох рівнянь можна однозначно визначити вектори  $\underline{A}_1$ ,  $\underline{A}_2$  і  $\underline{A}_0$ , що і доводить можливість розкладання заданої несиметричної системи векторів  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  і  $\underline{C}$  на три симетричні системи. Складаючи рівняння (18.14)-(18.16), отримуємо

$$\underline{A} + \underline{B} + \underline{C} = (1 + a^2 + a) \underline{A}_1 + (1 + a^2 + a) \underline{A}_2 + 3 \underline{A}_0.$$

Звідки, враховуючи (18.10) маємо

$$\underline{A}_0 = \frac{1}{3} (\underline{A} + \underline{B} + \underline{C}) \quad (18.17)$$

Перемноживши рівняння (18.15) на  $a$ , і (18.16) на  $a^2$ , і надалі склавши рівняння (18.14)-(18.16), знаходимо, що

$$\underline{A}_1 = \frac{1}{3} (\underline{A} + a \underline{B} + a^2 \underline{C}). \quad (18.18)$$

Помноживши рівняння (18.15) на  $a^2$  і (18.16) на  $a$  і склавши рівняння (18.14)-(18.16), отримуємо

$$\underline{A}_2 = \frac{1}{3} (\underline{A} + a^2 \underline{B} + a \underline{C}). \quad (18.19)$$

### 18.3. ВЛАСТИВОСТІ ТРИФАЗНИХ КІЛ ПО ВІДНОШЕННЮ ДО СИМЕТРИЧНИХ СКЛАДОВИХ СТРУМІВ І НАПРУГИ

Із п. 18.2 випливає низка важливих наслідків.

Струм у нейтральному проводі чотирипровідної трифазної системи дорівнює сумі лінійних струмів і, отже, потрійному значенню складової нульової послідовності.

Якщо вектори  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$  утворюють замкнутий трикутник, тобто їх геометрична сума дорівнює нулю, то  $\underline{A}_0=0$  (18.17). Сума лінійних напруг трифазної системи дорівнює нулю, тому лінійні напруги не містять складових нульової послідовності. Система лінійних струмів за відсутністю нульового проводу також не містить нульову складову. Ступінь несиметрії лінійних напруг оцінюють вираженням у відсотках відношенням складової зворотної послідовності до складової прямої послідовності

$$\varepsilon = \frac{U_2}{U_1} \cdot 100\%.$$

Ця величина називається коефіцієнтом несиметрії. Систему лінійних напруг прийнято вважати практично симетричною, якщо  $\varepsilon \leq 5\%$ .

Сума фазних струмів у гілках приймача, з'єднаного трикутником, в загальному випадку відмінна від нуля, і тому ці струми можуть містити складові нульової послідовності.

Симетричні складові прямої і зворотної послідовності фазних напруг приймача, з'єднаного зіркою, однозначно пов'язані з відповідними симетричними складовими підведених до нього лінійних напруг. Звідси, фазні напруги різних приймачів, з'єднаних зіркою, за одних і тих же лінійних напруг мають однакові симетричні складові прямої і зворотної послідовностей і можуть відрізнитись одна від одної лише за рахунок симетричних складових нульової послідовності.

У випадку, коли при несиметричному режимі струм в одній або двох фазах є відсутнім, сума симетричних складових струмів в цих фазах дорівнює нулю.

Розрахунок струмів і напруг в таких системах здійснюють за допомогою схем заміщення, на яких всі елементи системи мають бути представленими комплексними опорами. Але опір на фазу для одного і того ж елемента є різним для різних послідовностей. Тому розрахунок проводять для кожної з послідовностей окремо, а тоді шукають величину (струм або напругу) визначають як суму струмів або відповідно напруг від прямої, зворотної і нульової послідовності.

Розглянемо причини неоднакових значень опорів одного і того ж елемента для різних послідовностей фаз (за відносно низьких частот).

Опір на фазу трифазної лінії передачі для прямої, зворотної і нульової послідовностей фаз позначимо відповідно  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$ ,  $\underline{Z}_0$ . Опір на фазу лінії для прямої послідовності дорівнює опорі на фазу лінії для зворотної послідовності  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$ , але не дорівнює опорі на фазу лінії для нульової послідовності фаз  $\underline{Z}_0$  через різницю у значеннях індуктивностей на фазу трифазної лінії для систем прямої і нульової послідовностей. Ця різниця пояснюється двома причинами.

По-перше, індуктивність на фазу лінії передачі для прямої і зворотної послідовності визначається лише геометричними розмірами витків, утвореними лінійними дротами, проте індуктивність на фазу лінії для нульової послідовності залежить не лише від них, але і від геометричних розмірів витків, утворених нульовим дротом.

По-друге, ЕРС, що наводяться у лінії для прямої і зворотної послідовностей, являють собою геометричну суму ЕРС, зсунутих за фазою на  $120^\circ$  і створених струмами у лінійних дротах, в той час як ЕРС, що наводяться в лінії для нульової послідовності, створені

струмами нульової послідовності, які співпадають по фазі.

Наприклад, в трифазному тристержньовому трансформаторі опір на фазу для нульової послідовності  $Z_0$  не дорівнює опорю на фазу для прямої послідовності  $Z_1$ ,  $Z_1 \neq Z_2$ . Це пояснюється тим, що магнітні потоки нульової послідовності  $\Phi_0$  для усіх трьох фаз знаходяться у фазі і тому не можуть замикатись по сусідніх стрижнях магнітної системи і замикаються по повітрю. Магнітні потоки трьох фаз прямої послідовності  $\Phi_1$  і відповідно зворотної послідовності  $\Phi_2$  є зсунутими по фазі на  $120^\circ$  і тому можуть замикатись по сусідніх стрижнях магнітної системи. Оскільки магнітний опір повітря набагато більше магнітного опорю сталі, то за однакових струмів прямої і нульової послідовностей  $\Phi_0 < \Phi_1$ . Тому  $Z_0 < Z_1$ . Ще більшою є різниця між опорями нульової  $Z_0$ , прямої  $Z_1$  і зворотної послідовностей  $Z_2$  має місце для асинхронного двигуна.

Якщо до вхідних затискачів трифазного асинхронного двигуна одночасно підвести систему напруг прямої, зворотної і нульової послідовностей фаз, то вхідний опір на фазу двигуна для прямої послідовності  $Z_1$  не буде дорівнювати вхідному опорю на фазу для зворотної послідовності  $Z_2$  і обидва вони будуть відмінні від вхідного опорю для нульової послідовності  $Z_0$ . Причина у тому, що під дією напруги прямої послідовності в двигуні створюється колове обертове магнітне поле зі швидкістю  $\omega$ . Воно захоплює за собою ротор двигуна, який обертається зі швидкістю  $\omega_{\text{рот}}$ . Система напруг зворотної послідовності також створює обертове магнітне поле, але його напрям обертання є оберненим для поля прямої послідовності.

Система нульової послідовності не створює обертового магнітного поля. Навколо статорних обмоток нею створюються пульсувальні потоки, які замикаються по повітряному проміжку між ротором і статором подібно до того, як в тристрижньовому трифазному трансформаторі потоки від нульової послідовності, виходячи з осердя, замикались по колу.

Вхідний опір на фазу двигуна для даної послідовності залежить не лише від активного і реактивного опорю фази статорної обмотки, але і від активного і реактивного опорю фази роторної обмотки. Індуктивний опір фази ротора прямо пропорційний частоті. ЕРС прямої послідовності створюють в роторі струми частоти  $\omega - \omega_{\text{рот}}$ , значення якої складає від 0,02 до 0,05  $\omega$ . Струми ротора від поля, яке обертається зворотно, мають частоту  $\omega + \omega_{\text{рот}}$ , значення якої

складає  $(1,95 \div 1,98)\omega$ . Оскільки частоти струмів в роторі, які створюються прямою і зворотною послідовностями, різняться, то різними є і вхідні опори на фазу для прямої  $\underline{Z}_1$  і зворотної  $\underline{Z}_2$  послідовностей.

Магнітні потоки нульової послідовності фаз замикаються поза ротором, а потоки прямої і зворотної послідовностей фаз проходять через ротор. При однаковому струмі прямої і зворотної послідовностей відповідні їм потоки є неоднаковими. Тому для асинхронного двигуна виконується

$$\underline{Z}_0 \neq \underline{Z}_1 \neq \underline{Z}_2.$$

*Приклади.*

У схемі, представлений на рис. 18.5, фази  $B$  і  $C$  є розімкнутими,  $I_B = I_C = 0$ . Застосовуючи формули (18.17)-(18.19), отримаємо:

$$\underline{I}_{A_1} = \frac{1}{3}(\underline{I}_A + a0 + a^2 0) = \frac{1}{3}\underline{I}_A,$$

Аналогічно отримуємо, що  $\underline{I}_{A_2} = \frac{1}{3}\underline{I}_A$ ,  $\underline{I}_{A_0} = \frac{1}{3}\underline{I}_A$ .

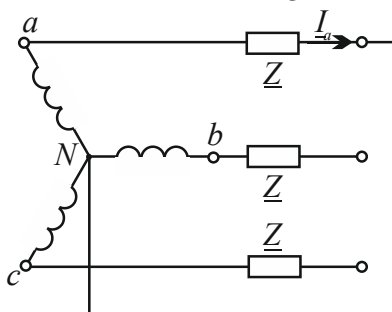


Рис. 18.5

На рис. 18.6 зображений вектор струму  $\underline{I}_A$  і побудовані векторні діаграми для систем симетричних складових струму всіх трьох фаз. Там же проведене геометричне додавання векторів симетричних складових струмів, яке показує, що

$$\underline{I}_{A_1} + \underline{I}_{A_2} + \underline{I}_{A_0} = \underline{I}_A,$$

$$\underline{I}_{B_1} + \underline{I}_{B_2} + \underline{I}_{B_0} = 0,$$

$$\underline{I}_{C_1} + \underline{I}_{C_2} + \underline{I}_{C_0} = 0.$$

На схемі рис. 18.7 струми  $\underline{I}_A = 0$  ,  $\underline{I}_B = -\underline{I}_C$  .

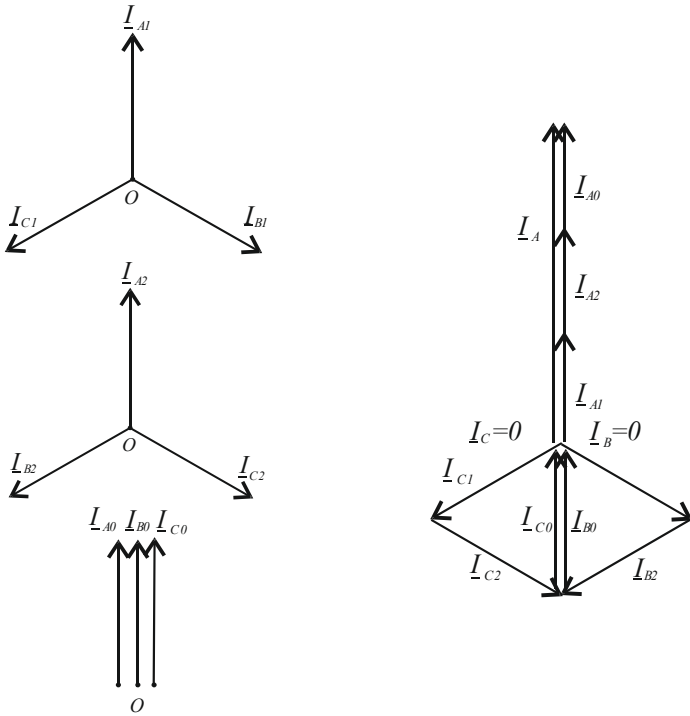


Рис. 18.6

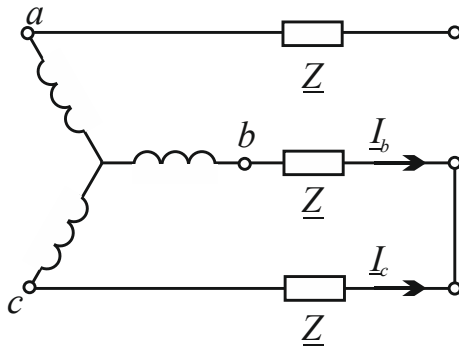


Рис. 18.7

За формулами (18.17, 18.19) отримуємо:

$$\underline{I}_{A0} = 0, \quad \underline{I}_{A1} = \frac{1}{3}(a\underline{I}_B + a^2\underline{I}_C) = \frac{\underline{I}_B}{3}(a - a^2) = i \frac{\underline{I}_B}{\sqrt{3}},$$

$$\underline{I}_{A2} = \frac{1}{3}(a^2\underline{I}_B + a\underline{I}_C) = \frac{\underline{I}_B}{3}(a^2 - a) = -i \frac{\underline{I}_B}{\sqrt{3}}.$$

На рис. 18.8 показана векторна діаграма струмів  $\underline{I}_B$  і  $\underline{I}_C$  та векторні діаграми симетричних складових струмів всіх трьох фаз. Геометричне додавання векторів показує, що  $\underline{I}_A = \underline{I}_{A1} + \underline{I}_{A2} = 0$ ,  $\underline{I}_B = \underline{I}_{B1} + \underline{I}_{B2}$ ,  $\underline{I}_C = \underline{I}_{C1} + \underline{I}_{C2}$ .

Симетричні складові струмів і напруги можуть бути не лише обчислені, а й виміряні за допомогою спеціальних електричних вимірювальних схем, які називаються фільтрами симетричних складових струмів і напруги. Ці фільтри широко застосовуються у релейному захисті електроенергетичних кіл.

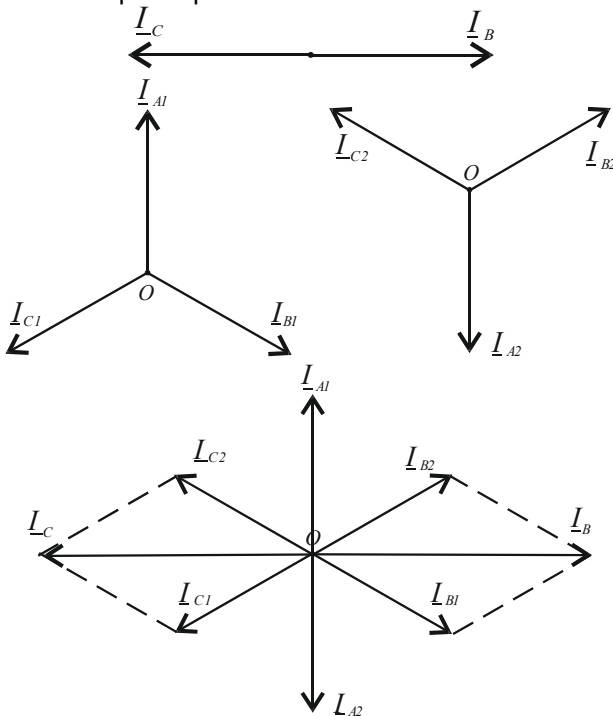


Рис. 18.8. Векторні діаграми симетричних складових струмів



#### 18.4. ФІЛЬТРИ СИМЕТРИЧНИХ СКЛАДОВИХ

Симетричні складові несиметричних систем можна визначати не лише аналітично або графічно, але і експериментально за допомогою електричних схем, що називаються *фільтрами симетричних складових*. Такі фільтри часто застосовуються в схемах, що захищають електричні установки від ненормальних режимів. Дійсно, в потужних електричних установках для генерування, передачі і розподілу енергії ступінь асиметрії системи напруги і струмів не має перевищувати наперед заданих меж. Іншими словами, нульова і зворотна складові системи напруги і системи струмів при нормальних режимах мають бути меншими деяких наперед заданих величин, які визначаються індивідуально для кожної установки.

