Ткачук А. В., Гула І. В.

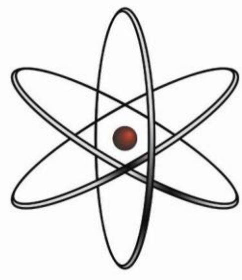
ФІЗИКА

Курс лекцій з дисципліни

Ткачук А. В., Гула І. В.

ФІЗИКА

Курс лекцій з дисципліни



Хмельницький 2021

УДК 53(075.8)
Т48

Затверджено на засіданні
кафедри фізики і електротехніки
(*протокол № 10 від 17.05.2021*)

Т48 **Ткачук А. В., Гула І. В.**
Фізика : курс лекцій з дисципліни / А. В. Ткачук, І. В. Гула. Хмельницький : ХНУ, 2021. 221 с.

Викладено основи механіки, термодинаміки, електростатики, магнетизму та теорії коливань і хвиль. Наведені закони і теоретичні факти для засвоєння матеріалу, який зручно і чітко структурований, має посилання на інтерактивні симуляції фізичних процесів і відеофрагменти, що демонструють відомі фізичні експерименти.

Для студентів інженерно-технічних спеціальностей ЗВО, може бути корисним для дистаційного та заочного навчання.

УДК 53(075.8)

ВСТУП

Фізика – наука про матерію, її структуру і рух, про фундаментальні закони, які лежать в основі будови оточуючого людину навколишнього середовища.

Фізичні закони є універсальними, точними і незмінними. Людство витратило не одне століття, намагаючись осягнути і визначити закони, що лежать в основі різноманітних природних процесів і явищ. Отриманні в результаті спостережень і кропіткої роботи знання передавались наступним поколінням, накопичувались і узагальнювались, все більш точно наближаючись до фундаментальних законів, що лежать в основі всього оточуючого світу. Нагородою за ці зусилля є розвиток сучасних технологій, які докорінним чином змінили середовище існування людини, її життя і можливості, відкрили нові обрії для розвитку і впевненого поступу в майбутнє.

Сучасний спеціаліст, який має справу з природничими науками, технікою, виробництвом, обов'язково повинен мати уявлення про фізичні закони, які використовуються в різноманітних технологічних процесах, і має керувати перебігом цих процесів та прогнозувати їх результат. Дисципліну «Фізика» відносять до числа фундаментальних наук, які складають основу теоретичної і практичної підготовки спеціалістів і які є тією базою, без якої неможлива успішна діяльність інженера в будь-якій області сучасної техніки. Надзвичайно важливе значення фізики і для формування світогляду спеціалістів.

Історично фізична наука розглядала явища природи об'єднуючи подібні явища в певні групи, які можна було пояснити відповідними законами. Так виникли розділи фізики, які будуть розглянуті в цьому курсі: механіка; молекулярна фізика і термодинаміка; електростатика; магнетизм; коливання і хвилі.

Видання призначене для студентів денної та заочної форм навчання усіх спеціальностей, які вивчають фізику.

Рівень вищої освіти – перший (бакалаврський).

Мета дисципліни: навчити студентів пояснювати природні процеси на основі вивчених законів фізики, вміло використовувати ці закони в практичній діяльності за вибраною спеціальністю.

Предмет дисципліни: властивості і характеристики найпростіших і, водночас, найзагальніших форм руху матерії.

Завдання дисципліни: надати студентам основи достатньо широкої підготовки з фізики, що дозволить їм орієнтуватись у потоці наукової та технічної інформації і забезпечить можливість використовувати фізичні закони і принципи в тих галузях, в яких вони спеціалізуватимуться; сформувати у студентів наукове технічне мислення; ознайомити з науковою літературою; сформувати вміння проведення експериментальних досліджень.

Результати навчання. Студент, який успішно завершив вивчення дисципліни, повинен: вміло використовувати понятійний апарат; аналізувати фізичні явища та процеси; будувати фізичні моделі і оцінювати основні характеристики процесів; встановлювати зв'язок між фізичними величинами; самостійно проводити експерименти, якісно і кількісно оцінювати їх результати; використовувати основні фізичні закони і встановлювати границі їх застосування у професійній діяльності, застосовувати методи статистичної обробки результатів експериментів.

Частина 1.

МЕХАНІКА

Лекція 1.
Кінематика поступального руху

- **Кінематика**
- **Поступальний рух**
- **Шлях, переміщення**
- **Швидкість**
- **Прискорення**
- **Рівномірний прямолінійний рух**
- **Рівнозмінний прямолінійний рух**

1.1. Кінематика

Курс фізики традиційно розпочинається з розгляду ***механіки.*** Це зумовлено не тільки історичним розвитком фізичної науки, але і найбільш загальним і універсальним характером механічних законів, їх використанням в інших розділах фізики.

Механіка – наука про механічний рух, механічні взаємодії і рівновагу тіл. Відповідно до цього, в механіка складається з трьох розділів: кінематики, динаміки і статики. ***Кінематика*** вивчає геометричний аспект руху незалежно від причин, які зумовили цей рух. ***Динаміка*** вивчає механічні взаємодії тіл, які спричиняють рух або призводять до зміни механічного стану тіл. ***Статика*** розглядає умови рівноваги тіл. Статика є досить важливою для всіх стаціонарних об’єктів, таких як мости, будівлі, пам’ятники. Ця наука ґрунтується на законах ***динаміки*** і має велике значення для інженерних розрахунків. У цьому курсі фізики розглядають переважно перші два розділи механіки – кінематика і динаміка.

Кінематика досліджує рух тіл без розгляду причин, що викликали цей рух. Такими причинами можуть бути силові взаємодії тіл. Такі взаємодії є предметом дослідження динаміки. Основною задачею кінематики є встановлення траєкторії руху, точніше представлення цієї траєкторії у вигляді математичних рівнянь. Це дає змогу передбачити положення тіла в просторі в будь-який момент часу [1].

Наведемо дві моделі, які використовують в фізиці, щоб описати рух тіла.

Δ – ***Матеріальною точкою*** **називають фізичне тіло, розмірами якого в певній задачі можна знехтувати і вважати, що воно рухається як одна точка.**

Δ **–** ***Абсолютно твердим тілом*** **називають тіло, в якому відстань між любими точками лишається незмінною при будь-яких зовнішніх впливах, або іншими словами,** *абсолютно тверде тіло* **ніколи не зазнає деформації.**

Перш за все, необхідно чітко розуміти, що існує два різних типи руху тіла – ***поступальний*** і ***обертальний.***

Δ – ***Поступальним рухом*** **називають переміщення абсолютно твердого тіла в просторі, під час якого будь-яка пряма, проведена через дві довільні точки тіла, переміщується паралельно сама собі.**

Під час поступального руху кожна точка тіла рухається по одній і тій же траєкторії, і кожна точка проходить однакову відстань протягом певного інтервалу часу.

Δ **–** ***Обертальний рух*** **– такий рух абсолютно твердого тіла, при якому всі його точки рухаються по колових траєкторіях навколо певної осі.**

Під час обертального руху кожна точка тіла обертається по колу навколо центру, що лежить на осі обертання. Відстань, що проходить точка навколо осі, залежить від радіуса кола обертання і буде різною для точок з різним радіусом. Але всі точки обертового тіла повернуться навколо осі обертання на однаковий кут за певний проміжок часу.

Деякі рухи фізичних тіл поєднують обидва типи, наприклад, шайба, що обертається і одночасно рухається по крижаній поверхні, або рухоме колесо автомобіля. Щоб описати довільний рух об’єкта, треба вміти описувати поступальний та обертальний рухи [1, 8].

Комбінація поступального і обертального рухів на прикладі руху колеса:

http://physics.bu.edu/~duffy/HTML5/rolling.html

1.2. Поступальний рух

Щоб описати положення матеріальної точки в просторі часто використовують ***декартову систему координат***. Положення довільної точки M відносно початку координат O визначають трьома числами x, y та z, які називають координатами.

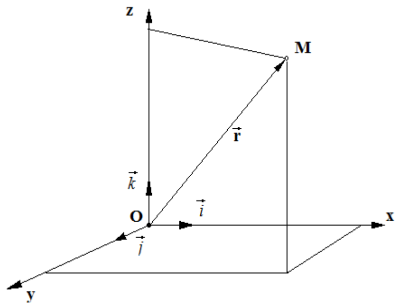


Рис. 1.1

Часто записують у вигляді $M(x,\ y,\ z)$. Можна також описати положення точки за допомогою радіус-вектора $\vec{r}$, проведеного від початку координат O до точки M (рис. 1.1). Радіус-вектор можна записати за допомогою одиничних векторів, направлених вздовж відповідних осей координат:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Δ – ***Траєкторією руху*** **матеріальної точки називають лінію, вздовж якої рухається точка**.

У цьому випадку координати точки будуть змінюватися з часом. ***Кінематичне рівняння руху*** (або рівняння траєкторії) має вигляд:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Можна записати еквівалентні векторному три скалярних рівняння:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}.$$

Якщо відома залежність координат рухомої матеріальної точки від часу, то траєкторія руху точки може рахуватись визначеною, основна задача кінематики вирішеною. В будь-який момент часу можна розрахувати положення точки в просторі[1].

1.3. Шлях, переміщення

Розглянемо рух матеріальної точки вздовж довільної траєкторії (див. рис. 1.2).

Δ **– Вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, проведений з початкового положення рухомої точки в її кінцеве положення, називають *вектором переміщення*:** $\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}(t)$.

Δ – довжина ділянки траєкторії M_1M_2, що пройшла точка за певний проміжок часу, називають ***шляхом***: $\Delta s = \Delta s(t)$.

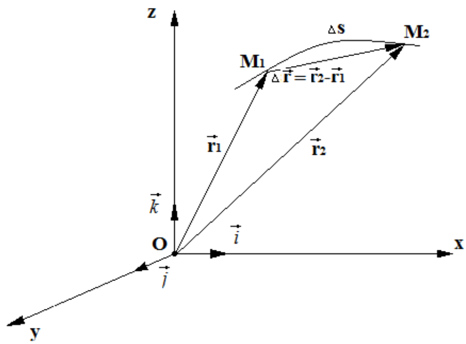


Рис. 1.2

Переміщення **–** векторна величина, вона визначається не лише модулем, але й напрямом.

Шлях – величина скалярна, визначається тільки модулем. Шлях в системі СІ вимірюється в метрах: $[\Delta s] = ì$.

Модуль ***переміщення*** дорівнює пройденому ***шляху*** тільки у випадку прямолінійного однонаправленого руху. Якщо розглянути випадок, коли проміжок часу $\Delta t \to 0$, тобто перейти до границі, то:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}(t)|}{\Delta s(t)} = 1. \tag{1.1}$$

1.4. Швидкість

Δ – ***Середньою швидкістю точки*** **в інтервалі часу від** t **до** $t + \Delta t$ **називають векторну величину, що дорівнює відношенню зміни радіус-вектора точки** $\Delta\vec{r}$ **до проміжку часу, за який ця зміна відбулась:**

$$\langle \vec{\upsilon} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} . \tag{1.2}$$

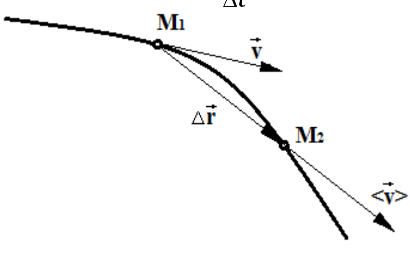


Рис. 1.3

Зміна радіус-вектора дорівнює ***переміщенню*** точки, тому середня швидкість направлена вздовж вектора переміщення (див. рис. 1.3).

Δ – *Миттєвою швидкістю* точки в момент часу t називають векторну величину, яка дорівнює границі середньої швидкості, коли $\Delta t \to 0$:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{\upsilon} \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \tag{1.3}$$

Іншими словами:

Δ – *Миттєва швидкість* дорівнює першій похідній радіус-вектора рухомої точки за часом:

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}.} \tag{1.4}$$

Вектор миттєвої швидкості завжди направлений по дотичній до траєкторії руху (див. рис. 1.3).

***Модуль миттєвої швидкості* дорівнює першій похідній шляху за часом:**

$$\upsilon = \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

(використана формула (1.1) стверджує, що якщо $\Delta t \to 0$, то $|\Delta \vec{r}| = \Delta s$).

Отже:

$$\boxed{\upsilon = \frac{ds}{dt}.} \tag{1.5}$$

Вимірюється ***миттєва швидкість*** в системі СІ: $[\upsilon] =$ ì /ñ.

Основні формули:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}; \qquad \Delta \vec{r} = \int_0^t \vec{\upsilon}\, dt; \qquad \upsilon = \frac{ds}{dt}; \qquad \Delta s = \int_0^t \upsilon\, dt.$$

1.5. Прискорення

Δ – *Середнім прискоренням* $\langle \vec{a} \rangle$ точки в інтервалі часу від t до $t + \Delta t$ називають векторну величину, що дорівнює відношенню зміни швидкості до часу, за який ця зміна відбулась:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t}.$$

Δ – ***Миттєвим прискоренням*** $\vec{a}$ **точки в інтервалі часу від** t **до** $t+\Delta t$ **називають векторну величину, що дорівнює границі середнього прискорення, коли проміжок часу** $\Delta t \to 0$:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{a} \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t}.$$

Іншими словами:

Δ – ***Миттєвим прискоренням*** **називають першу похідну миттєвої швидкості за часом, або другу похідну радіус-вектора за часом:**

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.} \tag{1.6}$$

У системі СІ прискорення вимірюється: a = ì /ñ^2.

На відміну від швидкості, напрям ***миттєвого прискорення*** відносно траєкторії може бути будь-яким (рис. 1.4). Цей напрям визначається діючою на рухоме тіло силою.

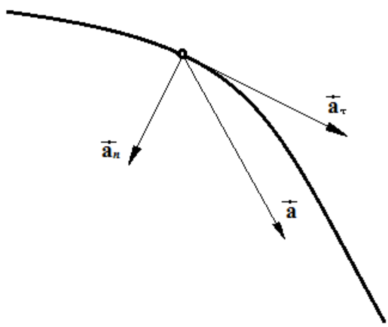


Рис. 1.4

Якщо точка рухається по довільній траєкторії, то вектор прискорення $\vec{a}$ можна розкласти на дві взаємно перпендикулярні складові – дотичну до траєкторії складову $\vec{a}_\tau$ – ***тангенціальне прискорення*** і перпендикулярну до траєкторії складову $\vec{a}_n$ – ***нормальне прискорення*** (нормаль – це одиничний перпендикулярний до траєкторії вектор):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \ \vec{a}_\tau \perp \vec{a}_n. \tag{1.7}$$

Тангенціальне прискорення $\vec{a}_\tau$ характеризує зміну швидкості за модулем. Нормальне прискорення $\vec{a}_n$ характеризує зміну швидкості за напрямом.

Для модуля ***миттєвого прискорення*** справедлива формула:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \tag{1.8}$$

Для ***тангенціального прискорення*** справедлива формула:

$$\boxed{a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d|\vec{\upsilon}|}{dt}.} \tag{1.9}$$

Нормальне прискорення можна визначити за формулою:

$$\boxed{a_n = \frac{\upsilon^2}{r},} \qquad (1.10)$$

де $\upsilon = |\vec{\upsilon}|$ – це лінійна швидкість тіла; r – ***радіус кривизни*** траєкторії в точці руху.

1.6. Рівномірний прямолінійний рух

Δ – *Рівномірним* називають рух, при якому *модуль* миттєвої швидкості не змінюється: $\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \text{const}$.

Напрям швидкості може змінюватись довільним чином.

Δ – *Рівномірним прямолінійним* називають рух, при якому *вектор* миттєвої швидкості не змінюється: $\vec{\upsilon} = \text{const}$.

Виберемо вісь X системи відліку вздовж напрямку руху. Якщо рух відбувається в одному напрямку, то шлях, який пройшло тіло, буде дорівнювати зміні координат тіла [2, 7]: $\Delta S = \Delta x = x_2 - x_1$.

Тоді

$$\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \qquad (1.11)$$

Рівняння руху має вигляд:

$$x(t) = \int_0^t \upsilon dt = \upsilon t + x_0, \qquad (1.12)$$

де x_0 – початкова координата тіла в момент часу $t = 0$.

$x = x(t)$ – координата тіла в будь-який момент часу.

***Основні формули рівномірного прямолінійного руху*:**

$$\vec{\upsilon} = \text{const}; \qquad \upsilon = \frac{dx}{dt}; \qquad x(t) = \upsilon t + x_0 .$$

1.7. Рівнозмінний прямолінійний рух

Δ – *Рівнозмінним прямолінійним* називають рух, при якому вектор миттєвого прискорення залишається незмінним: $\vec{a} = \text{const}$.

Виберемо вісь X системи відліку вздовж напрямку руху і тоді:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \text{const}, \qquad d\upsilon = adt, \qquad \upsilon = \int d\upsilon = a\int dt.$$

Для швидкості ***рівнозмінного прямолінійного руху*** отримуємо:

$$\upsilon(t) = at + \upsilon_0 \ . \tag{1.13}$$

Залежність координати тіла від часу (рівняння траєкторії руху):

$$x(t) = \int_0^t \upsilon dt = \int_0^t (at + \upsilon_0)dt = \int_0^t at \cdot dt + \int_0^t \upsilon_0 dt + x_0.$$

Отже:

$$x(t) = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{1.14}$$

***Основні формули рівнозмінного прямолінійного руху*:**

$$\vec{a} = \text{const}; \qquad \upsilon = \frac{dx}{dt} = at + \upsilon_0; \qquad x(t) = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Корисною є також формула, що пов’язує шлях, який пройшло тіло, з його початковою і кінцевою швидкістю:

$$s = x - x_0 = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2a}. \tag{1.15}$$

Рівнозмінний прямолінійний рух:
https://www.compadre.org/osp/EJSS/4000/model3/126.htm
https://javalab.org/en/uniformly_accelerated_motion_en/

Контрольні питання

1. Що таке кінематичний опис руху?
2. Кінематика поступального руху матеріальної точки. Яка різниця між шляхом та переміщенням?
3. Швидкість і прискорення. За якими формулами їх визначають?
4. Криволінійний рух. Яка різниця між тангенціальним та нормальним прискоренням?
5. Як визначити повне прискорення матеріальної точки?

Література: [**1**, с. 4–15; **4**, с. 9–12]

Лекція 2.
Кінематика обертального руху

- **Обертальний рух**
- **Кутова швидкість**
- **Кутове прискорення**
- **Векторне представлення кутових величин**
- **Рівномірний обертальний рух**
- **Рівнозмінний обертальний рух**
- **Зв'язок кутових та лінійних величин**

2.1. Обертальний рух

Розглянемо обертальний рух абсолютно твердого тіла навколо нерухомої осі. Під час такого руху кожна точка тіла рухається по колу, центр якого знаходиться на осі обертання. Шлях, який проходить точка за певний відрізок часу залежить від відстані до осі і однаковий тільки для точок з однаковим радіусом обертання. Кут обертання навпаки – однаковий для всіх точок абсолютно твердого тіла незалежно від відстані до осі. Тому, положення тіла що обертається відносно осі прийнято характеризувати кутом обертання [1, 2].

Рис. 2.1

Кут обертання $\Delta\theta$ характеризує поворот тіла відносно осі (рис. 2.1), вимірюють кут в радіанах. Наприклад, нехай тіло обертається навколо осі, що проходить через точку O перпендикулярно до площини малюнку. Під час обертання деяка точка тіла перемістилась з положення A в положення B. В результаті точка рухалась вздовж дуги кола радіуса r і пройшла шлях ΔS**.**

Δ – *Кут обертання* $\Delta\theta$ виражений в *радіанах* за визначенням дорівнює відношенню довжини дуги, яку описала точка під час обертання ΔS, до радіуса дуги *r*:

$$\boxed{\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r}\,.} \tag{2.1}$$

Оскільки довжину дуги вимірюють в тих самих одиницях, що і радіус, а саме в метрах, то радіан є величиною безрозмірною, це просто довжина пройденої точкою дуги виражена як кратна радіусу частка.

Знайдемо зв'язок радіанної міри кута і величини кута вираженої в градусах. Для цього розглянемо повний поворот точки навколо осі на 360°. Під час повного обороту точка пройде всю довжину кола, тобто $\Delta s = 2\pi r$.

Радіанна міра повного кола таким чином:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ рад.}$$

Отже, куту $\Delta\theta = 360^\circ$ відповідає радіанна міра $\Delta\theta = 2\pi$ рад:

$$360^\circ \leftrightarrow 2\pi \text{ рад.}$$

Тепер легко визначити відповідність і для інших кутів. Так, в 2 рази меншому куту 180° буде відповідати в 2 рази менша радіанна міра: $180^\circ \leftrightarrow \pi$ рад. Куту 90° буде відповідати в 4 рази менша радіанна міра $90^\circ \leftrightarrow \pi / 2$ рад і т.д.

Для ***поступального руху тіла*** вздовж осі x можемо визначити положення цього тіла в будь-який момент часу, якщо нам відома залежність координати тіла від часу $x = x(t)$. Подібно цьому, для ***обертального руху тіла*** навколо нерухомої осі ми можемо визначити положення тіла відносно осі обертання, якщо ми знаємо залежність кута обертання від часу $\theta = \theta(t)$.

Якщо тіло обертаючись навколо осі змінило своє кутове положення від θ_1 до θ_2, то кажуть що відбулось ***кутове переміщення*** $\Delta\theta$, яке визначається як $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$. Визначення кутового переміщення справедливе не тільки для абсолютно твердого тіла, що обертається, але і для кожної точки тіла, що не лежить на осі обертання. Для одновимірного поступального руху переміщення Δx вважалось додатним, якщо воно відбувалось вздовж додатного напрямку осі координат. Кутове переміщення вважають ***додатним***, якщо поворот відбувається ***проти годинникової стрілки***. Якщо ж тіло обертається ***за годинниковою стрілкою***, то кутове переміщення вважають ***від'ємним***.

2.2. Кутова швидкість

Припустимо, що в момент часу t_1 положення тіла відносно осі обертання відповідало куту θ_1, а в деякий наступний момент t_2 положення тіла відповідало куту θ_2.

Δ – ***Середньою кутовою швидкістю*** **називають відношення кутового переміщення** $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ **до величини відповідного проміжку часу** $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\langle \omega \rangle = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

У цій формулі і в подальшому, середнє значення фізичної величини позначається за допомогою трикутних дужок $\langle\ \rangle$. Звичайно, визначена подібним чином кутова швидкість буде досить наближеною характеристикою обертального руху, особливо якщо обертання швидко змінюється і проміжок часу досить великий. Для характеристики обертального руху в певний визначений момент часу розглядають границю середньої кутової швидкості за умови $\Delta t \to 0$. Цю величину називають ***миттєвою кутовою швидкістю:***

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \omega \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}.$$

Якщо ми знаємо залежність кута обертання від часу $\theta = \theta(t)$, то ми можемо знайти залежність миттєвої швидкості від часу $\omega = \omega(t)$.

Δ – ***Миттєва кутова швидкість*** **дорівнює першій похідній кута обертання за часом:**

$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}.} \tag{2.2}$$

Вимірюють кутову швидкість в ***радіанах на секунду***: $[\omega] =$ ðàä/с.

У технічних науках і в побуті часто використовують також несистемні одиниці, такі як ***обороти на хвилину*:**

$$1\ \text{îá/õâ} = \frac{2\pi}{60}\ \text{ðàä/ñ}.$$

Для поступального руху миттєва швидкість υ вважалась додатною, якщо тіло переміщувалось вздовж додатного напрямку осі координат.

Кутову швидкість вважають ***додатною***, якщо обертання відбувається ***проти годинникової стрілки.***

2.3. Кутове прискорення

Якщо абсолютно тверде тіло, що обертається навколо нерухомої осі, змінює свою кутову швидкість на величину $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ впродовж проміжку часу $\Delta t = t_2 - t_1$, то ***середнім кутовим прискоренням*** називають відношення зміни кутової швидкості до проміжку часу, за який ця зміна відбулась:

$$\langle\beta\rangle = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Миттєвим кутовим прискоренням називають границю середнього кутового прискорення, якщо проміжок часу наближається до нуля $\Delta t \to 0$:

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0}\langle\beta\rangle = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}.$$

Для ***миттєвого кутового прискорення*** справедливе наступне визначення:

Δ – ***Миттєве кутове прискорення*** **дорівнює першій похідній кутової швидкості за часом або другій похідній кута обертання за часом:**

$$\boxed{\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.} \qquad (2.3)$$

Як видно з наведених формул, миттєве кутове прискорення вимірюється у ***радіанах на секунду в квадраті***: β = ðàä / $с^2$.

2.4. Векторне представлення кутових величин

Кутова швидкість обертання характеризує швидкість зміни кутового положення тіла відносно осі обертання. Для того, щоб вона визначала також і напрям обертання тіла, домовились ставити кутовій швидкості у відповідність вектор $\vec{\omega}$. Модуль цього вектора дорівнює похідній кута обертання за часом формула (2.2), напрямлений цей вектор вздовж осі обертання і пов'язаний з напрямом обертання правилом буравчика або правої руки [3].

Δ – Якщо чотири зігнутих пальця правої руки вказують напрям обертання тіла, то витягнутий вздовж осі обертання великий палець вкаже напрям вектора кутової швидкості (рис. 2.2).