Можливість виділити за допомогою електричних схем окремі симетричні складові дає змогу здійснити вплив будь-якого з них на прилади, які захищають установку, які, після відповідного регулювання, відімкнуть або всю установку, або її окрему частину, як тільки величина тієї чи іншої складової перевищить допустиму межу, і, таким чином, захистять установку від ненормального режиму роботи.

Виділені фільтрами з діючої схеми енергопостачання вектори напруги або струмів направляють у:

- схеми релейного захисту енергетичних установок для попередження виникання несиметричних режимів, що з'являються в результаті короткого замикання або пошкодження ізоляції;
- кола сигналізації для інформування оперативного персоналу.

Розглядаючи схеми фільтрів симетричних складових, для простоти припустимо, що у трансформаторів, які входять у ці схеми, відношення напруги на затискачах первинних і вторинних обмоток трансформаторів напруги, а також відношення струмів у первинних і вторинних обмотках трансформаторів струму дорівнюють одиниці.

На рис. 18.9 подані схеми фільтрів для виділення нульової складової системи фазних напруг і системи лінійних струмів. У першій схемі вторинні обмотки трансформаторів напруги увімкнені послідовно, і тому напруга на затискачах вольтметра дорівнює сумі фазних напруг, тобто потрібній нульовій складовій системи фазних напруг (18.16). У другій схемі вторинні обмотки трансформаторів струму увімкнуті паралельно, і, отже, струм, що проходить через амперметр, дорівнює сумі лінійних струмів, тобто потрібній нульовій складовій системи лінійних струмів.

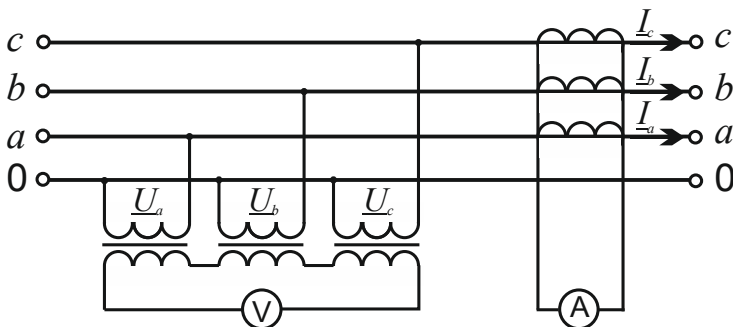


Рис. 18.9. Фільтри для виділення нульової складової системи фазних напруг і системи лінійних струмів.

На рис. 18.10 подана схема фільтра для виділення прямої і зворотної складових системи струмів, нульова складова якої дорівнює нулю. Визначимо умови, яким слідє підпорядкувати повні опори  $\underline{Z}_{ab}$  і  $\underline{Z}_{bc}$  елементів цієї схеми, причому повний опір амперметра позначимо через  $\underline{Z}_{ca}$ .

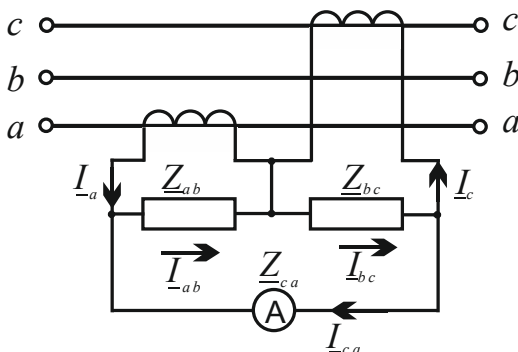


Рис. 18.10. Фільтр для виділення прямої і зворотної складових системи струмів, нульова складова якої дорівнює нулю

На основі законів Кірхгофа маємо:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{ab}\underline{Z}_{ab} + \underline{I}_{bc}\underline{Z}_{bc} + \underline{I}_{ca}\underline{Z}_{ca} &= 0 \\ \underline{I}_{ab} &= \underline{I}_a + \underline{I}_{ca}, \quad \underline{I}_{bc} = \underline{I}_c + \underline{I}_{ca}, \\ \underline{I}_{ca} &= -\frac{\underline{I}_a\underline{Z}_{ab} + \underline{I}_c\underline{Z}_{bc}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}. \end{aligned}$$

Оскільки нульова складова системи лінійних струмів за умовою дорівнює нулю, то, виразивши струми  $I_a$  і  $I_c$  через пряму і зворотну складові  $I_1$  і  $I_2$ , отримаємо:

$$\underline{I}_a = \underline{I}_1 + \underline{I}_2, \quad \underline{I}_c = a\underline{I}_1 + a^2\underline{I}_2,$$

і підставивши ці значення у вираз для  $\underline{I}_{ca}$ , знайдемо:

$$\underline{I}_{ca} = -\frac{\underline{I}_1(\underline{Z}_{ab} + a\underline{Z}_{bc}) + \underline{I}_2(\underline{Z}_{ab} + a^2\underline{Z}_{bc})}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}.$$

З цього виразу слідує, що струм  $\underline{I}_{ca}$ , який проходить через амперметр, не залежить від зворотної складової і пропорційний прямій складовій, якщо виконується умова:

$$\underline{Z}_{ab} + a^2\underline{Z}_{bc} = 0,$$

або

$$\underline{Z}_{ab} = -a^2\underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{bc}e^{j\frac{\pi}{3}},$$

і не залежить від прямої складової і пропорційний зворотній складовій, якщо виконується умова:

$$\underline{Z}_{ab} + a\underline{Z}_{bc} = 0$$

або

$$\underline{Z}_{bc} = -a^2\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{ab}e^{j\frac{\pi}{3}}.$$

Зокрема, фільтр для виділення прямої складової можна отримати, поклавши:

$$\underline{Z}_{bc} = R \quad \text{і} \quad \underline{Z}_{ab} = R \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} = \frac{R}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}R,$$

а фільтр для виділення зворотної складової (рис. 18.11), поклавши:

$$\underline{Z}_{ab} = R \quad \text{і} \quad \underline{Z}_{bc} = R \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} = \frac{R}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

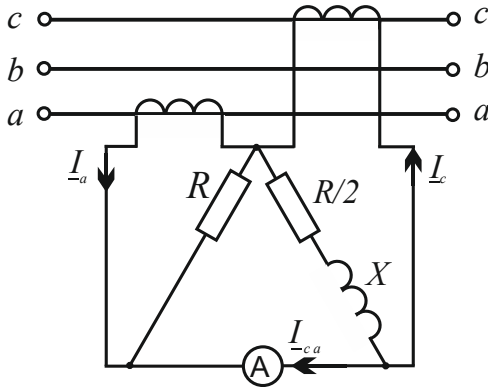


Рис. 18.11. Фільтр для виділення зворотної складової

На рис. 18.11 подана схема фільтра для виділення прямої і зворотної складової системи лінійних напруг.

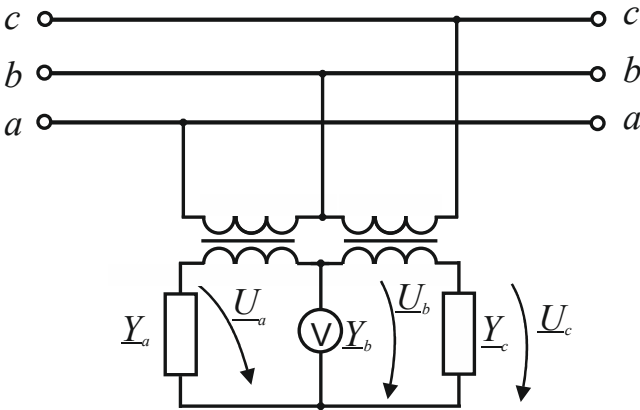


Рис. 18.12. Фільтр для виділення прямої і зворотної складової системи лінійних напруг

Знайдемо умови, яким мають задовольняти повні провідності  $\underline{Y}_a$  і  $\underline{Y}_c$  елементів цієї схеми, причому повну провідність вольтметра позначимо через  $\underline{Y}_b$ . На основі законів Кірхгофа маємо:

$$\underline{U}_a \underline{Y}_a + \underline{U}_b \underline{Y}_b + \underline{U}_c \underline{Y}_c = 0 ,$$

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_b - \underline{U}_a , \quad \underline{U}_{bc} = \underline{U}_c - \underline{U}_b ,$$

звідки отримуємо 
$$\underline{U}_b = \frac{\underline{U}_{ab}\underline{Y}_a - \underline{U}_{bc}\underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}.$$

Оскільки нульова складова системи лінійних напруг  $\underline{U}_{ab}$ ,  $\underline{U}_{bc}$ ,  $\underline{U}_{ca}$  дорівнює нулю, то, виразивши їх через пряму і зворотну складові  $\underline{U}_1$  і  $\underline{U}_2$ , маємо:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2, \underline{U}_{bc} = a^2\underline{U}_1 + a\underline{U}_2, \underline{U}_{ca} = a\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2.$$

Після підстановки цих значень у вираз для  $\underline{U}_b$ , знайдемо:

$$\underline{U}_b = \frac{\underline{U}_1(\underline{Y}_a - a^2\underline{Y}_c) + \underline{U}_2(\underline{Y}_a - a\underline{Y}_c)}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}.$$

З цього виразу слідує, що напруга  $\underline{U}_b$  на затискачах вольтметра не залежить від зворотної складової і пропорційна прямій складовій, якщо виконується умова:

$$\underline{Y}_a = a\underline{Y}_c \text{ або } \underline{Y}_c = a^2\underline{Y}_a,$$

і не залежить від прямої складової і пропорційна зворотній складовій, якщо виконується умова

$$\underline{Y}_a = a^2\underline{Y}_c \text{ або } \underline{Y}_c = a\underline{Y}_a.$$

Зокрема, фільтр для виділення прямої складової можна отримати, прийнявши

$$\underline{Y}_a = jb, \underline{Y}_c = \underline{Y}_a \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}b - j\frac{b}{2},$$

А фільтр для виділення зворотної складової (рис. 18.13), прийнявши

$$\underline{Y}_c = jb, \underline{Y}_a = \underline{Y}_c \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}b - j\frac{b}{2}.$$

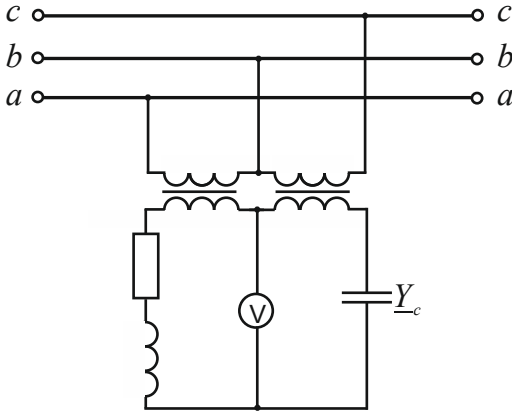


Рис. 18.13. Фільтр для виділення зворотної складової

Покажемо, що існує можливість підібрати елементи схеми фільтра таким чином, що у одній вітці схеми буде виділена пряма складова, а в іншій – зворотна складова. Для цього дослідимо вирази для напруги  $\underline{U}_a$  і  $\underline{U}_c$  на схемі на рис. 18.14, а саме:

$$\underline{U}_a = \underline{U}_b - \underline{U}_{ab} = \frac{-(\underline{U}_{ab} + \underline{U}_{bc})\underline{Y}_c - \underline{U}_{ab}\underline{Y}_b}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c} = \frac{\underline{U}_{ca}\underline{Y}_c - \underline{U}_{ab}\underline{Y}_b}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c},$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_b + \underline{U}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}\underline{Y}_c + (\underline{U}_{ab} + \underline{U}_{bc})\underline{Y}_a}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c} = \frac{\underline{U}_{bc}\underline{Y}_b - \underline{U}_{ca}\underline{Y}_a}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c},$$

звідки, ввівши замість  $\underline{U}_{ab}$ ,  $\underline{U}_{bc}$ ,  $\underline{U}_{ca}$  пряму і зворотну симетричні складові  $\underline{U}_1$  і  $\underline{U}_2$ , отримаємо:

$$\underline{U}_a = \frac{\underline{U}_1(a\underline{Y}_c - \underline{Y}_b) + \underline{U}_2(a^2\underline{Y}_c - \underline{Y}_b)}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}$$

$$\underline{U}_c = \frac{\underline{U}_1(a^2\underline{Y}_b - a\underline{Y}_a) + \underline{U}_2(a\underline{Y}_b - a^2\underline{Y}_a)}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}.$$

З цих виразів слідує, що  $\underline{U}_a$  пропорційна зворотній складовій, а  $\underline{U}_c$  – прямій складовій, якщо виконані умови:

$$\underline{Y}_a = \underline{Y}_c = a^2\underline{Y}_b.$$

Прийнявши  $\underline{Y}_b = jb$ , отримаємо  $\underline{Y}_a = \underline{Y}_c = a^2 \underline{Y}_b = \frac{\sqrt{3}}{2} b - j \frac{b}{2}$ .

Відповідна схема наведена на рис. 18.14.

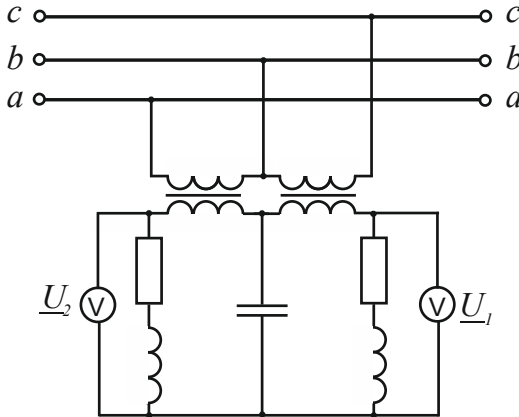


Рис. 18.14. Фільтр прямої і зворотної складової

Існують схеми, що дають можливість отримати всю пряму або обернену систему напруг або струмів. Так, у схемі на рис. 14 між точками  $a'$ ,  $b'$  і  $c'$  отримуємо симетричну систему напруг, пропорційних при  $\underline{Y}' = \underline{Y}'' e^{-j\frac{\pi}{3}}$  - прямій складовій, а при  $\underline{Y}' = \underline{Y}'' e^{j\frac{\pi}{3}}$  - оберненій складовій системи лінійних напруг. Схема рис. 18.15 є тотожною до схеми перетворення однофазної системи в симетричну трифазну систему, і це перетворення є фактично виділенням з однофазної системи або прямої, або оберненої системи, що є симетричними складовими.

Необхідно зазначити, що схеми фільтрів з трансформаторами струму мають низку недоліків, тому останнім часом розробляються схеми релейного захисту електроустановок без трансформаторів струму, застосовуючи магніточутливі елементи: геркони і котушки індуктивності. Також з'являються цифрові фільтри симетричних складових, що базуються на синхронних вимірюваннях напруг і струмів та їх миттєвій цифровій обробці.