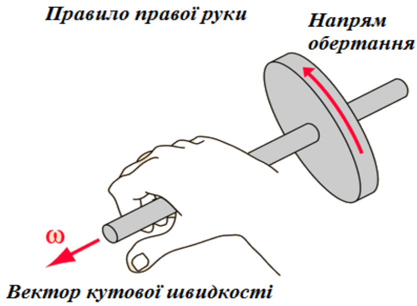


Рис. 2.2

Кутовому прискоренню також ставлять у відповідність вектор $\vec{\beta}$. Цей вектор характеризує швидкість зміни кутової швидкості:

$$\boxed{\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\,.} \qquad (2.4)$$

У випадку нерухомої осі вектор кутового прискорення також напрямлений вздовж осі обертання. Якщо тіло прискорює обертання, то напрями кутової швидкості і прискорення співпадають. Якщо тіло гальмує, то напрям векторів кутової швидкості і кутового прискорення протилежні. Слід відмітити також, що у випадку більш складних обертальних рухів кутове прискорення може бути напрямленим не вздовж осі обертання. Наприклад, обертання навколо точки, коли вісь обертання переміщується (обертання навколо миттєвої осі).

2.5. Рівномірний обертальний рух

Δ – Якщо в процесі обертання твердого тіла навколо нерухомої осі кутова швидкість не змінюється з часом $\vec{\omega} = \mathrm{const}$, то такий рух називають *рівномірним обертальним.*

Відповідно до рівняння (2.2) можемо записати: $d\theta = \omega dt$.

Щоб визначити залежність кута обертання від часу $\theta = \theta(t)$, інтегруємо рівняння:

$$\theta = \int \omega dt = \omega \int dt.$$

Тут враховано що $\omega = \mathrm{const}$ і кутову швидкість можна винести за знак інтеграла, тоді:

$$\boxed{\theta(t) = \omega t + \theta_0\ .} \tag{2.5}$$

У цій формулі θ_0 – початковий кут, що задає положення тіла в момент часу $t = 0$.

Рівняння (2.5) є ***рівнянням рівномірного обертального руху навколо нерухомої осі***. Воно визначає кутове положення тіла в будь-який момент часу.

Основними характеристиками рівномірного обертального руху є ***період обертання*** T і ***частота обертання*** f . Частоту обертання f часто називають також ***лінійною частотою.***

Δ – *Період обертання* T **дорівнює часу одного повного обертання.**

Встановимо зв'язок ***кутової швидкості*** і ***періоду обертання*** для рівномірного обертального руху. Якщо час обертання дорівнює періоду $\Delta t = T$, то тіло повернеться на один повний оборот, кут обертання зміниться на $\Delta\theta = 2\pi$. Отже, для кутової швидкості (враховуючи що вона є сталою величиною) можна записати:

$$\boxed{\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}.} \tag{2.6}$$

Δ – *Частотою обертання* f **називають число повних обертів тіла в одиницю часу (тобто за 1 с).**

За визначенням, частота обертання пов'язана з періодом формулою (2.7):

$$f = \frac{1}{T}. \tag{2.7}$$

Розмірність частоти f – обернена секунда, $f\ = 1$ ñ.

У фізиці ця величина має власну назву в честь відомого німецького вченого Генріха Герца – ***герц*** (скорочено ***Гц***): $f\ =$ Ãö.

Якщо формулу (2.7) записати у вигляді $T = 1/\ f$ і підставити в (2.6), то отримаємо зв'язок між кутовою швидкістю і частотою для рівномірного обертального руху:

$$\boxed{\omega = 2\pi f\,.} \tag{2.8}$$

2.6. Рівнозмінний обертальний рух

Δ – *Рівнозмінним обертальним* називають рух, при якому вектор кутового прискорення не змінюється з часом: $\vec{\beta} = \text{const}$.

Відповідно до формули (2.8) можна записати $d\omega = \beta \cdot dt$. Інтегруємо цей вираз і отримаємо:

$$\omega = \int \beta dt = \beta t + \omega_0.$$

Для рівнозмінного обертального руху кутова швидкість лінійно змінюється з часом:

$$\boxed{\omega = \beta t + \omega_0.} \qquad (2.9)$$

У цій формулі ω_0 – початкова кутова швидкість, що відповідає кутовій швидкості тіла в момент часу $t = 0$. В свою чергу, згідно з формулою (2.2), $d\theta = \omega dt$.

Інтегруємо цей вираз і отримаємо:

$$\theta(t) = \int \omega dt = \int (\beta t + \omega_0) dt = \int \beta t dt + \int \omega_0 dt.$$

***Залежність кута обертання від часу для рівнозмінного обертального руху*:**

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}.} \qquad (2.10)$$

Якщо виразити час з формули (2.9) і підставити в формулу (2.10), то ми отримаємо ще одне корисне рівняння справедливе для рівнозмінного обертального руху, яке пов'язує кут обертання з кутовими швидкістю і прискоренням:

$$\boxed{\theta - \theta_0 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta}.} \qquad (2.11)$$

Якщо виразити з рівняння (2.9) кутове прискорення і підставити у формулу (2.10), то отримаємо ще одне співвідношення:

$$\boxed{\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega + \omega_0) t.} \qquad (2.12)$$

Між кінематичними рівняннями поступального і обертального рухів існує певна подібність. ***Координаті*** x поступального руху відповідає ***кут обертання*** θ:

$$x \leftrightarrow \theta.$$

Миттєвій швидкості поступального руху υ відповідає ***миттєва кутова швидкість*** ω:

$$\upsilon \leftrightarrow \omega.$$

Миттєвому прискоренню a ***поступального руху*** відповідає ***миттєве прискорення*** β ***обертального руху*:**

$$a \leftrightarrow \beta\ .$$

Інші формули (для рівнозмінних рухів) для порівняння наведені в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

$\upsilon(t) = at + \upsilon_0$	$\omega(t) = \beta t + \omega_0$
$x(t) = x_0 + \upsilon_0 t + \dfrac{at^2}{2}$	$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\beta t^2}{2}$
$x - x_0 = \dfrac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2a}$	$\theta - \theta_0 = \dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta}$
$x - x_0 = \dfrac{1}{2}(\upsilon + \upsilon_0)t$	$\theta - \theta_0 = \dfrac{1}{2}(\omega + \omega_0)t$

2.7. Зв'язок кутових та лінійних величин

Щоб знайти зв'язок між лінійною υ і кутовою швидкістю ω розглянемо обертання тіла навколо нерухомої осі (рис. 2.3). Якщо абсолютно тверде тіло обертається, то кожна точка цього тіла рухається з однаковою кутовою швидкістю ω і повертається на однаковий кут за певний проміжок часу, але кожна точка рухається по колу який має свій радіус. Зрозуміло, що довжина колової траєкторії збільшується із зростанням відстані до осі. Тому лінійна швидкість руху точок υ зростає по мірі віддалення точки від осі. Нехай під час обертання деяка точка тіла пройшла шлях Δs вздовж дуги кола за час Δt. Тоді лінійна швидкість точки [2, 7]:

$$\upsilon = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

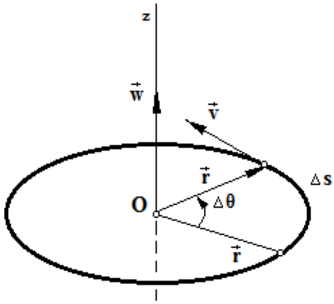


Рис. 2.3

З іншого боку, відповідно до визначення радіанної міри кута обертання формула (2.1), можемо записати для довжини дуги $\Delta s = \Delta\theta \cdot r$.

Якщо підставити це рівняння у формулу для лінійної швидкості, то отримаємо:

$$\upsilon = \frac{\Delta\theta \cdot r}{\Delta t}.$$

Якщо перейти в цій формулі до границі за умови $\Delta t \to 0$, то відповідно визначенню миттєвої кутової швидкості формула (2.2) можна записати:

$$\boxed{\upsilon = \omega \cdot r.} \tag{2.13}$$

У векторній формі цю формулу записують так:

$$\boxed{\vec{\upsilon} = [\vec{\omega} \times \vec{r}\,].} \tag{2.14}$$

Миттєва швидкість руху точки $\vec{\upsilon}$ під час обертального руху дорівнює векторному добутку миттєвої кутової швидкості $\vec{\omega}$ на радіус вектор $\vec{r}$ проведений до точки від осі обертання.

Знайдемо вираз для миттєвого прискорення точки $\vec{a}$ під час обертального руху $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$. Диференціюємо рівняння (2.14):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{\omega} \times \vec{r}\,] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right] = [\vec{\beta} \times \vec{r}\,] + [\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}]. \tag{2.15}$$

Якщо згадати вираз (1.7) для миттєвого прискорення точки $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ і порівняти цей вираз з формулою (2.15), то отримаємо для тангенціального прискорення:

$$\vec{a}_\tau = \left[\vec{\beta} \times \vec{r}\right]. \qquad (2.16)$$

Для нормального прискорення:

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}\ . \qquad (2.17)$$

Якщо рух відбувається навколо нерухомої осі, то вектори $\vec{\beta}$ і $\vec{r}$ у формулі (2.16) перпендикулярні один одному, так як і вектори $\vec{\omega}$ та $\vec{\upsilon}$ у виразі (2.17). Тому, за визначенням векторного добутку, ці формули можна переписати також у вигляді:

$$\boxed{a_\tau = \beta \cdot r\ .} \qquad (2.18)$$

$$\boxed{a_n = \omega \cdot \upsilon\ .} \qquad (2.19)$$

Якщо використати формулу (2.13), то для нормального прискорення точки під час обертального руху можна отримати ще дві відомі формули:

$$\boxed{a_n = \omega^2 r = \frac{\upsilon^2}{r}\ .} \qquad (2.20)$$

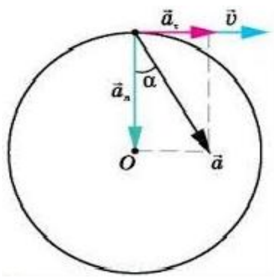


Рис. 2.4

Як напрямлені прискорення точки під час обертального руху показано на рис. 2.4. Нормальне прискорення $\vec{a}_n$ напрямлене до осі обертання, тангенціальне прискорення – по дотичній до траєкторії, як і миттєва швидкість $\vec{\upsilon}$. Напрям тангенціального прискорення і швидкості співпадає у випадку зростання швидкості. Якщо тіло гальмує і швидкість зменшується, то тангенціальне прискорення і швидкість мають протилежний напрям.

Контрольні питання

1. Як визначають кут обертання, кутова швидкість і кутове прискорення?
2. Як можна представити кутові величини у векторній формі?
3. Що таке період та частота обертання?
4. Який зв'язок існує між кутовими і лінійними величинами?

Література: [**1**, с. 9–15; **4**, с. 21–24]

Лекція 3.
Динаміка поступального руху

- **Динаміка. Поняття сили**
- **Перший закон Ньютона**
- **Другий закон Ньютона**
- **Третій закон Ньютона**
- **Закон збереження імпульсу**

3.1. Динаміка. Поняття сили

Динаміка вивчає закони руху тіл разом із причинами, що його зумовлюють. Причиною виникнення руху є взаємодія тіл. Мірою взаємодії сил в механіці є сила $\vec{F}$. Отже, динаміка вивчає як різні сили, прикладені до рухомого тіла з боку інших тіл, впливають на цей рух. Сила має не тільки величину (модуль), але і певний напрям в просторі, тому сила $\vec{F}$ є векторною величиною. Вимірюється сила в системі СІ в ***ньютонах*** $\left[\vec{F}\right] = \text{Í}$.

В основі динаміки лежать три закони Ньютона (1642–1727 рр.). Формулювання цих законів а також відкриття закону всесвітнього тяжіння зробили ім'я Ньютона легендарним в історії науки, надали потужний поштовх розвитку фізики у її сучасній формі [1, 7].

3.2. Перший закон Ньютона

Повсякденний досвід свідчить про те, що тіло буде знаходитись у спокої до того моменту, поки на нього не буде застосований зовнішній вплив з боку інших тіл. Рухоме тіло рано чи пізно виявляє тенденцію до зупинки. Щоб підтримувати рух, потрібні постійні зусилля, прикладені до тіла. Проте, формулювання першого закону Ньютона дещо інше:

Δ – ***Перший закон Ньютона:*** **будь-яке тіло зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху, поки дія з боку інших тіл не виведе його з цього стану.**

Будь-яка зміна швидкості тіла, чи то за величиною, чи то за напрямом, може відбутися тільки як результат зовнішнього впливу – прикладеної до рухомого тіла сили з боку інших тіл. Перший закон Ньютона чітко визначає зміну руху тіла – як ***наслідок***, а дію зовнішніх сил – як ***причину***. Отже, коли ми бачимо зміну руху тіла, ми повинні шукати причину цього в дії зовнішніх сил.