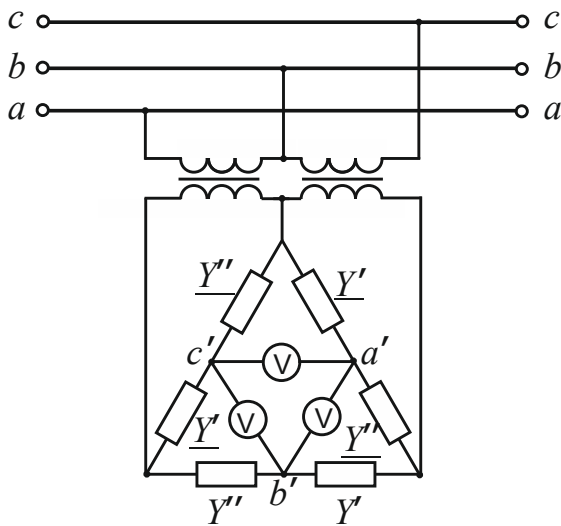


Рис. 18.15. Схема одержання прямої або оберненої системи напруг

### 18.5. НЕЗАЛЕЖНІСТЬ СИМЕТРИЧНИХ СКЛАДОВИХ В СИМЕТРИЧНІЙ ТРИФАЗНОМУ КОЛІ

Розглянемо ділянку трифазного чотирипровідного кола, що не містить обертальних машин. Нехай на цій ділянці кола повні опори усіх трьох фаз є однаковими і взаємні індуктивності будь-яких двох фаз дорівнюють одна одній точно так само, як дорівнюють взаємні індуктивності між кожною з фаз і нейтральним проводом і увімкненими у нього елементами кола.

Припустимо, що струми, які притікають у колі, утворюють несиметричну систему, симетричні складові якої дорівнюють  $I_0, I_1, I_2$ . Розглянемо дію кожної з симетричних складових.

Нехай у нашому колі притікають струми, які утворюють або пряму, або зворотну систему. І в тому, і в іншому випадку напруги на окремих фазах розглянутої ділянки кола внаслідок його повної симетрії утворюють також пряму, або, відповідно, зворотну систему, а струм у нейтральному проводі буде дорівнювати нулю. При цьому комплекси еквівалентних повних опорів кожної з фаз цього ділянки кола, які враховують і взаємну індукцію, очевидно, будуть однаковими і для прямої, і для оберненої системи. При проходженні у колі струмів нульової системи падіння напруги у всіх фазах ділянки будуть однаковими і за величиною, і за фазою, тобто утворюють також нульову систему. Проте комплекс еквівалентного повного опору для струмів нульової системи має інше значення, ніж для струмів прямої



і оберненої систем, оскільки на відміну від останніх, струми нульової системи замикаються по нейтральному проводу, тобто

$$\underline{Z}_0 \neq \underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 ,$$

якщо через  $\underline{Z}_0$ ,  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$ . позначити відповідно комплекси еквівалентних комплексних опорів для нульової, прямої та оберненої складової.

Таким чином, в симетричному колі довільна симетрична система струмів викликає падіння напруги, яка утворює симетричну систему з тим же порядком слідування фаз, і справедливими є залежності

$$\underline{U}_0 = \underline{I}_0 \underline{Z}_0 , \underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 , \underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 ,$$

де  $\underline{U}_0$ ,  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{U}_2$  - симетричні складові системи падінь напруги в симетричному трифазному колі. Ці рівності виражають *незалежність симетричних складових* в симетричних колах.

Зауважимо, що присутність в симетричному колі оберտальних машин, виконаних конструктивно симетрично, не порушує незалежності симетричних складових, але еквівалентні повні опори в цьому випадку будуть відрізнятися для всіх симетричних складових, тобто

$$\underline{Z}_0 \neq \underline{Z}_1 \neq \underline{Z}_2 ,$$

оскільки магнітне коло, пов'язане з прямою системою струмів, обертається у одному напрямі з ротором машини, а поле, пов'язане з зворотною системою струмів, обертається в протилежному напрямі.

Варто мати на увазі, що якщо провідність між нейтральними точками генератора або трансформатора і приймача дорівнює нулю, то  $\underline{Z}_0 = \infty$ , і нульової складової в системі струмів бути не може.

У несиметричному колі кожна з симетричних складових системи напруг в загальному випадку залежить від усіх симетричних складових системи струмів і, навпаки, кожна з симетричних складових системи струмів залежить від усіх симетричних складових системи напруг.

#### 18.6. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СИМЕТРИЧНИХ СКЛАДОВИХ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ СТРУМІВ КОРОТКОГО ЗАМИКАННЯ

Розглянемо питання розрахунку струмів короткого замикання симетричного трифазного генератора, нейтральна точка якого

є заземленою через деякий опір (рис. 18.16). Внаслідок симетрії генератора для симетричних складових системи його фазних ЕРС маємо:  $\underline{E}_0 = 0$ ,  $\underline{E}_1 = \underline{E}$ ,  $\underline{E}_2 = 0$ . Нехай до місця короткого замикання коло є симетричним і його комплекси еквівалентних повних опорів  $\underline{Z}_0$ ,  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$  для нульової, прямої і зворотної складових є відомими. При короткому замиканні система фазних напруг  $\underline{U}_a$ ,  $\underline{U}_b$ ,  $\underline{U}_c$  відносно землі на місці короткого замикання і система струмів  $\underline{I}_a$ ,  $\underline{I}_b$ ,  $\underline{I}_c$  будуть несиметричними і, розкладаючи їх на симетричні складові  $\underline{U}_0$ ,  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{U}_2$  і  $\underline{I}_0$ ,  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$  можна, незалежно від характеру короткого замикання, записати залежності:

$$0 = \underline{I}_0 \underline{Z}_0 + \underline{U}_0, \quad \underline{E} = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{U}_1, \quad 0 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{U}_2.$$

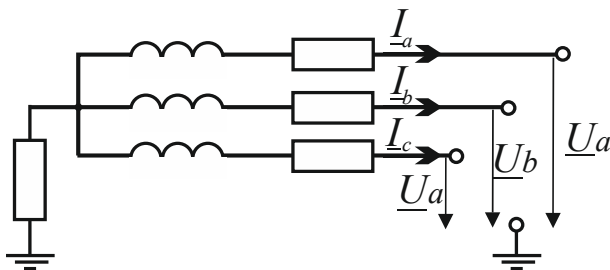


Рис. 18.16. Схема короткого замикання симетричного трифазного генератора

Ці три рівняння є базовими при розрахунку струмів короткого замикання. Якщо при заданих  $\underline{E}$ ,  $\underline{Z}_0$ ,  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$  за умовою задачі з шести величин  $\underline{I}_a$ ,  $\underline{I}_b$ ,  $\underline{I}_c$ ,  $\underline{U}_a$ ,  $\underline{U}_b$ ,  $\underline{U}_c$  є відомими три величини або три незалежних рівняння, які їх пов'язують, то можна вирахувати всі величини, які характеризують даний режим роботи генератора і приймача.

Нехай, наприклад, фаза а є замкненою на землю. Тоді, нехтуючи струмами нормального навантаження у порівнянні зі струмами короткого замикання, маємо:

$$\underline{U}_a = 0, \quad \underline{I}_b = 0, \quad \underline{I}_c = 0.$$

Оскільки  $\underline{U}_a = \underline{U}_0 + \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = 0$ , то сумуючи основні рівняння, отримаємо

$$\underline{E} = \underline{I}_0 \underline{Z}_0 + \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_2.$$

Звідси, з врахуванням, що при  $\underline{I}_b = \underline{I}_c = 0$  симетричні складові системи струмів будуть  $\underline{I}_0 = \underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \frac{\underline{I}_a}{3}$ , знайдемо

$$\underline{E} = \frac{1}{3} \underline{I}_a (\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2),$$

$$\underline{I}_a = \frac{3\underline{E}}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

Для симетричних складових системи напруг у місці короткого замикання з основних рівнянь отримаємо:

$$\underline{U}_0 = -\frac{\underline{I}_a \underline{Z}_0}{3} = -\frac{\underline{E}_0 \underline{Z}_0}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2},$$

$$\underline{U}_1 = \underline{E} - \frac{\underline{I}_a \underline{Z}_1}{3} = \frac{\underline{E}(\underline{Z}_0 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2},$$

$$\underline{U}_2 = -\frac{\underline{I}_a \underline{Z}_2}{3} = -\frac{\underline{E} \underline{Z}_2}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2},$$

після чого легко визначити  $\underline{U}_b$  і  $\underline{U}_c$ .

### 18.7. ПОТУЖНІСТЬ ТРИФАЗНОГО КОЛА В ЗАГАЛЬНОМУ ВИПАДКУ НЕСИМЕТРІЇ

Нехай системи фазних ЕРС  $\underline{E}_a$ ,  $\underline{E}_b$ ,  $\underline{E}_c$  і фазних струмів  $\underline{I}_a$ ,  $\underline{I}_b$ ,  $\underline{I}_c$  у трифазному колі є несиметричними. Для комплексної потужності цього кола  $\underline{S} = P + jQ$  маємо:

$$\underline{S} = \underline{S}_a + \underline{S}_b + \underline{S}_c = \underline{E}_a^* \underline{I}_a + \underline{E}_b^* \underline{I}_b + \underline{E}_c^* \underline{I}_c$$

і, отже для активної та реактивної потужності всього кола одержимо

$$P = E_a I_a \cos \varphi_a + E_b I_b \cos \varphi_b + E_c I_c \cos \varphi_c$$

$$Q = E_a I_a \sin \varphi_a + E_b I_b \sin \varphi_b + E_c I_c \sin \varphi_c$$

де  $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c$  - кути зсуву фазних струмів відносно відповідних фазних ЕРС.

Комплексну потужність  $\underline{S}$  можна виразити через симетричні складові системи фазних ЕРС і струмів. Взявши до уваги, що спряжені системи  $\underline{E}_a, \underline{E}_b, \underline{E}_c$  і  $\underline{E}_a^*, \underline{E}_b^*, \underline{E}_c^*$  відрізняються одна від одної порядком слідування фаз (рис. 18.17), маємо:

$$\underline{I}_a = \underline{I}_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2, \quad \underline{I}_b = \underline{I}_0 + a^2 \underline{I}_1 + a \underline{I}_2, \quad \underline{I}_c = \underline{I}_0 + a \underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2,$$

$$\underline{E}_a^* = \underline{E}_0^* + \underline{E}_1^* + \underline{E}_2^*, \quad \underline{E}_b^* = \underline{E}_0^* + a \underline{E}_1^* + a^2 \underline{E}_2^*, \quad \underline{E}_c^* = \underline{E}_0^* + a^2 \underline{E}_1^* + a \underline{E}_2^*,$$

і для комплексної потужності  $\underline{S}$ , виконавши множення, отримаємо:

$$\underline{S} = P + jQ = 3 \underline{E}_0 \underline{I}_0 + 3 \underline{E}_1 \underline{I}_1 + 3 \underline{E}_2 \underline{I}_2,$$

оскільки інші члени добутків, які утворюють шість симетричних ненульових систем, дадуть в сумі нуль.

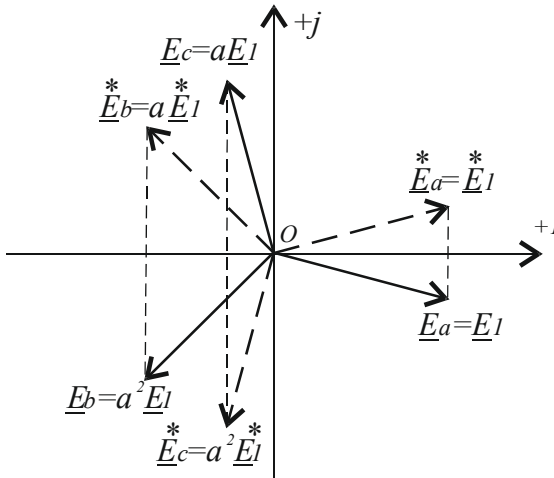


Рис. 18.17. Діаграми  $\underline{E}_a, \underline{E}_b, \underline{E}_c$  і  $\underline{E}_a^*, \underline{E}_b^*, \underline{E}_c^*$

З останнього виразу для активної і реактивної потужності кола знайдемо

$$P = 3E_0I_0 \cos \varphi_0 + 3E_1I_1 \cos \varphi_1 + 3E_2I_2 \cos \varphi_2 = P_0 + P_1 + P_2,$$
$$Q = 3E_0I_0 \sin \varphi_0 + 3E_1I_1 \sin \varphi_1 + 3E_2I_2 \sin \varphi_2 = Q_0 + Q_1 + Q_2,$$

де  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$  - різниці фаз симетричних складових системи ЕРС і відповідних складових системи струмів. Таким чином як активна, так і реактивна складова потужності трифазного кола в загальному випадку несиметрії можуть бути знайдені як суми відповідних потужностей нульової, прямої і зворотної систем ЕРС і струмів.

### 18.8. СИМЕТРИЧНІ КОМПОНЕНТИ І ГАРМОНІКИ

Внаслідок нелінійності реальних навантажень трифазних кіл, таких, як офісна техніка, енергозберігальні лампи та ін., у мережі замість напруг і струмів промислової частоти 50 Гц виникають напруги і струми вищих гармонік.

Кожен порядок гармонік здійснює свій внесок у різні компоненти послідовності. Гармоніки порядку  $3n+1$  вносять внесок у складові прямої послідовності, гармоніки порядку  $3n-1$  - зворотної послідовності. Гармоніки порядку  $3n$  мають внесок у нульову послідовність.

Негативний вплив несинусоїдальних струмів і напруг на роботу електрообладнання призводить до збільшення втрат напруги і потужності в мережі, зниження їх пропускну здатності, порушення нормальної роботи і скороченню терміну служби електрообладнання, зниженню продуктивності праці. Наприклад, відомо, що при допустимих значеннях несиметрії напруги  $\varepsilon=2\%$  и несинусоїдальності  $5\%$  термін служби асинхронних двигунів скорочується на  $21\%$ , синхронних — на  $32\%$ , трансформаторів — на  $8\%$ , конденсаторів — на  $40\%$ .

Особливої уваги заслуговують потрійні гармоніки (3, 9, 15...) – непарні гармоніки, кратні третій. У симетричних трифазних колах струм у нейтралі відсутній або обумовлений асиметрією лінійних навантажень, але у разі появи гармонік він суттєво зростає. Для третьої гармоніки максимальні значення амплітуд збігаються по фазі і їх значення складаються в нульовому дроті. Сумарний струм всіх гармонік в нейтральному дроті зростає і може перевищувати фазні значення в півтора-два рази. За стандартами, що існували раніше, чотирипровідні кабелі виготовлялися з нульовим проводом перети-

ном наполовину меншим, ніж фазні. Це несе в собі небезпеку надмірного перегріву та загоряння кабелю.

На сьогодні випускаються цифрові пристрої для аналізу і моніторингу якості електричної енергії, що містять реєстратори, аналізатори та програмований контролер. Такі пристрої вимірюють, зокрема, і симетричні складові (рис. 18.18).