Якщо на тіло одночасно діє дві або більше сил, ми можемо замінити ці сили однією ***рівнодіючою силою*** $\vec{F}_p$:

Δ – ***Рівнодіюча сила* дорівнює векторній сумі прикладених до тіла сил:**

$$\vec{F}_{\eth} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \ . \tag{3.1}$$

Одна сила, що діє на рухоме тіло, величина і напрям якої збігається з величиною і напрямом ***рівнодіючої сили*** $\vec{F}_p$, приведе до такого ж впливу на рух тіла, як і ***всі інші зовнішні сили***, що одночасно діють на тіло всі разом. Цей факт виражає собою ***принцип суперпозиції сил***:

https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=mech_rovnobeznik&l=ua

Властивість тіла зберігати стан спокою або стан рівномірного прямолінійного руху за відсутності зовнішнього впливу називають ***інерцією.*** Перший закон Ньютона часто називають й ***законом інерції***.

Механічний рух є відносним. Характер руху, його траєкторія залежать від системи відліку, відносно якої розглядається цей рух. Виявляється, що закон інерції виконується не у всіх системах відліку.

Δ – ***Інерціальними* називають такі системи відліку, в яких виконується перший закон Ньютона.**

Закон інерції є тим критерієм, виконання якого дозволяє знаходити ***інерціальні*** системи відліку. Можна довести, що всі інерціальні системи відліку рухаються одна відносно одної **рівномірно** і **прямолінійно** з різними швидкостями. Якщо деяка система відліку рухається **прискорено**, або **обертається** навколо деякої осі, то така система буде ***неінерціальною***, в ній не буде виконуватись перший закон Ньютона.

Інерціальні системи відліку мають велике значення у фізиці. Перший постулат теорії відносності Ейнштейна стверджує, **що в інерціальних системах відліку всі закони фізики мають однаковий вигляд: ніякі досліди (механічні, електричні, оптичні і т.п.), які проведені всередині даної інерціальної системи відліку, не дають можливості виявити, чи знаходиться ця система в стані спокою, чи рухається прямолінійно і рівномірно.** Тобто всі закони природи **інваріантні** (незмінні) відносно переходу від однієї інерціальної системи до іншої. Наприклад, системи відліку пов'язані із поверхнею Землі є інерціальними лише приблизно, якщо на рух тіл в цих системах не впливає астрономічний рух Землі (її обертання навколо осі, Сонця тощо). Є цілий ряд фізичних явищ, що дозволяють виявити неінерціальність систем відліку, що пов’язані з поверхнею Землі, наприклад дослід Фуко:

https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=gp_foucalt&l=ua

3.3. Другий закон Ньютона

Другий закон Ньютона визначає кількісний зв’язок між «причиною» і «наслідком» в результаті дії сили на рухоме тіло. «Причиною» зміни руху є зовнішні сили що діють на тіло. «Наслідком» є перш за все зміна швидкості тіла за величиною чи напрямом. Якщо відбувається зміна швидкості, то відповідно до формули (1.6) це означає, що тіло рухається з певним прискоренням. Отже, **перше формулювання *другого закону Ньютона*:**

Δ – ***Прискорення, яке набуває тіло, збігається за напрямком з рівнодіючою силою, прямо пропорційне її величині і обернено пропорційне масі тіла:***

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}_p}{m}\,.} \tag{3.2}$$

Часто цей зв’язок записують у вигляді:

$$\vec{F}_{\partial} = m \cdot \vec{a}\,. \tag{3.3}$$

що звичайно також вірно. Але формула (3.2) правильно дає зв’язок між «причиною» і «наслідком». «Причина» – це рівнодіюча зовнішніх сил. Рухоме тіло не визначає ці сили, воно відчуває вплив цих сил і видає результат або «наслідок» – певне прискорення. Тому, правильно ставити результат в формулі ліворуч, а причину – праворуч.

Δ – ***Векторну величину, що дорівнює добутку маси тіла на його швидкість і має напрям останньої, називають*** **імпульсом (кількістю руху) цього тіла:**

$$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon}\,.} \tag{3.4}$$

Можна переписати формулу (3.3) використовуючи визначення ***імпульсу тіла***:

$$\vec{F}_{\partial} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{\upsilon})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}\,.$$

Отримали формулу, що визначає ще одне **формулювання *другого закону Ньютона:***

Δ – ***Швидкість зміни імпульсу тіла дорівнює рівнодіючій прикладених до тіла сил*:**

$$\boxed{\vec{F}_{ð} = \frac{d\vec{p}}{dt}\,.} \tag{3.5}$$

Як випливає із формули (3.3), розмірність сили в системі СІ – ***ньютон***, наступним чином визначається через основні одиниці СІ – масу, довжину і час:

$$F = \text{Í} = \frac{\text{êã}\cdot\text{ì}}{\text{ñ}^2}.$$

3.4. Третій закон Ньютона

Δ – ***Сили взаємодії двох тіл завжди рівні за модулем і мають протилежний напрям.***

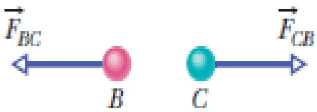


Рис. 3.1

Сила $\vec{F}_{BC}$ з якою на тіло B діє тіло C має таку ж величину, як і сила $\vec{F}_{CB}$, з якою на тіло C діє тіло B, і ці сили мають протилежний напрям (рис. 3.1).

Можна записати у векторній формі:

$$\boxed{\vec{F}_{BC} = -\vec{F}_{CB},} \tag{3.6}$$

або у скалярній формі:

$$F_{BC} = F_{CB} \text{ (рівні величини або модулі).} \tag{3.7}$$

Можна записати, що оскільки $\vec{F}_{BC}$ це сила, що діє на тіло B, то величина цієї сили може бути визначена за другим законом Ньютона через масу і прискорення тіла B:

$$F_{BC} = m_B \cdot a_B.$$

Аналогічно, для модуля сили $\vec{F}_{CB}$:

$$F_{CB} = m_C \cdot a_C\,.$$

Якщо підставити ці рівняння у формулу (3.7), то отримаємо $m_B \cdot a_B = m_C \cdot a_C$, або:

$$\frac{a_B}{a_C} = \frac{m_C}{m_B}\,. \tag{3.8}$$

Прискорення, що отримують тіла під час взаємодії обернено пропорційні масам тіл (чим більша маса – тим менше прискорення). Отже, ***маса є мірою інертності тіл.***

Маса є характеристикою тіла, яка залежить тільки від кількості і виду речовини, що утворює це тіло. Маса є скалярною величиною, в системі СІ вимірюється в кілограмах, $m = \text{êã}$.

Не слід плутати ***масу*** і ***вагу*** тіла.

Δ – ***Вага тіла*** **– це сила, з якою нерухоме тіло діє на опору або підвіс.**

Вагу тіла $\vec{P}$ (не плутати з імпульсом) визначають за формулою (3.9):

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}_{Ç}. \tag{3.9}$$

Вага є силою і вимірюється в ***ньютонах.*** Як видно з виразу (3.9), вага залежить не тільки від маси тіла, але й від прискорення вільного падіння. Так, на Землі недалеко від поверхні, прискорення вільного падіння $g_{Ç} \approx 9{,}8\ \text{ì}/\text{ñ}^2$. Масу тіла і його вагу часто плутають через те, що для визначення маси тіл часто використовують прилади, які насправді вимірюють вагу, але проградуйовані одразу в одиницях маси. Наприклад, астронавт на Землі, під час подорожі на Місяць (в невагомості) і на Місяці буде мати однакову масу. Вага астронавта на Місяці буде приблизно в 6 разів меншою, ніж на Землі, бо прискорення вільного падіння на Місяці $g_{Ì} \approx 1{,}62\ \text{ì}/\text{ñ}^2$ (прискорення вільного падіння залежить від маси небесного тіла, на якому воно вимірюється). В умовах невагомості вага взагалі буде нульовою [1, 4].

3.5. Закон збереження імпульсу

Δ – **Механічною системою** ***називають сукупність матеріальних тіл, які розглядаються як єдине ціле.***

Δ – ***Сили взаємодії між матеріальними тілами механічної системи називають*** **внутрішніми;** ***сили, з якими на тіла системи діють зовнішні тіла*** **– зовнішніми.**

Нехай механічна система складається з N тіл. Для i-го тіла механічної системи можна написати другий закон Ньютона у вигляді:

$$\vec{f}_i + \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt}.$$

У цьому рівнянні $\vec{f}_i$ – рівнодіюча всіх ***внутрішніх сил***, що діють на тіло; $\vec{F}_i$ – рівнодіюча всіх ***зовнішніх сил***, що діють на i-те тіло; $\vec{p}_i$ – імпульс цього тіла.

Напишемо подібні рівняння для всіх N тіл і складемо їх:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt}.$$

У цьому рівнянні $\sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i = 0$ в силу третього закону Ньютона, бо всі внутрішні сили системи входять в рівняння попарно, а сума дії і протидії буде нульовою. $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}_ð$ – сума всіх зовнішніх сил дасть рівнодіючу силу, з якою зовнішні тілі діють на механічну систему. $\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \vec{P}$ – ***кількість руху системи тіл.***

Отримуємо ***другий закон Ньютона для системи механічних тіл*:**

$$\boxed{\vec{F}_ð = \frac{d\vec{P}}{dt}.} \tag{3.10}$$

Δ – ***Рівнодіюча зовнішніх сил, прикладених до механічної системи тіл, дорівнює швидкості зміни імпульсу системи тіл.***

Δ – ***Механічну систему, на яку не діють зовнішні сили, або рівнодіюча цих сил дорівнює нулю, називають* замкненою:**

$$\vec{F}_ð = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0. \tag{3.11}$$

У цьому випадку, другий закон Ньютона для механічної системи можна записати у вигляді:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0. \tag{3.12}$$

Це рівняння означає, що імпульс механічної системи є сталою величиною (не міняється з часом):

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \vec{P} = \text{const.}} \tag{3.13}$$

***Закон збереження імпульсу*:**

Δ – ***Імпульс замкненої системи тіл залишається незмінним в часі.***

Прикладами збереження імпульсу є реактивний рух, віддача під час пострілу, рух більярдних куль під час зіткнення тощо.

Закон збереження імпульсу **(*або збереження кількості руху*)** є фундаментальним законом природи, який виконується як для об'єктів масштабу атомів, так і для масштабів зоряних систем.

Контрольні питання

1. Як формулюються закони Ньютона в динаміці поступального руху?
2. Як визначають інерціальні системи відліку?
3. Що таке інертність, сила, маса, імпульс?
4. Як формулюється закон збереження імпульсу?

Література: [1, с. 16–19]

Лекція 4.
Динаміка обертального руху матеріальної точки та абсолютно твердого тіла

- **Динаміка обертального руху**
- **Момент сили**
- **Основний закон динаміки обертального руху**
- **Теорема Штейнера**
- **Закон збереження моменту імпульсу**

4.1. Динаміка обертального руху

Розглянемо обертальний рух абсолютно твердого тіла навколо нерухомої осі. В кінематиці обертального руху було встановлено, що обертальний рух визначається залежністю кута обертання від часу $\theta = \theta(t)$. Були визначені також такі характеристики обертального руху, як кутова швидкість $\vec{\omega}$ і кутове прискорення $\vec{\beta}$.

Щоб описати ***динаміку обертального руху***, потрібно визначити додаткові фізичні величини. Так, в динаміці обертального руху ***силі*** відповідає ***момент сили***, ***масі*** – ***момент інерції***, а ***імпульсу*** – ***момент імпульсу***. Розглянемо ці величини більш докладно.

4.2. Момент сили

З повсякденного досвіду нам відомо, що для того, щоб привести тіло в обертальний рух навколо осі потрібно прикласти деякі зусилля.

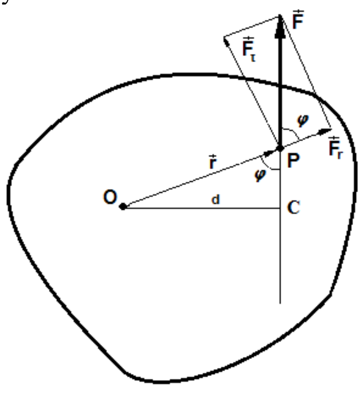


Рис. 4.1

Наприклад, щоб розкрутити колесо навколо осі або просто відчинити двері в кімнату. Але якщо докладніше проаналізувати процес розкручування тіла навколо осі, то виявиться, що витрачені зусилля залежать не тільки від величини прикладеної до тіла сили, але і від місця прикладання цієї сили, точніше від відстані точки прикладання сили до осі обертання. Наприклад, дверні ручки розміщують як можна далі від петель (через які проходить ось обертання дверей).