Рис. 18.18. Вимірювачі показників якості електричної енергії

### КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 18

1. Для аналізу яких кіл можливе застосування методу симетричних складових?
2. Як розкласти несиметричну трифазну систему ЕРС (струму, напруги) на симетричні складові ?
3. Як характеризують несиметрію напруг у трифазній системі?
4. У чому полягає відмінність схеми заміщення зворотної та нульової послідовностей від схеми прямої послідовності ?
5. Для яких кіл опори прямої та зворотної послідовностей однакові, а для яких – різні?
6. У яких випадках складові нульової послідовності у лінійних струмах відсутні ?
7. Чим зумовлена відмінність опору нульової послідовності лінії передачі від опору прямої послідовності ?
8. Наведіть приклад схеми фільтра для виділення нульової складової системи фазних напруг і системи лінійних струмів для чотирипровідної системи.
9. Наведіть приклад схеми фільтра для виділення прямої і зворотної складових системи струмів, нульова складова якої дорівнює нулю.
10. Чи можна виділити всю пряму або обернену систему напруг

або струмів, застосовуючи одну схему фільтра ?

11. Як застосовується метод симетричних складових для розрахунку струмів короткого замикання для довільних трифазних ліній ?

12. Як підрахувати потужність несиметричної трифазної системи, використовуючи метод симетричних складових ?

13. У чому полягає проблема третьої гармоніки для електричних ліній ?

# ХІХ РОЗДІЛ

## МОДУЛЯЦІЯ

### 19.1. ВСТУП. ВИДИ МОДУЛЯЦІЇ

Канал передачі інформації за допомогою електромагнітних коливань називається радіотехнічним каналом зв'язку. Електромагнітні коливання, які несуть інформацію, можуть розповсюджуватися у вільному просторі або передаватися хвилеводами, світловодами тощо.

Відомо, що первинні перетворювачі джерел повідомлень створюють електричні сигнали зі спектром у низькочастотному діапазоні. Електромагнітні коливання таких частот не можуть ефективно передаватися антеною і розповсюджуватися на великі відстані. В теорії електромагнітного поля доведено, що при збільшенні частоти електромагнітних коливань розміри антени зменшуються, а ефективність передачі сигналу збільшується. Тому для передачі повідомлення необхідно радіочастотне коливання (несучої частоти) та його модуляція інформаційним сигналом.

Розрізняють три основних види модуляції: амплітудну, частотну і фазову.

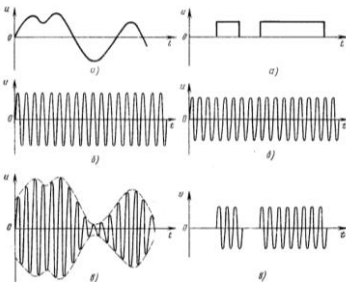


Рис. 19.1

На рис.19.1 показані модулюючий сигнал, радіочастотне коливання та амплітудно-модульоване радіочастотне коливання. Також наведено один з простих типів амплітудної модуляції – амплітудна маніпуляція (модуляція сигналом, який приймає два крайніх значення). На рис.19.2 показана частотна модуляція та фазова.

Якщо замість радіочастотного синусоїдного сигналу використовується імпульсний переносник – послідовність імпульсів прямокутної форми, то можливі такі види модуляції: амплітудно-імпульсну (АІМ), модуляцію по довжині (ширині) – широтно-імпульсну (ШІМ), фазоімпульсну (ФІМ), частотно-імпульсну (ЧІМ).



Хоча інформаційні сигнали не є синусоїдними, але вони можуть бути представлені сумою гармонік, тому властивості промодульованих сигналів розглянемо для випадку, коли модулюючий сигнал є гармонічним або періодичним.

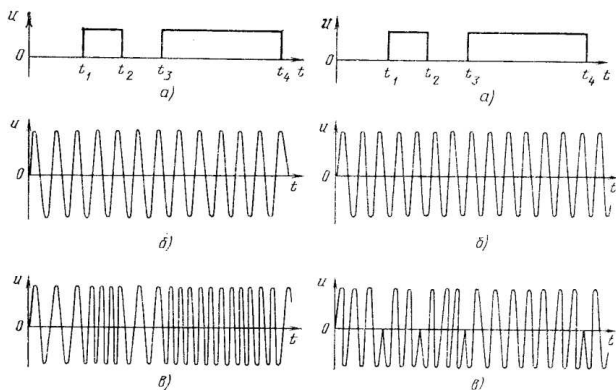


Рис.19.2

## 19.2. АМПЛІТУДНА МОДУЛЯЦІЯ

При амплітудній модуляції змінюється тільки амплітуда коливання, а фаза та частота залишаються незмінними:

$$u_{AM} = U_t \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (19.1)$$

Огинаюча (амплітуда) модульованого коливання змінюється навколо середнього значення  $U_0$  і зв'язана з моделюючим сигналом співвідношенням:

$$U_t = U_0 + k \cdot s(t) \quad (19.2)$$

де  $k$  – коефіцієнт пропорційності, такий що при будь-якому  $t$   $U(t) = 0$ .

АМ коливання можна записати в комплексній формі

$$u_{AM} = \text{Re} [\dot{U}(t) \cdot e^{j\omega_0 t}] \quad (19.3)$$

де  $\dot{U}(t) = U(t) \cdot e^{j\varphi}$  - комплексна огинаюча.

При модуляції гармонічним сигналом

$$s(t) = S \cdot \cos(\Omega t + \psi)$$

а промодульоване коливання має вид

$$U_{AM} = U_0(1 + m \cdot \cos(\Omega t + \psi) \cdot \cos(\omega_0 t + \psi)) \quad (19.4)$$

де  $U_0$  - амплітуда несучого коливання;  $m$  - коефіцієнт модуляції;  $\Omega$  - частота модулюючого коливання;  $\omega_0$  - частота несучого коливання.

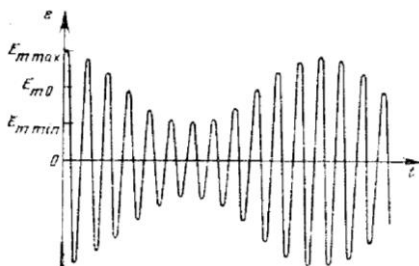


Рис.19.3. Амплітудно-модуляційне коливання

Коефіцієнт модуляції можна визначити через  $U_{m \max}$  та  $U_{m \min}$  (рис. 19.3):

$$m = \frac{U_{m \max} - U_{m \min}}{U_{m \max} + U_{m \min}} \quad (19.5)$$

Промодульоване радіочастотне коливання можна представити як суму:

$$U_{AM} = U_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \psi) + 0,5m \cdot U_0 \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi + \Psi] + 0,5m \cdot U_0 \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi - \Psi] \quad (19.6)$$

Отже, спектр радіочастотного коливання при модуляції гармонічним сигналом складається з трьох складових: несучої (не модульоване коливання), верхньою та нижньою боковими складовими. Всі коливання високочастотні, тому що  $\Omega \ll \omega$ .

*Примітка 1.* Якщо модуляція здійснюється довільним періодичним сигналом, який можна представити сумою гармонік, то промодульоване коливання

$$U_{AM} = U_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \psi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot M_n \cos[(\omega_0 + n \cdot \Omega)t + \varphi + \Psi_n] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot M_n \cos[(\omega_0 - n \cdot \Omega)t + \varphi - \Psi_n] \quad (19.7)$$

Тобто кожна спектральна складова утворює дві бокові частоти в спектрі модульованого коливання.

У випадку неперіодичного сигналу замість ряду Фур'є застосовується інтеграл Фур'є (тут не розглядається).

*Примітка 2.* Енергетичні характеристики АМ-сигналів: Потужність при відсутності модуляції:

$$P_0 = \frac{U_0^2}{2} \quad (19.8)$$

Потужність у максимальному режимі:

$$P_{max} = \frac{U_0^2(1 + m)^2}{2} \quad (19.9)$$

Потужність у мінімальному режимі:

$$P_{min} = U_0^2(1 - m)^2 / 2 \quad (19.10)$$

Середня потужність за період:

$$P_{\Omega} = \frac{A_0^2}{2} \left(1 + \frac{m^2}{2}\right) \quad (19.11)$$

Висновок: При  $m = 1$ ;  $P_{max} = 4P_0$ ;  $P_{min} = 0$ ;  $P_{cp} = 1,5P_0$ .

Тобто, у максимальному режимі передавач повинен віддавати потужність у 4 рази більше від потужності без модуляції (режим мовчання). Це є недолік. Таким чином, доцільно передавати тільки бокові складові АМ-сигналу без коливання несучої частоти.

Примітка 3. АМ-сигнал з усунутим коливанням несучої частоти називають балансовою модуляцією.

### 19.3. ФАЗОВА ТА ЧАСТОТНА МОДУЛЯЦІЯ

Нехай модулююча напруга змінюється за законом?

$$U_M = U_M \cdot \cos \Omega t \quad (19.12)$$

Використаємо його для зміни початкової фази радіочастотного коливання:

$$\varphi_n = \varphi_0 + \varphi_m \cdot \cos \Omega t \quad (19.13)$$

ФМ коливання має постійну амплітуду:

$$U_M = U_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_m \cos \Omega t + \varphi_0) \quad (19.14)$$

де повна фаза

$$\varphi_t = \omega_0 t + \varphi_m \cos \Omega t + \varphi_0 \quad (19.15)$$

При цьому миттєва частота коливання:

$$\omega(t) = \varphi'(t) = \omega_0 - \varphi_m \cdot \Omega \cdot \sin t \quad (19.16)$$

Отже, при фазовій модуляції має місце і модуляція частоти, але їх розрізняють.

ЧМ коливання є коливання, миттєва частота якого змінюється по такому ж закону, що і модулюючий сигнал.

В даному випадку

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega_m \cdot \cos \Omega t \quad (19.17)$$

Де амплітуда відхилення частоти  $\Delta\omega_m = 2\pi\Delta f_m$  пропорційна амплітуді модулюючого сигналу.

Миттєва фаза ЧМ коливання:

$$\varphi(t) = \int \omega(t) \cdot dt = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega_m}{\Omega} \sin\Omega t + \varphi_0 \quad (19.18)$$

Тоді

$$U_M = U_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega_m}{\Omega} \sin\Omega t + \varphi_0) \quad (19.19)$$

Величину  $\frac{\Delta\omega_m}{\Omega} = m$  називають індексом частотної модуляції, а величину  $\Delta\omega_m$  – девіацією частоти. Якщо  $m < 1$ , то ЧМ називають вузькополосною. Якщо  $m \gg 3 \dots 5$  для самої високої частоти модулюючого сигналу, то ЧМ називають широкополосною.

Отже, ЧМ коливання є одночасно і ФМ коливанням, тому обидва види модуляції називають кутовою модуляцією. Однак, при ЧМ зміна частоти, а ні фази, співпадає законом зміни модулюючого коливання; індекс модуляції обернено пропорційній частоті  $\Omega$ , а при ФМ він від частоти  $\Omega$  не залежить.

Примітка. Аналіз показує, що при  $m \ll 1$  спектр ЧМ коливання, як і спектр АМ коливання, містить одну пару бокових частот. При  $m \gg 1$  ширина спектра модульованого коливання дорівнює подвоєній амплітуді девіації частоти  $\Delta f = 2\Delta f_m$  ( $\Delta f_m = \frac{\Delta\omega_m}{2\pi}$ ).

На практиці при  $m$  в межах від 0 до 25 ширину спектра ЧМ коливання знаходять за формулою:

$$\Delta f = 2F(1 + m + \sqrt{m}) \quad (19.20)$$

Тут  $1 + m + \sqrt{m} = n$  – число пар бокових частот;

$$F = \frac{\Delta f_m}{m}$$

#### 19.4. МОДУЛЯЦІЯ ІМПУЛЬСНОГО ПЕРЕНОСНИКА

Поруч з використанням радіочастотних синусоїдних коливань (несучих частот) застосовують імпульсні переносники, в основному, прямокутної форми.

Ознаки: Амплітуда  $A_m$ , ширина  $\tau_i$ , частота повторення і фаза відносно тактових моментів часу.

Змінюючи відповідно з первинним сигналом амплітуду (рис.19.5), отримуємо амплітудно-імпульсну модуляцію (АІМ), змінюючи ширину (тривалість) імпульсу отримуємо широтно-імпульсну модуляцію (ШІМ), змінюючи частоту – частотно-імпульсну модуляцію (ЧІМ), змінюючи фазу – фазо-імпульсну (ФІМ).

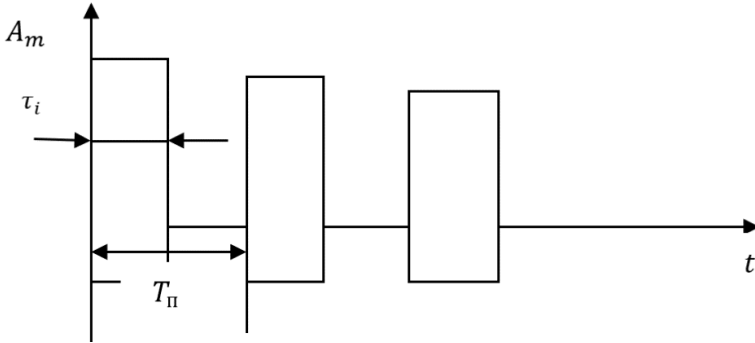


Рис.19.4

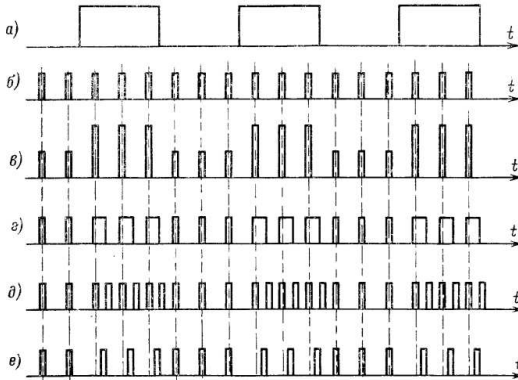


Рис.19.5. Імпульсна модуляція

Теоретичною базою перерахованих методів модуляції є теорема Котельникова – Шеннона, на підстав якої обирається частота відео імпульсів.

Тактова частота  $\omega_0 = 2\pi/T_n$  імпульсів обирають з умови  $\omega_0 > (2 \dots 5)\Omega_m$ , де  $\Omega_m = 2\pi f_m$  – максимальна частота в спектрі модулюючого сигналу. Цієї умові відповідає інтервал дискретизації

$$T_n < \frac{1}{(2 \dots 5)f_m} \quad (19.21)$$

У зв'язку з тим, що первинне повідомлення закладено у низьку частотну частину спектра, то для поновлення повідомлення на приймачій стороні після детектора можна використати ФНЧ.

Які переваги дає імпульсний переносник?

Можливість часового ущільнення (у паузах між імпульсами для одного приймача можна передавати імпульси для іншого).

Збільшення потужності в імпульсі при невеликій середній потужності за період. А це маса та габарити РЕА, які визначаються середньою потужністю.

Вища завадостійкість передавання інформації за рахунок значного підвищення енергії імпульсного сигналу над енергією шумів і завад.

### **Контрольні запитання:**

1. Що розуміти під несучим та модулюючим коливаннями?
2. Як записати АМ коливання при модуляції гармонічним коливанням?
3. Як записати АМ коливання при модуляції довільним періодичним коливанням?
4. Як визначається коефіцієнт модуляції АМ коливання?
5. Як формується спектр АМ коливання при модуляції гармонічним коливанням?
6. Як визначається максимальна та середня потужність АМ коливання?
7. Записати вираз для коливання з кутовою модуляцією.
8. Як зв'язані повна фаза і миттєва частота коливання при кутовій модуляції?
9. Який фізичний зміст має поняття «девіація частоти»?
10. По яким наближеним формулам можна визначити ширину спектра ЧМ та ФМ гармонічній модуляції?
11. Як визначається індекс модуляції при частотній і фазовій модуляції гармонічним сигналом?
12. Як здійснюється імпульсна модуляція?
13. Як обирається тактова частота імпульсів?
14. Розкрити позначення АІМ, ШІМ, ФІМ.

## **Додаток А**

### **ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ ОКРЕМИХ ТЕМ**

- A1. Кола постійного струму.
- A2. Кола синусоїдного струму.
- A3. Перехідні процеси (Класичний та операторний методи).
- A4. Кола несинусоїдного струму.

## A1. Кола постійного струму

1. Яка формула описує закон Ома для ділянки кола?

а)  $U_k = \frac{I_k}{R_k}$  ; б)  $I_k = \frac{U_k}{R_k}$  ; в)  $I_k = U_k R_k$  ; г)  $I_k = \frac{R_k}{U_k}$  .

2. На резисторі опором 10 Ом напруга становить 100 В. Вкажіть правильне значення сили струму.

а) 0,1 А; б) 1 А; в) 10 А; г) 1000 А.

3. Яка формула визначає активну потужність на резисторі?

а)  $P = I^2 U$  ; б)  $P = U^2 I$  ; в)  $P = I^2 R$  ; г)  $P = \frac{I^2}{R}$  .

4. На резисторі опором 10 Ом напруга становить 50 В. Вкажіть правильне значення потужності на резисторі.

а) 50 Вт; б) 500 Вт; в) 250 Вт; г) 2500 Вт.

5. До ЕРС  $E=20$  В з внутрішнім опором 1 Ом під'єднано навантаження опором 9 Ом. Вказати правильне значення напруги на опорі навантаження.

а) 20 В; б) 9 В; в) 1 В; г) 18 В.

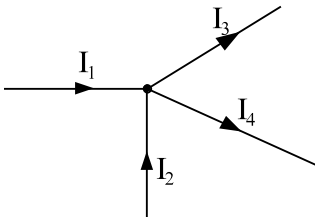
6. До ЕРС  $E=20$  В з внутрішнім опором 1 Ом під'єднано навантаження опором 9 Ом. Вказати правильне значення потужності на опорі навантаження.

а) 18 Вт; б) 40 Вт; в) 36 Вт; г) 4 Вт.

7. До джерела ЕРС  $E=20$  В з внутрішнім опором 1 Ом під'єднано навантаження опором 9 Ом. Вказати правильне значення коефіцієнту корисної дії джерела.

а) 0,1; б) 0,9; в) 0,5; г) 1,0.

8. Вказати правильний запис першого закону Кірхгофа.



а)  $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$  ;

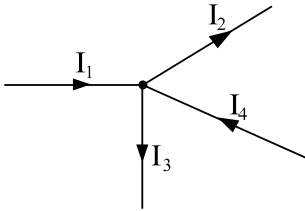
б)  $I_1 + I_2 - I_3 + I_4 = 0$  ;

в)  $I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$  ;

г)  $-I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 0$  .



9. Вказати правильний запис першого закону Кірхгофа.



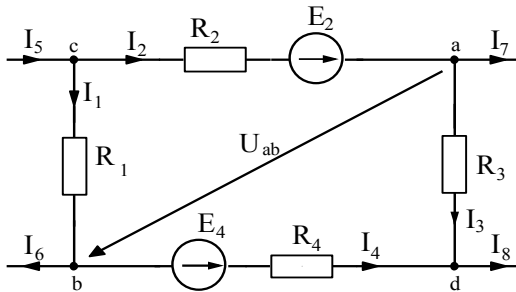
а)  $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$  ;

б)  $I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 0$  ;

в)  $I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0$  ;

г)  $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$  .

10. Вказати правильний запис другого закону Кірхгофа.



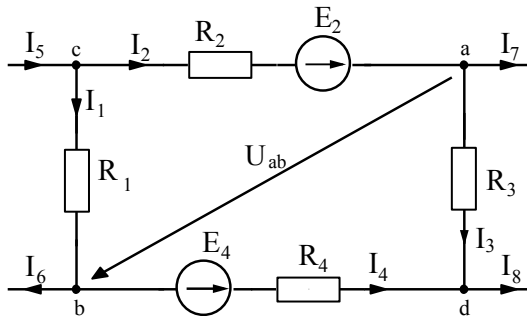
а)  $I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4 = E_2 + E_4$  ;

б)  $-I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 - I_4 R_4 = E_2 - E_4$  ;

в)  $-I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 - I_4 R_4 + E_2 - E_4 = 0$  ;

г)  $I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3 - I_4 R_4 = E_2 - E_4$  .

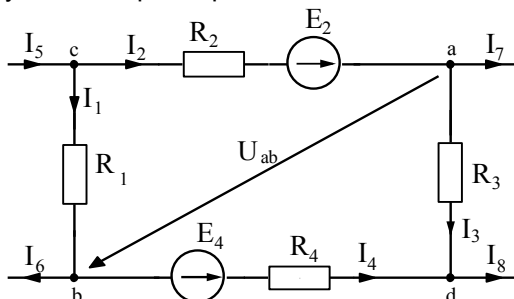
11. Вказати правильну формулу, що визначає напругу  $U_{ab}$  для схеми.



а)  $U_{ab} = I_1 R_1 - I_2 R_2 + E_2$  ;    б)  $U_{ab} = I_2 R_2 - I_1 R_1 + E_2$  ;

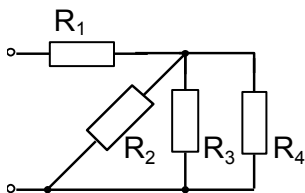
в)  $U_{ab} = I_2 R_2 - I_1 R_1 - E_2$  ;    г)  $U_{ab} = E_2 - I_1 R_1 - I_2 R_2$  .

12. Вказати правильну формулу визначення струму  $I_2$  в схемі через потенціали вузлів та параметри вітки.



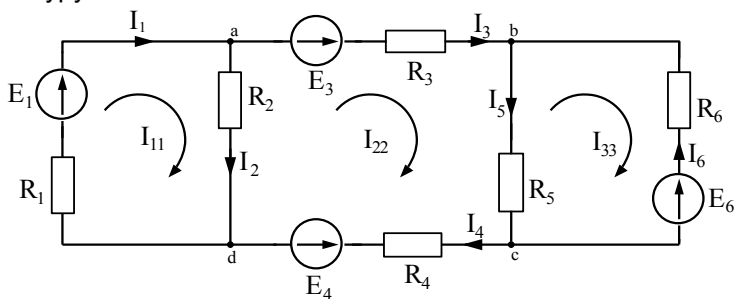
- а)  $I_2 = \frac{\varphi_c - \varphi_a + E_2}{R_2}$  ; б)  $I_2 = \frac{\varphi_c - \varphi_a - E_2}{R_2}$  ;  
 в)  $I_2 = \frac{\varphi_a - \varphi_c + E_2}{R_2}$  ; г)  $I_2 = \frac{E_2 - \varphi_a - \varphi_c}{R_2}$  .

13.  $R_1=R$ ;  $R_2=R_3=R_4=3R \rightarrow R_{\text{екв}} - ?$



- а)  $R$ ;  
 б)  $2R$ ;  
 в)  $3R$ ;  
 г)  $4R$ .

14. Вказати правильний запис другого закону Кірхгофа для другого контуру.



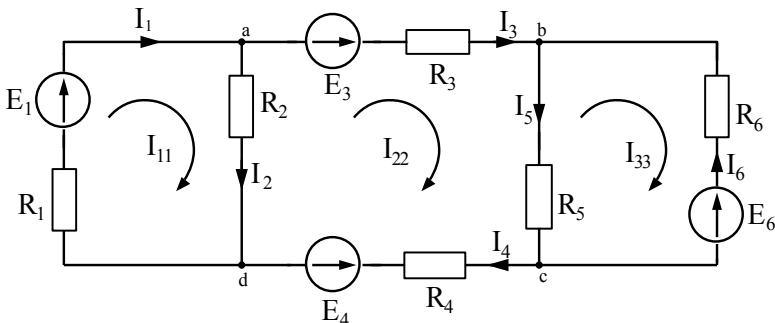
- а)  $-I_2R_2 + I_3R_3 + I_5R_5 + I_4R_4 = E_3 - E_4$  ;

б)  $I_2R_2 + I_3R_3 + I_5R_5 + I_4R_4 = E_3 + E_4$  ;

в)  $I_2R_2 + I_3R_3 + I_5R_5 + I_4R_4 + E_3 + E_4 = 0$  ;

г)  $I_2R_2 - I_3R_3 - I_5R_5 - I_4R_4 = E_3 - E_4$  .

15. Вказати правильний вираз що визначає напругу  $U_{bd}$  .



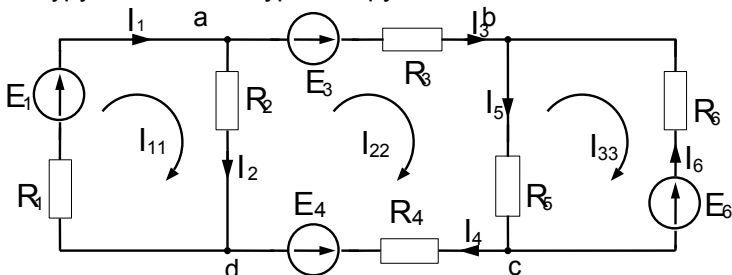
а)  $U_{bd} = -I_2R_2 + I_3R_3 - E_3$  ;

б)  $U_{bd} = I_2R_2 + I_3R_3 + E_3$  ;

в)  $U_{bd} = E_3 - I_2R_2 - I_3R_3$  ;

г)  $U_{bd} = -E_3 + I_2R_2 + I_3R_3$  .

16. Вказати правильний вираз для контурного рівняння першого контуру в методі контурних струмів.



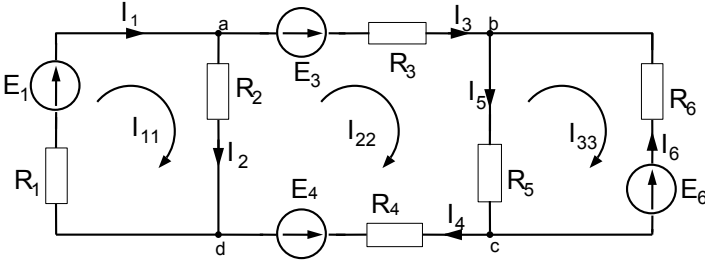
а)  $I_{11}(R_1 + R_2) - I_{22}R_2 - I_{33}R_5 = E_1$  ;

б)  $I_{11}(R_1 + R_2) - I_{22}R_2 = E_1$  ;

в)  $I_{11}R_1 - I_{22}R_2 = E_1$  ;

г)  $I_{11}R_1 - I_{22}R_2 - I_{33}R_5 = E_1$  .

17. Вказати правильний вираз для вузлового рівняння відносно потенціалу вузла «а», обравши  $\varphi_d = 0$ .



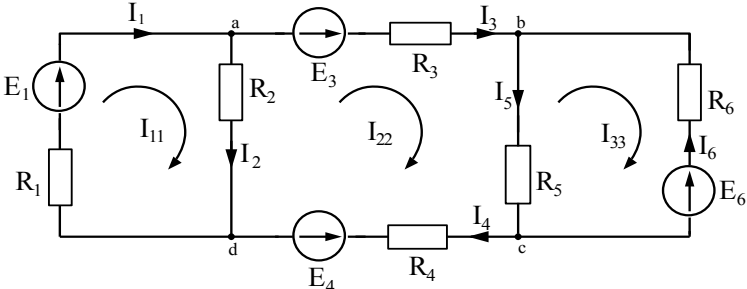
а)  $\varphi_a \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \varphi_b \frac{1}{R_3} - \varphi_c \frac{1}{R_4} = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_3}{R_3}$ ;

б)  $\varphi_a \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) + \varphi_b \frac{1}{R_3} + \varphi_c \frac{1}{R_4} = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_3}{R_3}$ ;

в)  $\varphi_a \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \varphi_b \frac{1}{R_3} = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2}$ ;

г)  $\varphi_a \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \varphi_c \frac{1}{R_4} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}$ .

18. Вказати правильний вираз для балансу потужностей.



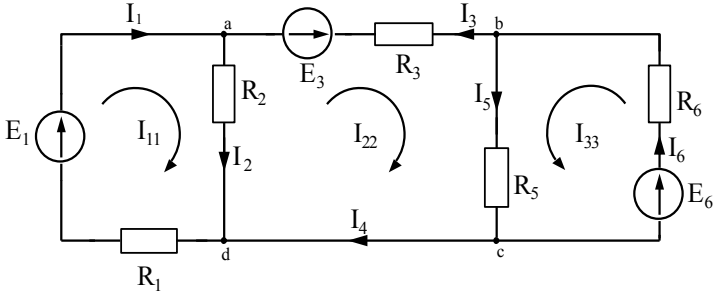
а)  $E_1 I_1 + E_3 I_3 + E_4 I_4 + E_6 I_6 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6$ ;

б)  $E_1 I_1 + E_3 I_3 + E_4 I_4 + E_6 I_6 + I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 = 0$ ;

в)  $E_1 I_1 + E_3 I_3 - E_4 I_4 + E_6 I_6 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6$ ;

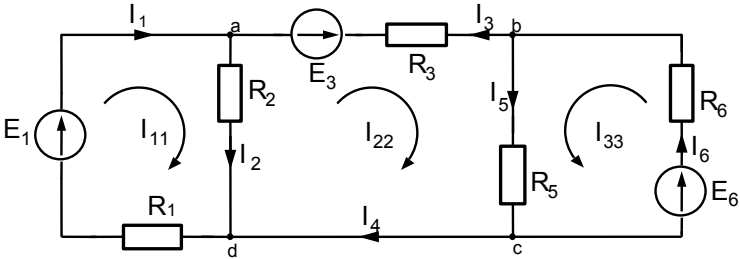
г)  $-E_1 I_1 - E_3 I_3 + E_4 I_4 + E_6 I_6 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6$ .

19. Вказати правильний вираз для контурного рівняння третього контура в методі контурних струмів.



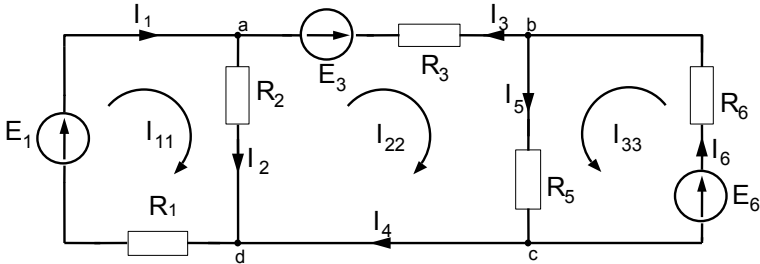
- а)  $I_{33}(R_5 + R_6) + I_{22}R_5 = E_6$ ;
- б)  $I_{33}(R_5 + R_6) - I_{22}R_5 = E_6$ ;
- в)  $I_{33}(R_5 + R_6) + I_{22}R_5 + I_{11}R_2 = E_6$ ;
- г)  $I_{33}R_6 + I_{22}R_5 = -E_6$ .

20. Вказати правильний вираз для вузлового рівняння відносно потенціалу вузла «b», обравши  $\varphi_c = 0$ .