Щоб врахувати обидва фактори – величину сили і відстань точки прикладання сили до осі обертання, в динаміці обертального руху вводять поняття ***моменту сили*** $\vec{M}$. Ця величина характеризує «обертальну здатність» прикладеної до тіла сили.

На рис. 4.1 зображено перпендикулярний осі обертання переріз тіла, що обертається. Вісь обертання проходить через точку O перпендикулярно до площини рисунка. «Розкручує» тіло прикладена до нього в точці P сила $\vec{F}$. Положення точки прикладання сили визначається радіус-вектором $\vec{r}$, сила прикладена під кутом φ до радіус-вектора. Щоб визначити яким чином сила $\vec{F}$ призводить до обертання тіла навколо осі, розкладемо вектор сили на дві перпендикулярні компоненти:

$$\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_\tau,$$

де $\vec{F}_r$ – ***радіальна компонента***, напрямлена вздовж радіус-вектора $\vec{r}$; $\vec{F}_\tau$ – ***тангенціальна компонента,*** напрямлена перпендикулярно до радіус-вектора $\vec{r}$, по дотичній до траєкторії обертального руху точки P.

Радіальна компонента сили $\vec{F}_r$ не призводить до обертального руху, напрям сили проходить через вісь обертання тіла. Якщо вісь нерухома, то за третім законом Ньютона виникне реакція опори осі, яка компенсує дію радіальної складової. Наприклад, якщо прикласти силу до дверей вздовж дверного полотна, то це не призведе до обертального руху. Така сила компенсується реакцією петель. Інша справа, якщо прикласти силу перпендикулярно – це і буде тангенціальна компонента сили $\vec{F}_\tau$. Саме ця складова сили приводить до обертального руху навколо осі.

Δ – *Момент сили* відносно осі обертання, що проходить через точку *O,* дорівнює добутку радіус-вектора на перпендикулярну до радіус-вектора складову прикладеної сили:

$$\boxed{M = r \cdot F_\tau.} \tag{4.1}$$

Як видно з рис. 4.1, $F_\tau = F \cdot \sin\varphi,$ тому, для ***моменту сили*** справедлива також формула:

$$M = r \cdot F \cdot \sin\varphi.$$

Якщо розглядати прямокутний трикутник OCP (рис. 4.1), то побачимо, що $r \cdot \sin\varphi = d$.

Величину d називають ***плечем сили.***

Δ – ***Плечем сили*** **називають відстань від осі обертання до лінії, вздовж якої діє прикладена до тіла сила.**

Формулу (4.1) можна переписати у вигляді:

$$\boxed{M = d \cdot F.} \tag{4.2}$$

Δ – ***Момент сили*** **відносно осі обертання, що проходить через точку *O*, дорівнює добутку величини сили на плече.**

Момент сили – фізична величина, що характеризує здатність прикладеної сили обертати абсолютно тверде тіло навколо нерухомої осі. В системі СІ момент сили вимірюють як $M = Í \cdot ì$.

Подібну розмірність має і ***робота сили***, для роботи є спеціальна назва одиниці вимірювання – ***джоуль***.

Момент сили є векторною величиною. Він визначається загальною формулою:

$$\boxed{\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}].} \tag{4.3}$$

Якщо тіло обертається навколо закріпленої осі, то ***момент сили*** завжди напрямлений вздовж осі обертання, подібно до ***кутової швидкості*** і ***кутового прискорення.*** Напрям вектора $\vec{M}$ можна визначити за допомогою ***правила правої руки.***

Якщо на тіло одночасно діє декілька сил, то результуючий момент буде дорівнювати векторній сумі прикладених моментів:

Δ – ***Головним моментом зовнішніх сил,*** **прикладених до тіла, називають векторну суму моментів окремих сил:**

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i.$$

4.3. Основний закон динаміки обертального руху

Розглянемо обертальний рух матеріальної точки маси m по колу радіуса r навколо осі, що проходить перпендикулярно площині рисунка через точку O (рис. 4.2). Матеріальна точка закріплена за допомогою нерозтяжної невагомої нитки до осі обертання.

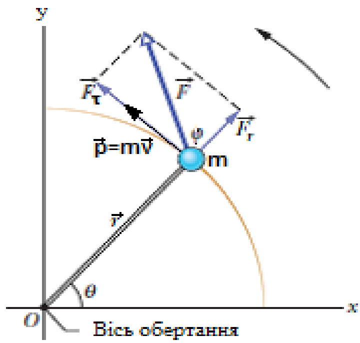


Рис. 4.2

Тангенціальна компонента $\vec{F}_\tau$ прикладеної до тіла сили буде розкручувати матеріальну точку, це призведе до збільшення кутової швидкості ω точки і до її руху з певним кутовим прискоренням β навколо осі обертання. Крім цього, точка буде рухатись по колу з миттєвою швидкістю $\vec{\upsilon}$. Напрям останньої буде перпендикулярним радіус-вектора $\vec{r}$. Якщо матеріальна точка має масу m, то її імпульс буде дорівнювати $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$.

Δ – ***Моментом імпульсу*** $\vec{L}$ **матеріальної точки відносно нерухомої осі називають векторний добуток радіус-вектора точки** $\vec{r}$ **на її імпульс** $\vec{p}$:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}\ .} \tag{4.4}$$

Формула (4.4) є загальним визначенням ***моменту імпульсу.*** Щоб мати момент імпульсу відносно деякої осі, матеріальній точці необов’язково обертатись навколо цієї осі. Якщо ж точка обертається, то вектори $\vec{r}$ та $\vec{p}$ будуть завжди перпендикулярними один одному. В цьому випадку, який ми і розглядаємо, момент імпульсу буде:

$$L = \left|\vec{L}\right| = r \cdot p = r \cdot m\upsilon.$$

Для обертального руху $\upsilon = \omega r$.

Величина ***моменту імпульсу*** матеріальної точки маси m що обертається навколо нерухомої осі по колу радіуса r буде:

$$L = r \cdot m\upsilon = mr^2\omega\ . \tag{4.5}$$

Формулу (4.5) можна переписати у вигляді:

$$\boxed{L = I \cdot \omega\,.} \tag{4.6}$$

У цій формулі величину

$$\boxed{I = mr^2\,.} \tag{4.7}$$

називають *моментом інерції* матеріальної точки маси m, що обертається навколо нерухомої осі по колу радіуса r.

Якщо ми розглядаємо механічну систему, що складається з кількох матеріальних точок, то момент інерції такої системи відносно осі обертання визначають за формулою [1, 5]:

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2\,. \tag{4.8}$$

Якщо нас цікавить момент інерції твердого тіла, то знайти його можна за формулою:

$$I = \int_V r^2 dm. \tag{4.9}$$

Ця формула означає що ми розбили тверде тіло на невеличкі шматочки масою dm, кожен з яких можна розглядати як матеріальну точку що обертається на відстані r від осі. Кожна така точка має свій невеликий (елементарний) момент інерції:

$$dI = r^2 \cdot dm.$$

Для розрахунку повного моменту інерції твердого тіла ми додаємо всі елементарні моменти інерції за повним об’ємом V що займає тіло, що і означає знак інтеграла в (4.9).

Момент інерції для обертального руху характеризує інерціальні властивості тіл відносно їх розкручування моментом зовнішніх сил навколо нерухомої осі. Ця величина є аналогом маси в поступальному русі. Слід відмітити, що інерціальні властивості для обертального руху залежать не тільки від маси, а і від квадрату відстані цієї маси до осі. Також слід розуміти, що момент інерції визначається різними формулами для тіл різної геометричної форми. Формула (4.7) справедлива тільки для матеріальної точки.

Інтеграл (4.9) можна строго розрахувати тільки для тіл правильної геометричної форми. Деякі значення моментів інерції наведено на рис. 4.3. Наприклад, момент інерції тонкого кільця радіуса R, масу M якого визначають за формулою $I = MR^2$ (цей вираз подібний до формули для матеріальної точки).

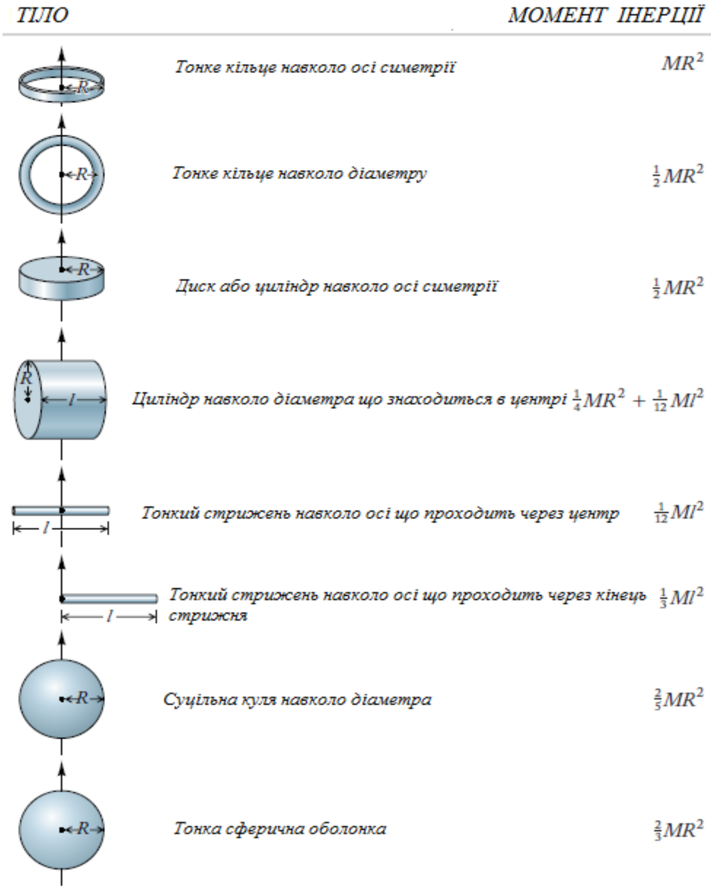


Рис. 4.3

Пояснюється це тим, що тонке кільце можна розбити на велику кількість малих частинок, кожен з яких має момент інерції, що визначається формулою (4.7). Оскільки ці малі шматки всі знаходяться на одній відстані від осі, то якщо використати формулу (4.8), то спільний множник R^2 можна винести з під знака суми. Якщо скласти маси всіх фрагментів, то отримаємо масу кільця M. Для диску тієї ж маси і такого ж радіусу момент інерції буде в 2 рази меншим $I = \frac{1}{2}MR^2$. Цей вираз можна отримати за допомогою формули (4.9), але тут потрібно врахувати розподіл маси тіла відповідно до відстані від осі обертання (для кільця ця відстань максимальна і дорівнює радіусу, тому і момент інерції великий, а для диску маса розподілена в інтервалі $0 < r < R$). Отже, інерційні властивості кільця стосовно його розкручування більші ніж диску. Кільце однакової маси і радіуса розкручується тим самим моментом сил повільніше. Це наочно можна побачити за допомогою інтерактивної симуляції. Кільце скочується з нахиленої площини повільніше чим диск за умови однакової маси і радіуса:

https://www.thephysicsaviary.com/Physics/Programs/Labs/DiskDownIncline/.

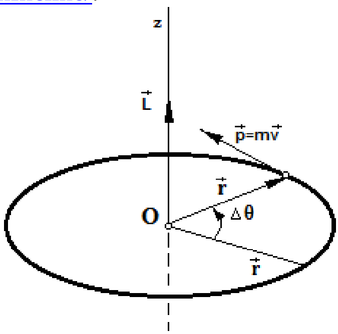


Рис. 4.4

Щоб отримати ***основний закон динаміки обертального руху,*** або, як його часто називають ***другий закон Ньютона для обертального руху,*** розглянемо ще раз рух матеріальної точки навколо нерухомої осі z (рис. 4.4). На рисунку зображений момент імпульсу $\vec{L}$, який для обертання навколо нерухомої осі напрямлений вздовж осі обертання і напрям якого визначається ***правилом правої руки.***

Запишемо для матеріальної точки ***другий закон Ньютона поступального руху***:

$$\vec{F}_{\eth} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \qquad (4.10)$$

Помножимо ліву і праву частину (4.10) векторно на радіус-вектор точки $\vec{r}$:

$$[\vec{r} \times \vec{F}_{\eth}] = \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right]. \qquad (4.11)$$

У цій формулі ліворуч ми знайдемо ***головний момент сил***, що діють на матеріальну точку $\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{F}_{\eth}\right]$. Праворуч стоїть похідна ***моменту імпульсу***:

$$\left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right] = \frac{d[\vec{r} \times \vec{p}]}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Отримали ***основний закон динаміки обертального руху***:

Δ – ***Швидкість зміни моменту імпульсу*** $d\vec{L}/dt$ **тіла дорівнює головному моменту** $\vec{M}$ **прикладених до тіла сил:**

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}.} \tag{4.12}$$

Формула (4.12) отримана для обертання матеріальної точки, але вона справедлива і для будь-яких тіл що обертаються. Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі, то вектори ***моменту зовнішніх сил*** $\vec{M}$ і ***моменту імпульсу*** $\vec{L}$ напрямлені вздовж однієї осі. Похідна від моменту імпульсу також буде напрямлена вздовж осі обертання. Тому, формулу (4.12) можна записати в проекції на вісь z:

$$\boxed{M_z = \frac{dL_z}{dt}.} \tag{4.13}$$

Напрям похідної може бути вздовж вектора моменту сили або проти. Існує правило – якщо момент сили прискорює обертання тіла навколо нерухомої осі, то в формулу (4.13) цей момент входить із знаком «**плюс**», якщо момент сил гальмує обертальний рух – то його беруть із знаком «**мінус**».