- а)  $\varphi_b \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) + \varphi_a \frac{1}{R_3} = \frac{E_3}{R_3} + \frac{E_6}{R_6}$ ;
- б)  $\varphi_b \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) - \varphi_a \frac{1}{R_3} = \frac{E_3}{R_3} + \frac{E_6}{R_6}$ ;
- в)  $\varphi_b \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) - \varphi_a \frac{1}{R_3} = -\frac{E_3}{R_3} - \frac{E_6}{R_6}$ ;
- г)  $\varphi_b \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) - \varphi_a \frac{1}{R_3} = \frac{E_1}{R_1}$ .

21. Вказати правильний вираз для балансу потужностей.



- а)  $E_1 I_1 - E_3 I_3 + E_6 I_6 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6$  ;  
 б)  $E_1 I_1 + E_3 I_3 + E_6 I_6 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6$  ;  
 в)  $-E_1 I_1 - E_3 I_3 + E_6 I_6 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6$  ;  
 г)  $E_1 I_1 + E_3 I_3 - E_6 I_6 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6$  .

22. Скільки рівнянь треба скласти за 1-м законом Кірхгофа для кола, що має 4 вузли?

- а) 4;                      б) 3;                      в) 2;                      г) 1.

23. Скільки рівнянь треба скласти за 2-м законом Кірхгофа для кола, що має 6 контурів, три з яких елементарні?

- а) 6;                      б) 4;                      в) 3;                      г) 2.

24. Коли ЕРС в 2-му законі Кірхгофа записують зі знаком “+”?

- а) коли ЕРС співпадає зі струмом;  
 б) коли ЕРС направлена проти напрямку струму;  
 в) коли ЕРС направлена до вузла;  
 г) коли напрям ЕРС співпадає з напрямом обходу контуру.

25. Коли напруга в 2-му законі Кірхгофа записується зі знаком “+”?

- а) коли напрям напруги співпадає з напрямом ЕРС в контурі;  
 б) коли напрям напруги співпадає з напрямом обходу контуру;  
 в) коли напруга направлена до вузла;  
 г) коли напрям напруги протилежний до напрямку ЕРС.

26. Який вузол обирають за базисний при записі рівнянь для визначення потенціалів вузлів?

- а) будь-який;                      в) вузол, де сходиться найбільша кількість віток;  
 б) вузол під номером 1;                      г) вузол, де знаходиться найменша кількість віток.

27. Скільки рівнянь складають за методом вузлових потенціалів для кола, що має 4 вузли?

- а) 4;                      б) 3;                      в) 2;                      г) 1.

## A2. Кола синусоїдного струму

- Гармонічна функція має період  $T = 0,01$  с. Вкажіть правильне значення кутової частоти  $\omega$ .  
а)  $100 \text{ с}^{-1}$ ; б)  $1000 \text{ с}^{-1}$ ; в)  $628 \text{ с}^{-1}$ ; г)  $314 \text{ с}^{-1}$ .
- Визначити циклічну частоту  $f$  синусоїдної функції з періодом 1мс.  
а) 1 Гц; б) 10 Гц; в) 100 Гц; д) 1000 Гц.
- Гармонічна функція має період  $T = 0,01$  с. Вкажіть правильне значення циклічної частоти  $f$ .  
а) 10 Гц; б) 100 Гц; в) 1000 Гц; г) 314 Гц.
- Визначити кутову частоту  $\omega$  синусоїдної функції з періодом 10 мс.  
а)  $10 \text{ с}^{-1}$ ; б)  $314 \text{ с}^{-1}$ ; в)  $628 \text{ с}^{-1}$ ; г)  $1256 \text{ с}^{-1}$ .
- Вкажіть правильне значення діючого значення струму  
 $i = 14,4 \sin(314t - \pi) \text{ A}$   
а) 14,1 А; б) 10 А; в)  $10\sqrt{2}$  А; г) 7,05 А.
- Визначити діюче значення напруги, амплітуда якої становить 141 В.  
а) 141 В; б) 100 В; в)  $\sqrt{2}$  В; г)  $10\sqrt{2}$  В.
- Для миттєвих значень  $U = 100 \sin(\omega t - 30^\circ) \text{ В}$  та  $i = 10 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ А}$  вкажіть правильне значення фазового зсуву.  
а) напруга і струм співпадають по фазі;  
б) напруга випереджає струм на  $60^\circ$ ;  
в) струм випереджає напругу на  $60^\circ$ ;  
г) напруга випереджає струм на  $30^\circ$ .
- На індуктивності:  
а) струм і напруга співпадають по фазі;  
б) напруга випереджає струм на  $\pi/2$ ;  
в) струм випереджає напругу на  $\pi/2$ ;  
г) напруга випереджає струм на  $\pi/4$ .

9. До резистора опором  $R = 10 \text{ Ом}$  підведена напруга  $u = 10\sqrt{2} \sin 314t \text{ В}$ . Вкажіть правильне значення діючого значення струму.

- а)  $10\sqrt{2} \text{ А}$ ; б)  $\sqrt{2} \text{ А}$ ; в)  $1 \text{ А}$ ; г)  $10 \text{ А}$ .

10. На ємності:

а) струм і напруга співпадають по фазі; в) струм випереджає напругу

на  $\frac{\pi}{2}$ ;

б) напруга випереджає струм г) напруга випереджає струм

на  $\frac{\pi}{2}$ ;

на  $\frac{\pi}{4}$ .

11. Для індуктивності  $L = 0,1 \text{ Гн}$  вкажіть значення індуктивного опору для кутової частоти  $1000 \text{ с}^{-1}$ .

- а)  $0,1 \text{ Ом}$ ; б)  $1000 \text{ Ом}$ ; в)  $100 \text{ Ом}$ ; г)  $10 \text{ Ом}$ .

12. Визначити індуктивний опір котушки індуктивністю  $10 \text{ мГн}$  на частоті  $1000 \text{ Гц}$ .

- а)  $10 \text{ Ом}$ ; б)  $314 \text{ Ом}$ ; в)  $62,8 \text{ Ом}$ ; г)  $628 \text{ Ом}$ .

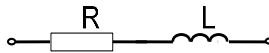
13. Для ємності  $C = 100 \text{ мкФ}$  вкажіть правильне значення ємнісного опору для кутової частоти  $1000 \text{ с}^{-1}$ .

- а)  $1000 \text{ Ом}$ ; б)  $100 \text{ Ом}$ ; в)  $10 \text{ Ом}$ ; г)  $1 \text{ Ом}$ .

14. Визначити ємнісний опір конденсатора при  $C = 31,8 \text{ мкФ}$  та  $f = 50 \text{ Гц}$ .

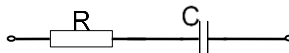
- а)  $31,8 \text{ Ом}$ ; б)  $318 \text{ Ом}$ ; в)  $100 \text{ Ом}$ ; г)  $1000 \text{ Ом}$ .

15.  $R = 3 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 4 \text{ Ом}$ . Визначити повний опір  $Z$ .



- а)  $3 \text{ Ом}$ ; б)  $4 \text{ Ом}$ ; в)  $7 \text{ Ом}$ ; г)  $5 \text{ Ом}$ .

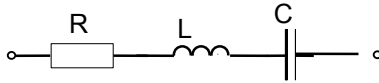
16.  $R = 4 \text{ Ом}$ ,  $X_C = 3 \text{ Ом}$ . Визначити повний опір кола.



- а)  $4 \text{ Ом}$ ; б)  $3 \text{ Ом}$ ; в)  $7 \text{ Ом}$ ; г)  $5 \text{ Ом}$ .

17.  $R = 8 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 20 \text{ Ом}$ ,  $X_C = 26 \text{ Ом}$ . Визначити повний опір  $Z$ .





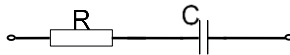
- а) 10 Ом; б) 8 Ом; в) 54 Ом; г) 16 Ом.

18.  $U_R = 8$  В,  $U_L = 6$  В. Визначити загальну напругу в колі.



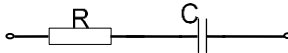
- а) 8 В; б) 6 В; в) 14 В; г) 10 В.

19.  $U = 10$  В,  $U_R = 8$  В. Визначити напругу на конденсаторі  $U_C$ .



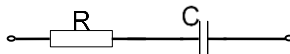
- а) 6 В; б) 2 В; в) 18 В; г) 8 В.

20.  $R = 6$  Ом,  $X_C = 8$  Ом,  $I = 2$  А. Визначити активну потужність  $P$ .



- а) 6 Вт; б) 12 Вт; в) 2,4 Вт; г) 36 Вт.

21.  $R = 6$  Ом,  $X_C = 8$  Ом,  $I = 2$  А. Визначити реактивну потужність  $Q$ .



- а) 8 Вар; б) 32 Вар; в) 16 Вар; г) 48 Вар.

22. Визначити повну потужність  $S$ .  $U = 10$  В,  $R = 3$  Ом,  $X_L = 4$  Ом.



- а) 16 ВА; б) 10 ВА; в) 40 ВА; г) 20 ВА.

23. Вказати умову резонансу послідовного коливального контуру.

- а)  $X_L = X_C$ ; б)  $X_L > X_C$ ; в)  $X_L < X_C$ ; г)  $X_L \cdot X_C = 1$ .

24. Умова резонансу напруг:

- а)  $\omega L = 0$ ; б)  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ ; в)  $\frac{1}{\omega C} = 0$ ; г)  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ .

25. Вкажіть правильне значення резонансної кутової частоти

$\omega_p$  послідовного контуру при  $L = 10^{-1}$  Гн,  $C = 10^{-5}$  Ф.

- а)  $10^3$  с $^{-1}$ ; б)  $10^4$  с $^{-1}$ ; в)  $100$  с $^{-1}$ ; г)  $10$  с $^{-1}$ .

26. Визначити частоту власних коливань контуру  $\omega_0$  при  $L = 10$  мГн,  $C = 1$  мкФ.

- а)  $10$  с $^{-1}$ ; б)  $10^2$  с $^{-1}$ ; в)  $10^3$  с $^{-1}$ ; г)  $10^4$  с $^{-1}$ .

27. Послідовний контур має параметри  $R = 1$  Ом,  $L = 10^{-1}$  Гн,  $C = 10^{-5}$  Ф. Визначити добротність контуру  $Q$ .

- а) 10; б) 100; в) 200; г) 300.

28. Послідовний коливальний контур опором  $R = 2$  Ом має при резонансі ємнісний опір  $X_C = 100$  Ом. Визначити добротність контуру.

- а) 50; б) 100; в) 2; г)  $\sqrt{2}$ .

29. У послідовного коливального контура резонансна частота

$\omega_0 = 10^4$  с $^{-1}$ , а смуга пропускання  $100$  с $^{-1}$ . Чому дорівнює добротність?

- а)  $10^4$ ; б)  $10^3$ ; в)  $10^2$ ; г) 10.

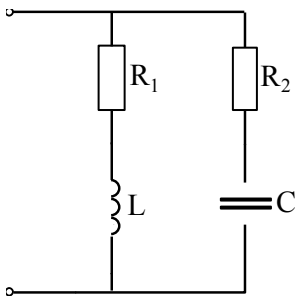
30. Вкажіть правильне значення коефіцієнту потужності  $\cos\varphi$  при резонансі.

- а) 1; б) 0; в) 0,5; г) 0,707.

31. Яке значення має реактивна потужність при резонансі.

- а) 0 Вар; б) 1 Вар; в)  $\sqrt{2}$  Вар; г)  $\sqrt{3}$  ВАр.

32. Вкажіть умову резонансу для контура?



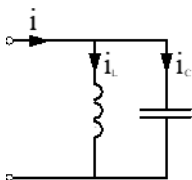
а)  $\frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} = \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2}$  ;

б)  $X_L = X_C$  ;

в)  $\frac{1}{X_L} = \frac{1}{X_C}$  ;

г)  $X_L > X_C$  .

33.  $I_L = 2$  А,  $I_C = 1$  А. Визначити загальний струм в колі.



- а) 1 А.;  
 б) 3 А.;  
 в) 2 ;  
 г) 0 А.

34. Перевести комплексне число  $4 + j3$  в показникову форму.

- а)  $4e^{j90^\circ}$ ;    б)  $3e^{j45^\circ}$ ;    в)  $5e^{j37^\circ}$ ;    г)  $5e^{j90^\circ}$

35. Перевести комплексне число  $-4 + j3$  в показникову форму.

- а)  $5 e^{j143^\circ}$     б)  $5 e^{-j37^\circ}$     в)  $5 e^{j37^\circ}$     г)  $4 e^{-j90^\circ}$

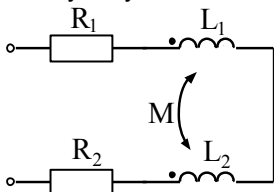
36. Записати в показниковій формі комплексне число  $j10$ .

- а) 10    б)  $10 e^{j45^\circ}$     в)  $10 e^{j90^\circ}$     г)  $10 e^{-j90^\circ}$

37. Записати в показниковій формі комплексне число  $-4 - j3$ .

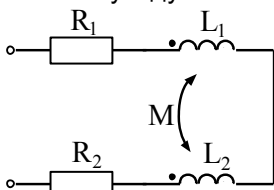
- а)  $5 e^{j37^\circ}$     б)  $5 e^{j53^\circ}$     в)  $5 e^{-j143^\circ}$     г)  $5 e^{j143^\circ}$

38.  $R_1 = R_2 = 3 \text{ Ом}$ .  $L_1 = L_2 = 1 \text{ Гн}$ .  $M = 0,5 \text{ Гн}$ . Визначити еквівалентну індуктивність  $L_{\text{екв}}$ .



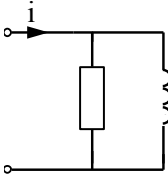
- а) 1 Гн;  
 б) 2,5 Гн;  
 в) 3 Гн;  
 г) 1,5 Гн.

39.  $R_1 = R_2 = 3 \text{ Ом}$ .  $L_1 = L_2 = 2 \text{ Гн}$ .  $M = 1 \text{ Гн}$ . Визначити еквівалентну індуктивність  $L_{\text{екв}}$ .



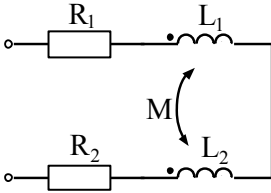
- а) 4 Гн;  
 б) 5 Гн;  
 в) 2 Гн;  
 г) 3 Гн.

40.  $I_R = 6 \text{ А}$ ;  $I_L = 8 \text{ А}$ . Знайти загальний струм  $I$ .



- а) 6 А;  
 б) 8 А;  
 в) 10 А;  
 г) 14 А.

41.  $R_1 = R_2 = 3 \text{ Ом}$ .  $X_{L1} = X_{L2} = 5 \text{ Ом}$ .  $X_M = 1 \text{ Ом}$ . Визначити загальний опір  $Z$ .

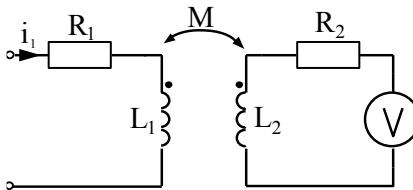


- а) 17 Ом; б) 18 Ом;  
 в) 6 Ом; г) 10 Ом.