Момент імпульсу можна визначити через момент інерції I та кутову швидкість ω, формула (4.6) $L = I \cdot \omega$.

Якщо підставити цей вираз в формулу (4.13), то отримаємо:

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d(I \cdot \omega)}{dt}.$$

Якщо ***момент інерції тіла*** I не міняється під час обертання, то можна його винести за знак похідної і тоді отримаємо ще одну форму запису основного закону динаміки обертального руху:

$$\boxed{M_z = I \cdot \frac{d\omega}{dt} = I \cdot \beta; \quad I = \text{const}.} \tag{4.14}$$

Δ – ***Головний момент зовнішніх сил*, прикладених, до тіла що обертається навколо нерухомої осі з незмінним моментом інерції, дорівнює добутку моменту інерції на кутове прискорення тіла.**

Між законами кінематики поступального руху і законами кінематики обертального руху була встановлена певна подібність (див. табл. 4.1). ***Масі*** m поступального руху відповідає ***момент інерції*** I обертального: $m \leftrightarrow I$. ***Силі*** $\vec{F}$ поступального руху відповідає ***момент сили*** $\vec{M}$ обертального: $\vec{F} \leftrightarrow \vec{M}$. ***Імпульсу*** $\vec{p}$ поступального руху відповідає ***момент імпульсу*** $\vec{L}$ обертального руху: $\vec{p} \leftrightarrow \vec{L}$.

Інші формули динаміки для порівняння наведені у таблиці 4.1.

Таблиця 4.1

$p = m \cdot \upsilon$	$L = I \cdot \omega$
$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
$F = m \cdot a$	$M = I \cdot \beta$

4.4. Теорема Штейнера

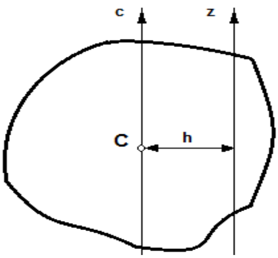


Рис. 4.5

Припустимо, відомий момент інерції тіла відносно осі c, що проходить через центр мас тіла C. Нам потрібно визначити момент інерції відносно паралельної осі z, яка розташована на відстані h від осі c (рис. 4.5).

У цьому випадку можна використати ***теорему Штейнера*:**

Δ – **Якщо відомий момент інерції тіла I_C відносно осі, що проходить через центр мас тіла *C*, то момент інерції відносно будь-якої паралельної осі *z*, віддаленої від першої осі на відстань *h*,** визначають за формулою:

$$\boxed{I_Z = I_C + m \cdot h^2,} \tag{4.15}$$

де m – маса тіла.

Приклад

Відомо, що момент інерції стрижня відносно осі, що проходить через центр мас стрижня перпендикулярно до нього $I_C = \dfrac{1}{12} m l^2$. Тут

m – маса стрижня, l – його довжина. Потрібно знайти момент інерції відносно осі z, що проходить через один з кінців стрижня (рис. 4.6).

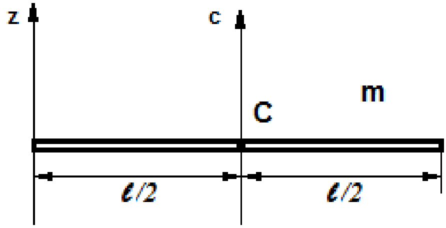


Рис. 4.6

Як видно з рисунка, осі паралельні $z \parallel c$ і відстань між ними $h = l/2$. Отже, можна застосувати теорему Штейнера:

$$I_z = I_c + mh^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}.$$

Отримаємо наступні результати:

$$I_z = \frac{ml^2}{3}.$$

Бачимо, що момент інерції відповідає наведеному в рис. 4.3 значенню.

4.5. Закон збереження моменту імпульсу

Одним з найважливіших законів динаміки поступального руху є закон збереження імпульсу замкненої механічної системи. Аналогом цього фундаментального закону в динаміці обертального руху є закон збереження моменту імпульсу замкненої механічної системи.

Почнемо з основного рівняння динаміки обертального руху у формі рівняння (4.13):

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

***Закон збереження моменту імпульсу*:**

Δ – **Якщо головний момент зовнішніх сил прикладених до замкненої механічної системи дорівнює нулю $\vec{M} = 0$, то момент імпульсу системи буде сталою величиною $\vec{L} = \text{const}$.**

В цьому випадку $d\vec{L}/dt = 0$, що і означає незмінність моменту імпульсу $\vec{L}$.

Розглядаємо рух абсолютно твердого тіла навколо нерухомої осі. В цьому випадку, і головний момент зовнішніх сил, і момент імпульсу і його похідна – всі ці величини напрямлені вздовж осі обертання. Тому закон збереження моменту імпульсу можна сформулювати також для проекцій цих величин на вісь обертання. Для цього візьмемо основний закон динаміки обертального руху у формі проекції на вісь обертання – рівняння (4.12):

$$M_z = \frac{dL_z}{dt}.$$

***Закон збереження моменту імпульсу відносно нерухомої осі обертання*:**

Δ – Якщо сума моментів зовнішніх сил (головний момент зовнішніх сил) відносно нерухомої осі дорівнює нулю $M_z = 0$, то момент імпульсу тіла відносно осі не змінюється під час руху $L_z = \text{const}$.

Якщо згадати, що $L_z = I_z \cdot \omega$, то закон збереження моменту імпульсу означає, що з часом для замкненої механічної системи залишається сталим добуток:

$$\boxed{I_z \cdot \omega = \text{const}.} \qquad (4.16)$$

Якщо проекція моменту інерції тіла на вісь обертання в момент часу $t = t_1$ буде I_1 і кутова швидкість обертання ω_1, а в момент часу $t = t_2$ внаслідок переміщень частин всередині замкненої системи момент інерції став I_2, то кутова швидкість обертання також зміниться і стане дорівнювати ω_2, але таким чином, щоб виконувалось рівняння:

$$\boxed{I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2 = \text{const}.} \qquad (4.17)$$

Саме в такій формі закон збереження моменту імпульсу найчастіше використовують для розв’язку різних практичних задач.

Закон збереження моменту імпульсу є фундаментальним законом природи. Він виконується в умовах, коли ньютонівська механіка вже не може бути застосована. Наприклад, коли швидкості руху наближаються до швидкості світла і справедлива релятивістська механіка заснована на теорії відносності. Або в мікросвіті, де панують закони квантової фізики. Закон збереження моменту імпульсу працює і в цих масштабах для мікрочастинок. Тому цей закон – універсальний.

Контрольні питання

1. Як визначають моменти сили, імпульсу та інерції?
2. Як формулюють основний закон динаміки обертального руху?
3. Що таке головний момент зовнішніх сил?
4. Як формулюється теорема Штейнера?
5. Як формулюється закон збереження моменту імпульсу?

Література: [**1**, с. 19–27; **4**, с. 24–29]

Лекція 5.
Механічна робота та енергія. Сили у механіці

- **Робота, енергія, потужність**
- **Закон збереження енергії**
- **Основні сили в механіці**
  – пружні сили;
  – гравітаційні сили;
  – сила тертя

5.1. Робота, енергія, потужність

Δ – ***Енергія* – кількісна універсальна міра різних форм руху і взаємодії матерії.**

Енергія пов'язує всі явища природи, дає універсальну кількісну міру, яка дозволяє прогнозувати розвиток різноманітних процесів, знаходити в цих процесах спільну основу, що їх характеризує і об'єднує. Енергія має багато різних форм, в кожній групі природних явищ своє визначення енергії, але енергія в різних природних процесах не виникає і не зникає, вона може тільки переходити з однієї форми в іншу. В замкнених системах повна енергія зберігається сталою. Закон збереження енергії є потужним інструментом для розрахунку стану цих систем. В механіці використовують поняття ***механічної роботи*** для характеристики обміну енергією між взаємодіючими тілами.

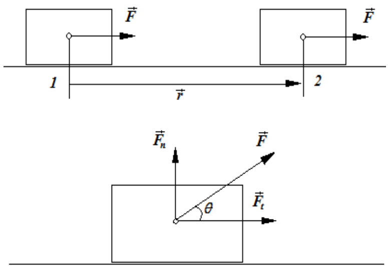


Рис. 5.1

Якщо виконана певна ***робота,*** то відбувся процес переносу такої ж кількості ***енергії.*** Для виконання ***механічної роботи*** до тіла має бути прикладена ***сила*** і має бути переміщення в напрямку дії цієї сили [2, 3].

Розглянемо випадок, коли тіло рухається прямолінійно під дією сталої сили $\vec{F}$ (рис. 5.1).

В цьому випадку, ***робота*** A**, що виконується силою з переміщення тіла вздовж шляху** s **буде:**

$$\boxed{A = F \cdot s.} \tag{5.1}$$

У цій формулі $s = |\vec{r}|$, оскільки рух прямолінійний. Якщо сила напрямлена під деяким кутом θ до напряму переміщення (див. рис. 5.1, знизу), то роботу буде виконувати тільки та складова сили $\vec{F}_t$ що напрямлена вздовж переміщення. Перпендикулярна до переміщення складова сили $\vec{F}_n$ роботи не виконує, бо тіло не переміщується в вертикальному напрямку. Таким чином, в даному випадку, робота може бути визначена за формулою:

$$A = F_t \cdot s = F \cdot \cos\theta \cdot s = \left|\vec{F}\right| \cdot \cos\theta \cdot \left|\vec{r}\right|. \qquad (5.2)$$

Якщо розглянути більш уважно формулу (5.2), то можна побачити, що робота дорівнює скалярному добутку векторів переміщення і сили:

$$\boxed{A = (\vec{F} \cdot \vec{r}).} \qquad (5.3)$$

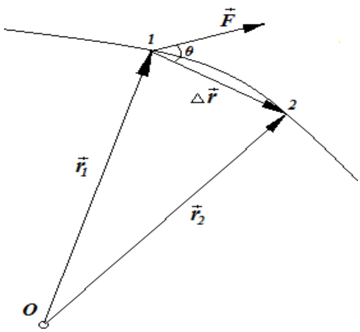


Рис. 5.2

Розглянемо найбільш загальний випадок, коли необхідно розрахувати роботу сили. Нехай тіло рухається по криволінійній траєкторії, величина і напрям прикладеної сили також може змінюватись і не збігається з напрямом руху (рис. 5.2). У цьому випадку траєкторію розбивають на невеликі прямолінійні ділянки $\Delta\vec{r}$.

Розмір цих ділянок має відповідати двом вимогам: сила в межах ділянки може розглядатись сталою і траєкторія руху також наближено відповідає прямій лінії.

Звичайно, що чим менша ділянка $\Delta\vec{r}$, тим краще будуть виконуватись ці вимоги. Для нескінченно малих ділянок символ зміни величини Δ заміняють на символ диференціала d, і в цьому випадку $\Delta\vec{r} = d\vec{r}$. Оскільки в межах таких нескінченно малих переміщень $d\vec{r}$ траєкторію можна вважати прямолінійною і силу сталою, то для кожної такої ділянки можна розрахувати роботу сили за формулою (5.3). Ми отримаємо формулу для ***елементарної роботи*** на нескінченно малому переміщенні $d\vec{r}$:

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}). \qquad (5.4)$$

Робота є величиною скалярною. Якщо нам потрібно взнати повну роботу A вздовж всієї криволінійної траєкторії, то ми повинні додати всі елементарні роботи dA вздовж кожної елементарної ділянки, тобто порахувати інтеграл:

$$\boxed{A = \int_{r_1}^{r_2} dA = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}\ .} \tag{5.5}$$

Звичайно, потрібно враховувати, що сила сама є функцією точки простору, тобто потрібно знати залежність сили від координат тіла $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$.

Як уже зазначалось, робота A є мірою зміни енергії тіла E:

$$A = \Delta E, \tag{5.6}$$

тому, робота вимірюється в тих самих одиницях, що й енергія. В системі СІ це ***джоуль***: $A = E = \text{Í} \cdot \text{ì} = \text{Äæ}$.