42. Еквівалентна індуктивність системи двох послідовно з'єднаних та індуктивно – зв'язаних котушок при узгодженому включенні складає 20 мГн, а при неузгодженому 8 мГн. Визначити взаємодуктивність.

- а) 10 мГн; б) 12 мГн; в) 6 мГн; г) 3 мГн.

43.  $R_1 = R_2 = 1 \text{ Ом}$ .  $X_{L1} = 10 \text{ Ом}$ .  $X_{L2} = 5 \text{ Ом}$ .  $X_M = 6 \text{ Ом}$ .  $I_1 = 1 \text{ А}$ . Визначити напругу на вольтметрі ( $R_V = \infty$ ).

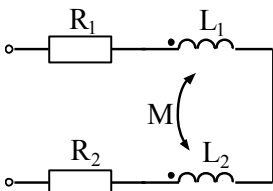


- а) 1 В; б) 10 В; в) 6 В; г) 5 В.

44. Який вираз має еквівалентна індуктивність двох індуктивно-зв'язаних котушок (при послідовному з'єднанні) для узгодженого включення?

- а)  $L_1 + L_2$ ; б)  $L_1 + L_2 + M$ ; в)  $L_1 + L_2 + 2M$ ; г)  $L_1 + L_2 + 4M$ .

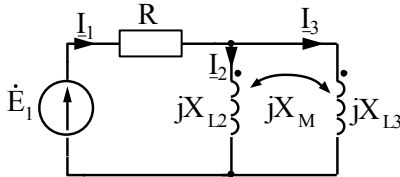
45. Як зміниться зсув фаз між струмом та напругою в системі, якщо змінити вид з'єднання на узгоджений?



- а)  $\varphi$  не зміниться;  
 б)  $\varphi$  збільшиться;  
 в)  $\varphi$  зменшиться;

г)  $\varphi$  зміниться на  $180^\circ$ .

46. Який вигляд має рівняння за другим законом Кіргофа для першого контура?



а)  $I_1 R_1 + I_2 jX_{L2} = E_1$ ;      б)  $I_1 R_1 + I_2 jX_{L2} + I_3 jX_M = E_1$ ;

в)  $I_1 R_1 - I_2 jX_{L2} - I_3 jX_M = E_1$ ;      г)  $I_1 R_1 + I_2 jX_{L2} - I_3 jX_3 = E_1$

47. Вказати формулу визначення активної потужності кола через струм та напругу джерела.

а)  $UI$ ;      б)  $UI \sin \varphi$ ;      в)  $UI \cos \varphi$ ;      г)  $U^2 I$ .

48. Вказати формулу визначення реактивної потужності кола через струм та напругу джерела.

а)  $UI$ ;      б)  $UI \sin \varphi$ ;      в)  $UI \cos \varphi$ ;      г)  $U^2 I$ .

49. Вказати формулу визначення повної потужності кола через струм та напругу джерела.

а)  $UI$ ;      б)  $UI \sin \varphi$ ;      в)  $UI \cos \varphi$ ;      г)  $U^2 I$ .

50. Вказати правильну формулу закону Джоуля-Ленца для визначення активної потужності  $P$ .

а)  $I^2 R$ ;      б)  $U^2 R$ ;      в)  $I^2 / R$ ;      г)  $UR^2$ .

51. Послідовно з'єднані індуктивність опором 10 Ом та ємність опором 5 Ом. Чому дорівнює модуль повного опору?

а) 15 Ом;      б) 10 Ом;      в) 5 Ом;      г) 50 Ом.

52. Паралельно з'єднані індуктивність опором 10 Ом та ємність опором 5 Ом. Чому дорівнює модуль повного опору?

а) 15 Ом;      б) 10 Ом;      в) 5 Ом;      г) 50 Ом.

53. В паралельно з'єднаних  $L$  та  $C$  струми по 10 А. Чому дорівнює загальний струм?

а) 20 А;      б) 10 А;      в) 0 А;      г) 5 А.

54. До послідовного коливального контуру з добротністю 100

підведена напруга 2 В. Чому дорівнює напруга на ємності при резонансі?

- а) 2 В; б) 100 В; в) 200В; г) 50В.

55. У послідовного коливального контуру частота збільшена вдвічі від резонансної. Як співвідносяться напруги на L та C?

- а)  $U_L > U_C$ ; б)  $U_L < U_C$ ; в)  $U_L = U_C$ ; г)  $U_C = 2U_L$ .

56. Відомі діючі значення  $U = 20\text{В}$ ,  $I = 2\text{А}$ . Струм відстає по фазі від напруги на кут  $30^\circ$ . Визначити активну потужність.

- а) 40 Вт; б)  $20\sqrt{3}$  Вт; в) 20 Вт; г)  $20\sqrt{2}$  Вт .

57. Відомі діючі значення  $U = 20\text{В}$ ,  $I = 2\text{А}$ . Струм відстає по фазі від напруги на кут  $30^\circ$ . Визначити реактивну потужність.

- а) 40 ВАр; б)  $20\sqrt{3}$  ВАр; в) 20 ВАр; г)  $20\sqrt{2}$  ВАр .

58. Як зміниться смуга пропускання послідовного коливального контуру, якщо ємність буде зменшена в 4 рази?

- а) зменшиться в 2 рази;  
б) збільшиться в 2 рази;  
в) зменшиться в 4 рази;  
г) не зміниться.

59. При під'єднанні в послідовному коливальному контурі до конденсатора опору навантаження  $R_n$  його добротність:

- а) збільшиться;  
б) зменшиться;  
в) не зміниться.

### А3. Перехідні процеси (класичний та операторний методи)

1. Яка рівність обов'язково виконується в процесі комутації ?

- а)  $i_L(0_+) = i_L(0_-)$ ;                      б)  $i_C(0_+) = i_C(0_-)$ ;  
 в)  $u_L(0_+) = u_L(0_-)$ ;                      г)  $i_R(0_+) = i_R(0_-)$ .

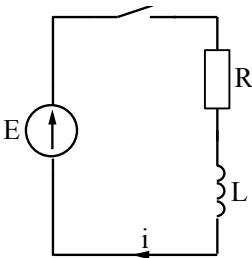
2. Яка рівність обов'язково виконується в процесі комутації ?

- а)  $i_C(0_+) = i_C(0_-)$ ;                      б)  $u_C(0_+) = u_C(0_-)$ ;  
 в)  $u_L(0_+) = u_L(0_-)$ ;                      г)  $u_R(0_+) = u_R(0_-)$ .

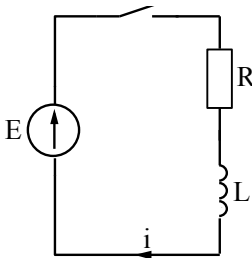
3. Яка пара величин відноситься до незалежних початкових умов ?

- а)  $i_R(0_+), u_R(0_+)$ ;                      б)  $i_R(0_+), i_C(0_+)$ ;  
 в)  $i_L(0_+), u_C(0_+)$ ;                      г)  $i_C(0_+), u_L(0_+)$ .

4. Для схеми визначити  $i(0_+)$ .

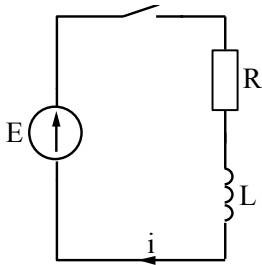


- а)  $\frac{E}{R}$ ;  
 б)  $\frac{E}{L}$ ;  
 в)  $\frac{1}{2} \frac{E}{R}$ ;  
 г) 0.



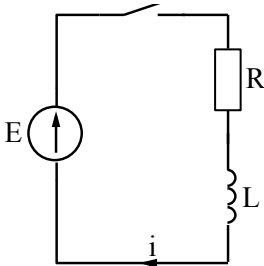
5. Для схеми визначити  $u_R(0_+)$ .  
 а) 0;    б) E;  
 в)  $\frac{1}{2} E$ ;    г)  $\frac{E}{\sqrt{2}}$ .

6. Для схеми визначити  $u_L(0_+)$ .



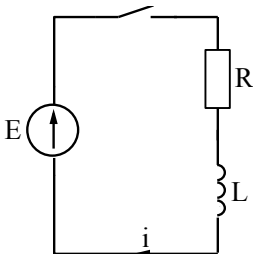
- а) 0 ;  
 б) E ;  
 в)  $\frac{1}{2} E$  ;  
 г)  $\frac{E}{\sqrt{2}}$  .

7. Для схеми визначити  $\frac{di}{dt}(0_+)$ .



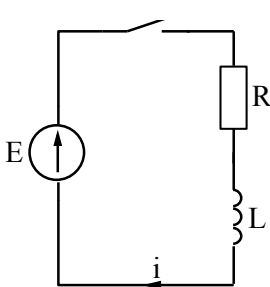
- а) 0 ;  
 б)  $\infty$  ;  
 в)  $\frac{E}{L}$  ;  
 г)  $\frac{1}{2} \frac{E}{L}$  .

8. Яка формула описує перехідний струм в схемі ?



- а)  $\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$  ; б)  $\frac{1}{2} \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$  ;  
 в)  $\frac{E}{R} - \frac{E}{2R} e^{-\frac{t}{\tau}}$  ; г)  $\frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$  .

9. Чому дорівнює постійна часу кола схеми ?



- а)  $\frac{L}{R}$  ;  
 б)  $\frac{R}{L}$  ;  
 в)  $R \cdot L$  ;  
 г)  $\frac{1}{R \cdot L}$  .

10. Як зміниться постійна часу послідовного RL кола, якщо опір



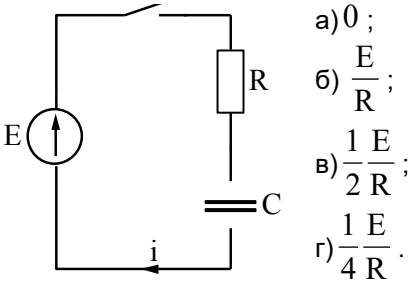
$R$  збільшити в 2 рази ?

а) Не зміниться; б) Зменшиться в 2 раз; в) Збільшиться в 2 рази; г) Зменшиться в 4 рази.

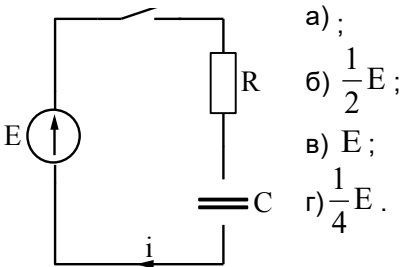
11. Як зміниться постійна часу послідовного  $RL$  кола, якщо індуктивність  $L$  збільшити в 2 рази ?

а) Не зміниться; б) Зменшиться в 2 рази;  
в) Збільшиться в 2 рази; г) Зменшиться в 4 рази.

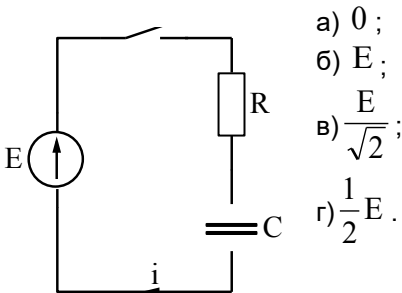
12. Для схеми визначити  $i_C(0_+)$ .

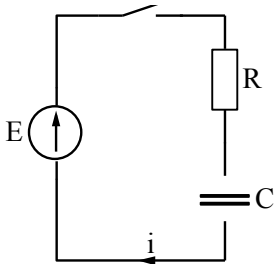


13. Для схеми визначити  $u_R(0_+)$ .



14. Для схеми визначити  $u_C(0_+)$ .

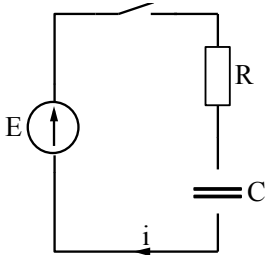




15. Для схеми визначити  $\frac{du_C}{dt}(0_+)$ .

- а)  $\frac{E}{RC}$ ; б)  $\frac{E}{R}C$ ;  
 в)  $\frac{E}{C}R$ ; г)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{E}{RC}$ .

16. Яка формула описує перехідний струм в схемі ?



- а)  $\frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$ ; б)  $\frac{E}{R} - \frac{1}{2} \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$ ;  
 в)  $\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$ ; г)  $\frac{1}{2} \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$ .

17. Чому дорівнює постійна часу послідовного RC кола ?

- а)  $\frac{R}{C}$ ; б)  $\frac{C}{R}$ ; в)  $RC$ ; г)  $\frac{RC}{\sqrt{2}}$ .

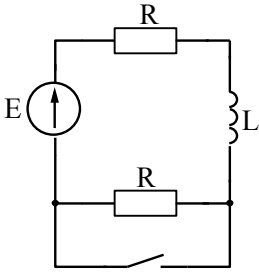
18. Як зміниться постійна часу послідовного RC кола, якщо опір  $R$  збільшити в 2 рази?

- а) не зміниться; б) зменшиться в 2 рази;  
 в) збільшиться в 2 рази; г) збільшиться на  $\sqrt{2}$ .

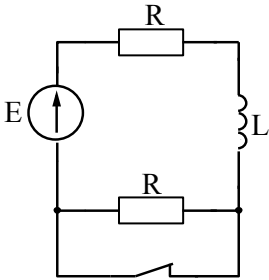
19. Як зміниться постійна часу послідовного RC кола, якщо ємність  $C$  збільшити в 2 рази ?

- а) не зміниться; в) збільшиться в 2 рази;  
 б) зменшиться в 2 рази; г) збільшиться на  $\sqrt{2}$ .

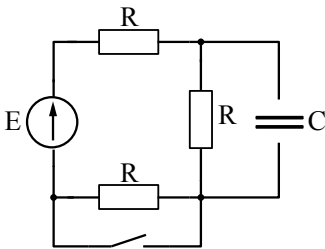
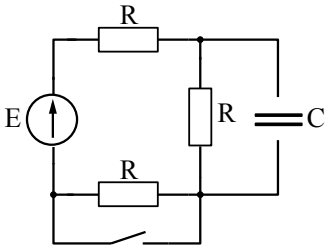
20.  $i_L(0_+) - ?$



21.  $i_L(0_+) - ?$



22.  $u_C(0_+) - ?$



24. Визначити примусову складову струму  $i_L$  після комутації.

а)  $\frac{E}{R}$ ; б)  $\frac{E}{2R}$ ;

в) 0; г)  $\frac{E}{4R}$ .

а)  $\frac{E}{R}$ ; б)  $\frac{E}{2R}$ ;

в) 0; г)  $\frac{E}{4R}$ .

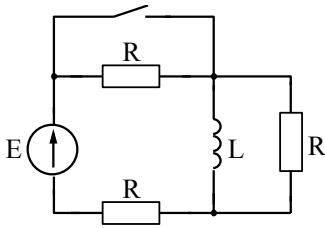
а)  $\frac{E}{3}$ ; б)  $\frac{E}{2}$ ;

в) E; г) 0.

23. Визначити корінь характеристичного рівняння для після комутаційної схеми.

а)  $-\frac{1}{RC}$ ; б)  $-\frac{2}{RC}$ ;

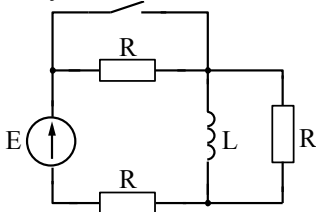
в)  $-\frac{3}{RC}$ ; г)  $-\frac{4}{RC}$ .