Одна і та сама робота може бути виконана за різні проміжки часу. Тому, для характеристики швидкості виконання роботи вводиться поняття ***потужності*** N.

Δ – ***Потужністю* називають роботу, яка виконується в одиницю часу.**

$$\boxed{N = \frac{dA}{dt}.} \tag{5.7}$$

У системі СІ потужність вимірюють у ***ватах*** (Вт), тобто: $N = \text{Äæ/ñ=Âò}$. Також часто в технічній літературі зустрічається застаріла одиниця потужності – ***кінська сила*** (к.с.): $1\ \text{ê.ñ.} = 746\ \text{Âò}$.

Якщо робота виконується силою $\vec{F}$, яка прикладена до матеріальної точки, що рухається із швидкістю $\vec{\upsilon}$, то:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{F}| \cdot \cos\theta \cdot |d\vec{r}|}{dt} = \frac{F \cdot \cos\theta \cdot ds}{dt} = F \cdot \cos\theta \cdot \upsilon = (\vec{F} \cdot \vec{\upsilon}).$$

Отже, справедлива формула:

$$\boxed{N = (\vec{F} \cdot \vec{\upsilon}).} \tag{5.8}$$

Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі під впливом моменту зовнішніх сил M, і має кутову швидкість ω, то потужність можна визначити за формулою:

$$\boxed{N = M \cdot \omega.} \tag{5.9}$$

У механіці розрізняють два види енергії – ***потенціальну*** $(E_{ï})$ і ***кінетичну*** $(E_{ê})$.

Δ – *Кінетичною енергією* називають енергію руху тіла або механічної системи.

Δ – *Потенціальною енергією* називають енергію, яка залежить від взаємного розміщення взаємодіючих частин тіла або тіл у механічній системі.

Знайдемо формулу, яка визначає кінетичну енергію тіла масою m що рухається поступально із швидкістю υ. Таке тіло має імпульс $p = m \cdot \upsilon$ Нехай до тіла прикладена сила, тангенціальна компонента якої F. Елементарна робота dA вздовж шляху ds буде дорівнювати зміні кінетичної енергії тіла на цій ділянці: $dE_{ê} = dA = F \cdot ds$.

За другим законом Ньютона динаміки поступального руху:

$$F = \frac{dp}{dt}.$$

Врахуємо також, що $ds = \upsilon \cdot dt$:

$$dE_{ê} = dA = \frac{dp}{dt} \cdot \upsilon \cdot dt = \upsilon \cdot dp = \frac{p}{m} \cdot dp.$$

Щоб знайти повну кінетичну енергію, потрібно додати всі невеликі зміни $dE_{ê}$:

$$E_{ê} = \int_0^p dE_{ê} = \int_0^p \frac{p}{m} dp = \frac{1}{m} \int_0^p p \cdot dp = \frac{1}{m} \frac{p^2}{2}.$$

Якщо підставити в цю формулу $p = m \cdot \upsilon$, то для ***кінетичної енергії тіла*** отримаємо:

$$\boxed{E_{ê} = \frac{p^2}{2m} = \frac{m \cdot \upsilon^2}{2}.} \tag{5.10}$$

Як видно з отриманої формули, кінетична енергія тіла що рухається, пропорційна квадрату його швидкості υ^2. Це, наприклад означає, що автомобіль, який рухається із швидкістю $\upsilon = 100$ êì /ãî ä має кінетичну енергію в 4 рази більшу, ніж під час руху із швидкістю $\upsilon = 50$ êì /ãî ä.

Розглянемо обертальний рух системи матеріальних точок m_i навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю ω. Всі точки мають однакову кутову швидкість, але їх миттєва лінійна швидкість υ_i поступального руху залежатиме від відстані до осі r_i:

$$\upsilon_i = \omega \cdot r_i .$$

Кінетична енергія такої системи буде складатись з кінетичних енергій окремих матеріальних точок, отже можемо записати:

$$E_{\text{ê}} = \sum_{i=1}^{N} E_{\text{ê³}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \cdot \upsilon_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \cdot \sum_{i=1}^{N} r_i^2 \cdot m_i .$$

Якщо порівняти отриманий вираз з формулою (4.8) для моменту інерції механічної системи, що обертається навколо нерухомої осі:

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 .$$

то формулу для ***кінетичної енергії механічної системи, що обертається навколо нерухомої осі*** z ***із кутовою швидкістю*** ω можна записати у вигляді:

$$\boxed{E_k = \frac{I_z \omega^2}{2}.} \qquad (5.11)$$

де I_z – момент інерції системи відносно осі обертання.

Оскільки будь-яке тверде тіло можна розглядати як механічну систему, якщо розбити його на велику кількість малих частинок, кожну з яких можна розглядати як матеріальну точку, то формула (5.11) справедлива також і для абсолютно твердих тіл [1, 6].

У загальному випадку руху абсолютно твердого тіла поступально із швидкістю υ і обертального руху навколо осі z з кутовою швидкістю ω, кінетична енергія тіла може бути знайдена за формулою:

$$\boxed{E_k = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I_z\omega^2}{2}.} \quad (5.12)$$

Вісь обертання може рухатись в просторі поступально разом з тілом, головне, щоб вона не змінювала свого напряму.

Потенціальною енергією характеризуються механічні системи в яких діють ***консервативні сили.***

Δ – Сили, робота яких не залежить від траєкторії переміщення тіла, а залежить тільки від початкового і кінцевого положень тіла, називають *консервативними* або *потенціальними.*

Робота консервативних сил вздовж замкненої траєкторії завжди дорівнює нулю:

$$\boxed{A = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.} \quad (5.13)$$

Кружечок на символі інтеграла означає, що контур L (траєкторія) замкнений. Приклади консервативних сил – пружна сила, гравітаційна сила, кулонівська сила.

Δ – **Якщо робота сили вздовж замкненої траєкторії відмінна від нуля, то таку силу називають *дисипативною.***

Приклад – сили тертя.

Вважається, що якщо консервативні сили системи виконують над тілом певну роботу, то ця робота виконується за рахунок зменшення потенціальної енергії системи:

$$\Delta A = E_{ï1} - E_{ï2} = -\Delta E_ï . \quad (5.14)$$

Розглянемо переміщення тіла вздовж осі x. В цьому випадку $\Delta A = F \cdot \Delta x$, або, якщо цей вираз підставити в попередню формулу:

$$F = -\frac{\Delta E_ï}{\Delta x}.$$

Якщо перейти до границі $\Delta x \to 0$, то отримаємо точний ***вираз для зв'язку консервативної сили і потенціальної енергії системи*** (в одномірному випадку):

$$\boxed{F = -\frac{dE_ï}{dx}.} \quad (5.15)$$

Інтегральний варіант цієї залежності має вигляд:

$$\boxed{\Delta E_{ï} = -\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx.} \qquad (5.16)$$

5.2. Закон збереження енергії

Повна механічна енергія системи дорівнює сумі кінетичної і потенціальної енергій:

$$E = E_{ï} + E_{ê}. \qquad (5.17)$$

Δ – ***Закон збереження повної механічної енергії системи:* повна механічна енергія замкненої системи тіл, між якими діють тільки консервативні сили, залишається незмінною.**

Якщо в замкненій системі діють також неконсервативні сили, наприклад сили тертя, то повна механічна енергія не зберігається. Дія сил тертя призводить до перетворення механічної енергії в теплову. В цьому випадку виконується більш загальний закон збереження енергії:

Δ – ***Закон збереження і перетворення енергії:* у замкненій системі енергія може переходити з одних видів в інші і передаватись від одного тіла до іншого, але її загальна кількість залишається незмінною.**

Приклади зберігання і перетворення енергії [1]:
https://phet.colorado.edu/en/simulation/energy-forms-and-changes
https://phet.colorado.edu/en/simulation/energy-skate-park-basics

5.3. Основні сили в механіці

У механіці в основному розглядають пружні сили, гравітаційні сили та сили тертя.

5.3.1. Пружні сили

Припустимо, що один кінець пружини закріплений, а до другого прикладена сила $\vec{F}$ (рис. 5.3), яка діє вздовж осі пружини і розтягує її на величину X відносно її недеформованого стану $(x = 0)$. Тоді, за ***законом Гука*** виникне пружна сила $\vec{F}_{ïð}$, яка буде напрямлена протилежно зміщенню пружини. Тобто ця сила буде напрямлена в сторону зменшення деформації пружини:

$$\boxed{F_{ïð} = -kx,} \tag{5.18}$$

де x – видовження пружини відносно її початкової довжини;
k – коефіцієнт пружності.

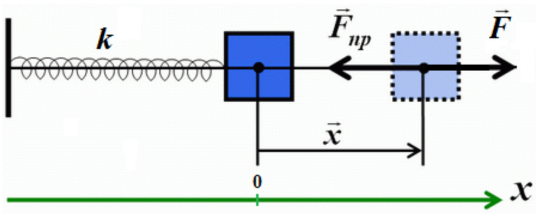


Рис. 5.3

Під час розтягування пружини зовнішній силі потрібно було виконати певну роботу проти сил пружності. Порахуємо цю роботу. Перш за все, потрібно зауважити, що сила пружності залежить від величини деформації, а точніше – прямо пропорційна цій величині. Тому потрібно розглянути елементарну роботу dA на такій незначній ділянці dx, де діючу силу, що залежить від x можна вважати сталою:

$$dA = F \cdot dx.$$

Щоб знайти повну роботу для деформації x, потрібно додати всі елементарні роботи:

$$A = \int_0^x F \cdot dx = -\int_0^x kx \cdot dx = -\frac{kx^2}{2}.$$

Щоб розтягнути пружину на величину x, зовнішній силі потрібно здійснити роботу проти сил пружності:

$$\boxed{A = -\frac{kx^2}{2}.} \tag{5.19}$$

Робота вийшла від'ємною що відповідає загальному прийнятому в фізиці правилу: якщо роботу виконує механічна система, то вона буде додатною, а якщо зовнішні сили виконують роботу над системою, то вона буде від'ємною.

Виконана консервативною силою робота згідно з формулою (5.14) дорівнює зміні потенціальної енергії із знаком «мінус»:

$$\Delta A = E_{ï1} - E_{ï2} = -\Delta E_{ï}.$$

Оскільки в положенні рівноваги $E_{ï1} = 0,$ то для потенціальної енергії розтягнутої пружини можна записати:

$$\boxed{E_{ï} = \frac{kx^2}{2}.} \qquad (5.20)$$

Закон Гука: https://phet.colorado.edu/en/simulation/hookes-law

5.3.2. Гравітаційні сили

Англійський фізик Ісак Ньютон довів, що фізичною основою законів руху планет Кеплера є фундаментальний всесвітній закон тяжіння, що діє між будь-якими тілами що мають масу.

Δ – ***Закон всесвітнього тяжіння*: між будь-якими матеріальними точками діє сила взаємного притягання (*гравітаційна сила*), яка прямо пропорційна добутку мас цих точок і обернено пропорційна квадрату відстані між ними:**

$$\boxed{F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},} \qquad (5.21)$$

де m_1 та m_2 – маси взаємодіючих точкових або сферичних тіл; r – відстань між матеріальними точками або центрами сферичних тіл; $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{Í \cdot ì^2}{êã^2}$ – ***універсальна гравітаційна стала.***

За ***законом всесвітнього тяжіння,*** на тіло маси m біля поверхні Землі буде діяти гравітаційна сила напрямлена до центру Землі:

$$F = G\frac{m \cdot M}{R^2}, \qquad (5.22)$$

де $M = 5,972 \cdot 10^{24}$ êã – маса Землі; $R = 6400$ êì – радіус Землі.

Згідно другого закону Ньютона, цю ж силу можна записати у вигляді:

$$\boxed{F = mg,} \qquad (5.23)$$

де $g = 9,8$ ì/ñ^2 – ***прискорення вільного падіння*** на Землі.

Якщо прирівняти праві частини формул (5.22) та (5.23), то для прискорення вільного падіння отримаємо:

$$g = G\frac{M}{R^2}.$$

Прискорення вільного падіння залежить від розмірів небесного тіла на якому воно вимірюється. Слід підкреслити, що гравітаційна сила діє на тіло завжди, поки тіло знаходиться в гравітаційному полі, навіть в стані невагомості. Невагомість можлива коли тіло знаходиться в стані вільного падіння.

Якщо висота, на якій знаходиться тіло h невелика порівняно з радіусом Землі R, то гравітаційну силу тяжіння, що діє на тіло можна вважати приблизно сталою. У цьому випадку, наприклад, якщо тіло впаде з висоти h на Землю, то гравітаційні сили виконають роботу:

$$A = F \cdot h = mgh.$$

За визначенням, ця робота дорівнює потенціальній енергії піднятого над Землею тіла:

$$\boxed{E_{ï} = mgh.} \qquad (5.24)$$

Гравітація: https://phet.colorado.edu/en/simulation/gravity-and-orbits

5.3.3. Сила тертя

Сила тертя – **дотична сила, що виникає при переміщенні поверхонь тіл, що контактують і рухаються з різними швидкостями**.