а) 0 ; б)  $\frac{E}{3R}$  ;

в)  $\frac{E}{3R}$  ; г)  $\frac{E}{R}$  .

25. Визначити корінь характеристичного рівняння для післякомутаційної схеми.



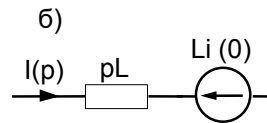
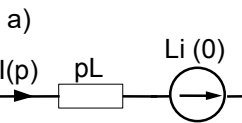
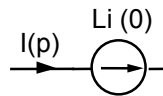
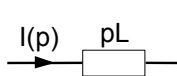
а)  $-\frac{R}{2L}$  ; б)  $-\frac{2R}{L}$  ;

в)  $-\frac{R}{4L}$  ; г)  $-\frac{3R}{2L}$  .

26. Яке операторне зображення має постійна ЕРС ?

а)  $E$  ;      б)  $\frac{E}{p}$  ;      в)  $\frac{E}{p + \alpha}$  ;      г)  $\frac{E}{p - \alpha}$  .

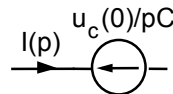
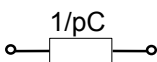
27. Індуктивність  $L$  з струмом  $i$  на операторній схемі зображається:



в)

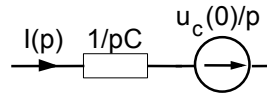
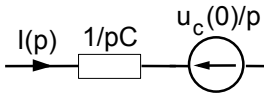
г)

28. Ємність  $C$ , що заряджена до напруги  $u_C(0)$ , на операторній схемі зображається:

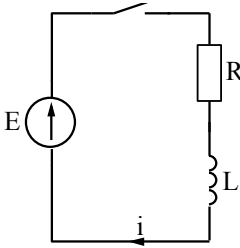


а)

б)



в)



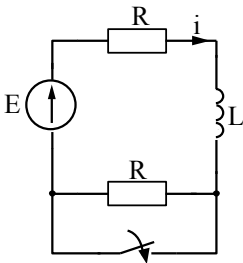
г)

29. Операторне зображення струму після комутації має вигляд:

а)  $\frac{E}{p(pL + R)}$ ; б)  $\frac{E}{pL + R}$ ;

в)  $\frac{Ep}{pL + R}$ ; г)  $\frac{E}{pL - R}$ .

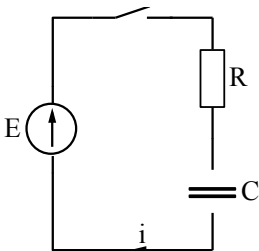
30. Операторне зображення струму після комутації має вигляд:



а)  $\frac{E}{pL + R}$ ; б)  $\frac{E + Li(0)}{pL + R}$ ;

в)  $\frac{\frac{E}{p} + Li(0)}{pL + R}$ ; г)  $\frac{E - Li(0)}{pL + R}$ .

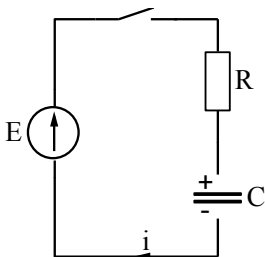
31. Операторне зображення струму після комутації має вигляд:



а)  $\frac{E}{R + \frac{1}{pC}}$ ; б)  $\frac{EC}{RCp + 1}$ ;

в)  $\frac{E + u_c(0)}{R + \frac{1}{pC}}$ ; г)  $\frac{E + u_c(0)}{R + \frac{1}{pC}}$ .

32. Операторне зображення струму після комутації в схемі з зарядженим конденсатором має вигляд:



а)  $\frac{E}{R + \frac{1}{pC}}$ ; б)  $\frac{E}{p\left(R + \frac{1}{pC}\right)}$ ;  
 в)  $\frac{E - u_c(0)}{p\left(R + \frac{1}{pC}\right)}$ ; г)  $\frac{E + u_c(0)}{p\left(R + \frac{1}{pC}\right)}$ .

33. Перехід від операторного зображення до оригіналу здійснюється за формулою:

а)  $\sum_{k=1}^n \frac{M(p_k)}{N(p_k)} e^{p_k t}$ ; б)  $\sum_{k=1}^n \frac{M(p_k)}{N'(p_k)} e^{p_k t}$ ;  
 в)  $\sum_{k=1}^n \frac{M(p_k)}{N(p_k)} e^{-p_k t}$ ; г)  $\sum_{k=1}^n \frac{M(p_k)}{N'(p_k)} e^{-p_k t}$ .

34.  $p_1, p_2, \dots, p_n$  - це корені рівняння:

а)  $M(p) = 0$ ; б)  $M'(p) = 0$ ; в)  $N(p) = 0$ ; г)  $N'(p) = 0$ .

35. Корінь  $p_1 = 0$  в операторному методі свідчить про наявність в перехідному струмі:

- а) постійної складової; б) синусоїдної складової;  
 в) експоненти.

36. В послідовному колі  $R = 2$  Ом,  $L = 100$  мГн. Яка постійна часу кола?

- а) 50 с; б) 0,02 с; в) 102 с; г) 0,05 с.

37. В послідовному колі  $R = 10$  Ом,  $C = 1000$  мкФ. Чому дорівнює постійна часу кола?

- а) 100 с; б) 0,01 с; в) 10000 с; г) 0,05 с.

38. В послідовному колі  $R = 1$  Ом,  $L = 1000$  мГн. Вкажіть приблизно тривалість перехідного процесу.

- а) 100 с; б) 1000 с; в) 0,1 с; г) 5 с.

39. У послідовному колі  $R = 10$  Ом,  $C = 104$  мкФ. Вкажіть орієнтовну тривалість перехідного процесу.

- а) 0,5 с; б) 10 с; в) 0,1 с; г)  $10^3$  с.

40. При підключенні послідовного R, C кола до постійної ЕРС

струм при  $t = 0+$  дорівнює 10 А. Чому дорівнює струм при  $t = \tau$ ?

- а) 10 А; б)  $10/e$  А; в)  $10 e$  А; г)  $10\sqrt{2}$  А.

41. При підключенні послідовного R, L кола до постійної ЕРС примусова складова струму 10 А. Чому дорівнює струм при  $t = \tau$ ?

- а) 6,3 А; б) 10 А; в)  $10/\sqrt{2}$  А; г) 5 А.

42. При підключенні послідовного R, C кола до постійної напруги  $U = 20$  В струм при  $t = 0+$  дорівнює 5 А. Чому дорівнює R, якщо  $C = 1000$  мкФ?

- а) 5 Ом; б) 4 Ом; в) 10 Ом; г) 2,5 Ом.

43. До комутації в котушці з параметрами  $R = 2$  Ом,  $L = 100$  мГн тече струм 2 А. Визначити числове значення внутрішньої ЕРС операторної схеми індуктивності після комутації.

- а) 4; б) 2; в) 100; г) 0,2.

44. Який правильний запис узагальненого закону комутації для індуктивності?

- а)  $\psi(0+) = \psi(0-)$ ; б)  $\psi(0+) > \psi(0-)$ ; в)  $q(0+) > q(0-)$ ; г)  $q(0+) = q(0-)$ .

45. Який правильний запис узагальненого закону комутації для ємності?

- а)  $\psi(0+) = \psi(0-)$ ; б)  $\psi(0+) > \psi(0-)$ ; в)  $q(0+) > q(0-)$ ; г)  $q(0+) = q(0-)$ .

## А4. Кола несинусоїдного струму

1. До резистора  $R=10$  Ом підведена несинусоїдна напруга  $u = 100 + 100\sqrt{2} \sin \omega t$  В. Записати вираз для миттєвого значення струму.

- а)  $i = 10\sqrt{2} \sin \omega t$  А;      б)  $i = 10 + 10\sqrt{2} \sin \omega t$  А;  
 в)  $i = 10\sqrt{2} \cos \omega t$  А;      г)  $i = 10 + 10\sqrt{2} \cos \omega t$  А.

2. До резистора  $R=10$  Ом підведена несинусоїдна напруга  $u = 100 + 100\sqrt{2} \sin \omega t$ . Визначити діюче значення струму.

- а) 20 А;      б) 10 А;      в)  $10\sqrt{2}$  А;      г)  $20\sqrt{2}$  А.

3. Через індуктивність  $L=0,1$  Гн тече струм  $i = 5 + 10\sqrt{2} \sin 100t$  А. Записати вираз для миттєвого значення напруги.

- а)  $0,5 + 10\sqrt{2} \sin 100t$  В;      б)  $5 + 10\sqrt{2} \cos 100t$  В;  
 в)  $50 + 100\sqrt{2} \sin 100t$  В;      г)  $100\sqrt{2} \cos 100t$  В.

4. Визначити діюче значення сили струму

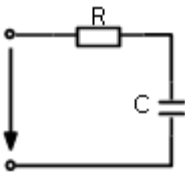
$$i = 10 + 10\sqrt{2} \sin 100t - 5\sqrt{2} \sin 200t \text{ А.}$$

- а) 15 А;      б) 25 А;      в) 20 А;      г) 10 А.

5. Напруга на ємності  $C = 10^{-3}$  Ф зміниться за законом  $u = 50 + 100\sqrt{2} \sin 100t - 50\sqrt{2} \sin 200t$  В. Визначити діюче значення струму.

- а) 10 А;      б)  $10\sqrt{2}$  А;      в) 20 А;      4. 0.

6. Задано  $u = 50 + 100\sqrt{2} \sin 10^4 t$  В;  $R = 15$  Ом;  $C = 5$  мкФ. Визначити діюче значення струму.

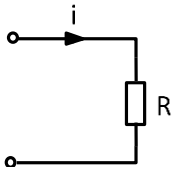


- а) 15 А; б) 20 А;  
 в) 25 А; г) 4 А.

6. Задано  $i = 5 + 10\sqrt{2} \sin \omega t + 5\sqrt{2} \sin 2\omega t$  А;  $R = 2$  Ом.



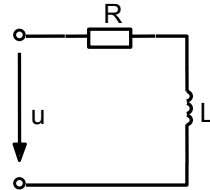
Визначити активну потужність.



- а) 300 Вт; б) 200 Вт;  
в) 150 Вт; г) 100 Вт.

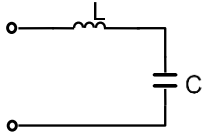
8. Задано  $u = 60 + 100\sqrt{2} \sin 1000 t$  В;  
 $R = 20$  Ом;  $L = 0,015$  Гн. Визначити активну  
потужність.

- а) 160 Вт; б) 500 Вт;  
в) 1000 Вт; г) 320 Вт.



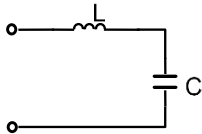
9. Задано  $u = 120\sqrt{2} \sin \omega t - 40\sqrt{2} \sin 3\omega t$  В;

$X_{L(1)} = 10$  Ом;  $X_{C(1)} = 30$  Ом. Визначити діюче значення сили  
струму.



- а) 10 А;  
б)  $\sqrt{80}$  А;  
в)  $\sqrt{40}$  А;  
г) 15 А.

10. Задано  $u = 120\sqrt{2} \sin \omega t + 60\sqrt{2} \sin 2\omega t$  В;  $X_{L(1)} = 10$  Ом;  
 $X_{C(1)} = 20$  Ом. Записати вираз для миттєвого значення другої гар-  
моніки струму.



- а)  $6\sqrt{2} \sin 2\omega t$  А;  
б)  $6 \cos 2\omega t$  А;  
в)  $12 \cos 2\omega t$  А;  
г)  $6\sqrt{2} \sin(2\omega t - \frac{\pi}{2})$  А.

11. Опір індуктивності для 1ї гармоніки становить 10 Ом. Чому дорівнює опір для 5ї гармоніки?

- а) 10 Ом; б) 50 Ом; в) 2 Ом; г) 20 Ом.

12. Опір ємності 1ї гармоніки становить 10 Ом. Чому дорівнює опір для 5ї гармоніки?

- а) 10 Ом; б) 50 Ом; в) 2 Ом; г) 20 Ом.
13. Індуктивний опір для 2ї гармоніки 10 Ом. Чому дорівнює опір для 3ї гармоніки?  
а) 10 Ом; б) 30 Ом; в) 15 Ом; г) 2 Ом.
14. Ємнісний опір для 2ї гармоніки становить 15 Ом. Чому дорівнює опір для 3ї гармоніки?  
а) 15 Ом; б) 45 Ом; в) 30 Ом; г) 10 Ом.
15. Для 1ї гармоніки індуктивний опір становить 15 Ом, а ємнісний 20 Ом. Чому дорівнює модуль повного опору послідовного з'єднання для 2ї гармоніки?  
а) 35 Ом; б) 20 Ом; в) 15 Ом; г) 5 Ом.
16. Як розуміти дискретний спектр?  
а) в розкладанні присутні гармоніки кратні основній;  
б) в розкладанні присутні всі гармоніки, починаючи з  $\omega = 0$ ;  
в) в розкладанні відсутня постійна складова.
17. На індуктивності:  
а) напруга має більш несинусоїдну форму порівняно зі струмом;  
б) струм має більш несинусоїдну форму порівняно з напругою;  
в) напруга і струм мають однакову форму.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Косенков В.Д. Теорія електричних та магнітних кіл: Навч. Посібник / В.Д. Косенков.- Хмельницький: ТУП, 2003. -199с.
2. Косенков В.Д. Практикум з теорії лінійних електричних кіл: Навч. посібник / В.Д. Косенков, Л.В. Пастернак.-2-ге вид., випр.: доп.- Хмельницький: ХНУ, 2008.-199с.
3. Косенков В.Д., А.С. Каштальян, В.Д. Бідюк.- Хмельницький: ХНУ, 2017.- 255с.
4. Дейбук В.Г. Теорія електричних кіл для системотехніків: Навч. посібник / В.Г. Дейбук.-Чернівці: Чернівецький нац..ун-т, 2011.- 320 с.
5. Гумен М.Б. Основи теорії електричних кіл у 3 кн. Кн.1. Аналіз лінійних електричних кіл. Часова область: Підручник / М.Б. Гумен, А.М. Гуржий, В.М. Співак.-К.: Вища школа, 2003.-399с.
6. Основи аналізу лінійних електричних кіл: Навч. посібник / У.П. Захаров, І.О. Милютченко.- Харків. нац. ун-т радіоелектроніки .- Харків: ХНУРЕ, 2021.-102с.
7. Тиртишніков О.І. Теорія електричних кіл. Методи аналізу лінійних ел. кіл: навч. посіб./ О.І. Тиртишніков, М.Б. Нікулін, Ю.М. Корж.- Полтава: ПОЛТАНТУ, 2011.-ч.1.-77с.

*Косенков Володимир Данилович  
Горошко Андрій Володимирович  
Капитальян Антоніна Сергіївна  
Бідюк Володимир Дмитрович*

# ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Навчальний посібник

Видання 2-ге, виправлене і доповнене

Технічне редагування, коректування і верстка: **Горошко А. В.**

Підп. до друку 06.11.2024. Формат 30×42/4.  
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.  
Друк різнографією. Ум. друк. арк. – 21,6. Обл.-вид. арк. – 10,85.  
Тираж 50. Зам. № 1511

---

Віддруковано з готового оригінал-макета ФОП Ковальський В.В.  
29000, м. Хмельницький, вул. Свободи, 53.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХЦ №21 від 12.07.2002 р.