Сила тертя ковзання пропорційна силі нормальної реакції опори N, з якою одне тіло діє на інше, тобто прямо пропорційно залежить від сили притискання поверхонь тіл (рис. 5.4):

$$\boxed{F_{òð} = \mu \cdot N,} \qquad (5.25)$$

де μ – ***коефіцієнт тертя ковзання.***

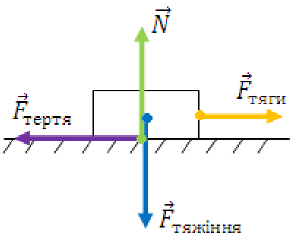


Рис. 5.4

Коефіцієнт ковзання залежить від багатьох факторів, таких як вид взаємодіючих речовин, якість обробки ковзних поверхонь, наявність змазки між поверхнями та ін. Сили тертя є ***дисипативними силами***. Вони розсіюють механічну енергію перетворюючи її в тепло.

Тертя: https://phet.colorado.edu/en/simulation/friction

Більш докладно з роботою сили, законом збереження енергії і різними механічними силами можна ознайомитись [1, с. 36–51].

Контрольні питання

1. Яке визначення можна дати для енергії?
2. Що таке механічна робота, потужність?
3. Яка різниця між кінетичною та потенціальною енергіями?
4. Що таке консервативні сили?
5. Як формулюється закон всесвітнього тяжіння?
6. Які основні сили розглядаються в механіці?

Література: [**1**, с. 28–47; **4**, с. 15–20]

Частина 2.

МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА

Лекція 6.
Газові закони, рівняння стану

- **Вступ**
- **Газові закони**
- **Рівняння стану ідеального газу**

6.1. Вступ

Молекулярна фізика і термодинаміка – розділи фізики, які вивчають внутрішні процеси в тілах, що пов’язані з великою кількістю атомів і молекул, з яких вони складаються. Для їх дослідження використовують молекулярно-кінетичний (статистичний) і термодинамічний методи.

Δ – ***Молекулярна фізика*** **вивчає будову і властивості речовини статистичним методом, виходячи з уявлень про те, що всі тіла складаються з атомів і молекул, які перебувають в безперервному тепловому русі.**

Молекулярна фізика застосовує методи статистики до систем, які складаються з величезної кількості однорідних елементів. За допомогою цих статистичних методів встановлюються зв’язки між середніми значеннями мікропараметрів цих дрібних елементів і макропараметрами всієї макросистеми.

Δ – ***Термодинаміка*** **– розділ фізики що вивчає загальні властивості макроскопічних систем що знаходяться в стані термодинамічної рівноваги і процеси переходу між цими станами.**

Термодинаміка не досліджує мікроскопічний стан речовини, а лише встановлює зв’язок між макроскопічними параметрами. Найважливішими параметрами стану системи є об’єм V (м^3), тиск P (Па), температура T (°К) та ***маса*** m (кг). Між цими параметрами існує зв’язок, що називають ***рівнянням стану***:

$$f(V, P, T, m) = 0. \qquad (6.1)$$

Значення термодинамічних параметрів для ***нормальних умов***:

– $P_0 = 101325\ \text{Ï à} \approx 10^5\ \text{Ï à} = 760\ \text{ì ì ðò. ñò.}$;

– $T_0 = 273^\circ\text{Ê} = 0^\circ\text{Ñ}$.

Δ – *Кількість речовини* ν – фізична величина, яку визначають кількістю специфічних структурних елементів речовини (атомів або молекул).

Одиницею ***кількості речовини*** є ***моль***: $[\nu] = \text{ì î ëü}$.

Δ – *1 моль* – це кількість речовини, число структурних елементів якої дорівнює кількості атомів у 12 г вуглецю.

Кількість структурних елементів в 1 молі речовини називають ***числом Авогадро***: $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\text{ì î ëü}^{-1}$.

Δ – *Молярна маса M* – це маса одного моля речовини.

Якщо в 1 молі будь-якої речовини міститься N_A структурних елементів (атомів або молекул), тоді можна записати:

$$M = m_0 \cdot N_A. \tag{6.2}$$

У цій формулі m_0 – маса атома або молекули речовини.

В системі СІ молярну масу вимірюють в кілограмах, поділених на моль: $[M] = \text{êã/ì î ëü}$. Якщо ***молярну масу*** вимірювати в кг/моль, то вона збігається з відносною атомною масою A_r елемента в таблиці Менделєєва, помноженою на 10^{-3}: $M = A_r \cdot 10^{-3}\text{êã/ì î ëü}$.

Для визначення молярної маси молекул потрібно додати маси складових атомів з урахуванням їх кількості, наприклад:

$$M_{\mathrm{O_2}} = 2 \cdot 16 \cdot 10^{-3}\text{êã/ì î ëü} = 32 \cdot 10^{-3}\text{êã/ì î ëü};$$

$$M_{\mathrm{H_2O}} = 2 \cdot 1 \cdot 10^{-3} + 16 \cdot 10^{-3} = 18 \cdot 10^{-3}\text{êã/ì î ëü};$$

$$M_{\mathrm{CO_2}} = 12 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 16 \cdot 10^{-3} = 44 \cdot 10^{-3}\text{êã/ì î ëü}.$$

Для визначення кількості речовини потрібно її масу m розділити на молярну масу *M*:

$$\nu = \frac{m}{M}. \tag{6.3}$$

Δ – Об'єм одного моля газу називають *молярним об'ємом* V_m.

Δ – ***Закон Авогадро*** **– за однакових значень температури і тиску в рівних об'ємах різних газів знаходиться однакова кількість молекул.**

Наприклад, за ***нормальних умов*** молярні об'єми всіх газів однакові: $V_{m0} = 22,4 \text{ ë/ì îëü} = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ ì}^{3}\text{/ì îëü}$.

Δ – ***Закон Дальтона*** **– тиск суміші ідеальних газів дорівнює сумі парціальних тисків її компонентів:**

$$P = P_1 + P_2 + ... + P_N = \sum_{i=1}^{N} P_i. \qquad (6.4)$$

Δ – ***Парціальний тиск*** **– тиск, який мав би газ – компонент суміші за умов, що він один займав би весь об'єм суміші.**

6.2. Газові закони

У молекулярно-кінетичній теорії використовують модель ***ідеального газу***, яка ґрунтується на трьох припущеннях:

1) власний об'єм молекул газу дорівнює нулю;
2) молекули газу не взаємодіють між собою;
3) зіткнення молекул між собою і стінками посудини абсолютно пружні.

Іншими словами, газ за своїми властивостями наближається до ідеального, якщо він займає об'єм набагато більший, ніж об'єм його молекул (це необхідно для виконання першого припущення), якщо він має високу температуру (виконання другого припущення). Реальні гази досить точно можна описати цією моделлю за нормальних умов [3, 7].

Розглянемо закони, які описують поведінку ***ідеальних газів***.

Δ – ***Закон Бойля–Маріотта*** **(для ізотермічних процесів** $T = \text{const}$):

Для певної маси газу за постійної температури добуток тиску газу на його об'єм є постійною величиною:

$$PV = \text{const}, \text{ якщо } T = \text{const}, m = \text{const}. \qquad (6.5)$$

Криву, яка описує залежність P від V за постійної температури газу $T = \text{const}$ називають ***ізотермою.*** Рівняння цієї кривої є рівнянням гіперболи (рис. 6.1):

$$P = \frac{\text{const}}{V}.$$

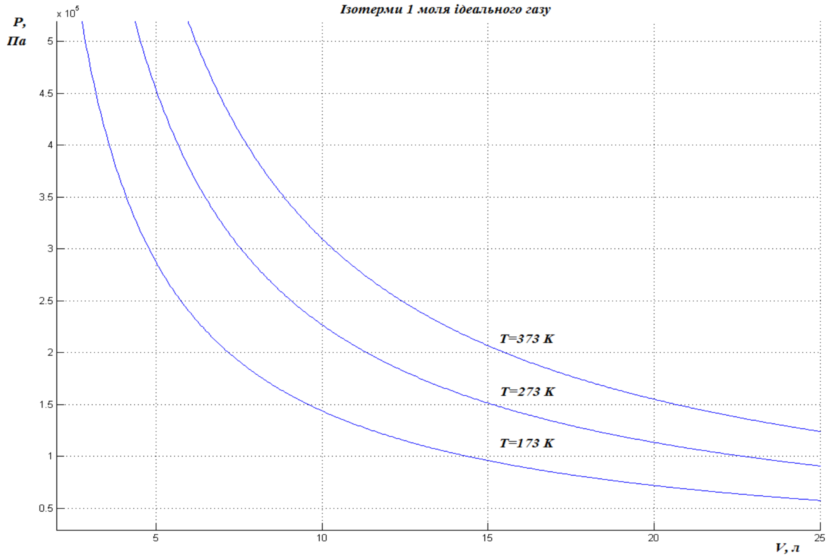


Рис. 6.1 – Ізотерми 1 моля ідеального газу

Δ – *Закон Гей-Люссака* (для ізобарних процесів $P = \text{const}$):

Для певної маси газу за постійного тиску об'єм газу прямо пропорційний його температурі:

$$V = \text{const} \cdot T, \text{ якщо } P = \text{const}, m = \text{const}. \qquad (6.6)$$

Для ізобарного процесу відношення об'єму до температури є сталою величиною: $V / T = \text{const}$, яке часто використовують у вигляді $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$. Очевидно, що ця залежність описується прямими лініями (див. рис. 6.2). На цих кривих можна помітити одну дуже цікаву особливість – тиск газу може бути будь-яким, але існує температура за якої об'єм стає рівним нулю. Всі прямі перетинають вісь температур в точці $t = -273^\circ\text{C}$. Звичайно, в часи коли були встановлені газові закони такі низькі температури були недосяжні. Крім того, як виявилось, за таких низьких температур газ може змінити свій агрегатний стан і перетворитись на рідину. Однак, для моделі ідеального газу існує така температура, за якої об'єм газу стає нульовим.

Якщо температуру записати в градусах Цельсія, то закон Гей-Люссака набуде вигляду:

$$V = V_0(1 + \alpha \cdot t^\circ\text{C}),$$

де V_0 – об'єм газу за температури $t = 0^\circ\text{C}$, $\alpha = 1/273.$

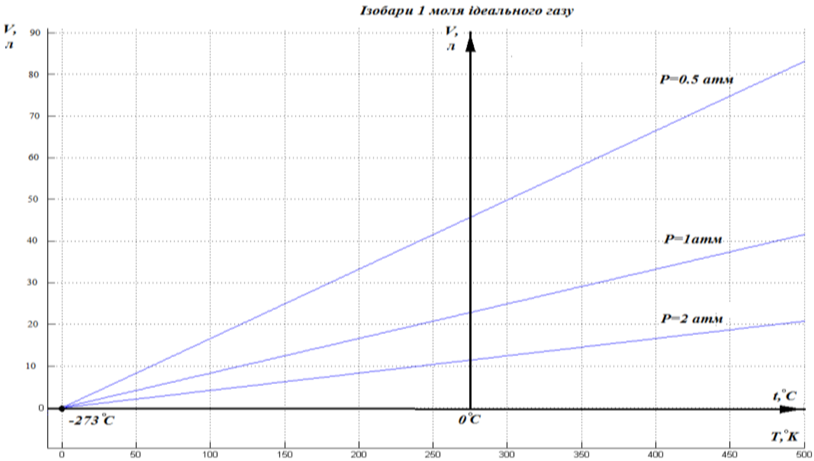


Рис. 6.2 – Ізобари одного моля ідеального газу

Δ – ***Закон Шарля*** **(для ізохорних процесів** $V = \text{const}$).

Для певної маси газу при постійному об'ємі тиск газу прямо пропорційний його температурі:

$$P = \text{const} \cdot T, \text{ якщо } V = \text{const}, m = \text{const}. \qquad (6.7)$$

Або, для ізохорного процесу відношення тиску до температури є сталою величиною: $P/T = \text{const}$, часто використовують у вигляді $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$. У координатах P та T це будуть прямі лінії (див. рис. 6.3).

Відмічена на рис. 6.2 особливість – перетин кривими осі температур в точці $t = -273^\circ\text{C}$, зберігається і для ізохор. В цьому випадку, для ідеальних газів будь-якого об'єму за такої низької температури тиск газу дорівнює нулю. Якщо температуру записати в градусах Цельсія, то закон Шарля набуде вигляду:

$$P = P_0(1 + \alpha \cdot t^\circ\text{C}),$$

де P_0 – тиск газу за температури $t = 0^\circ\text{C}$, $\alpha = 1/273$, як і для ізобарного процесу.

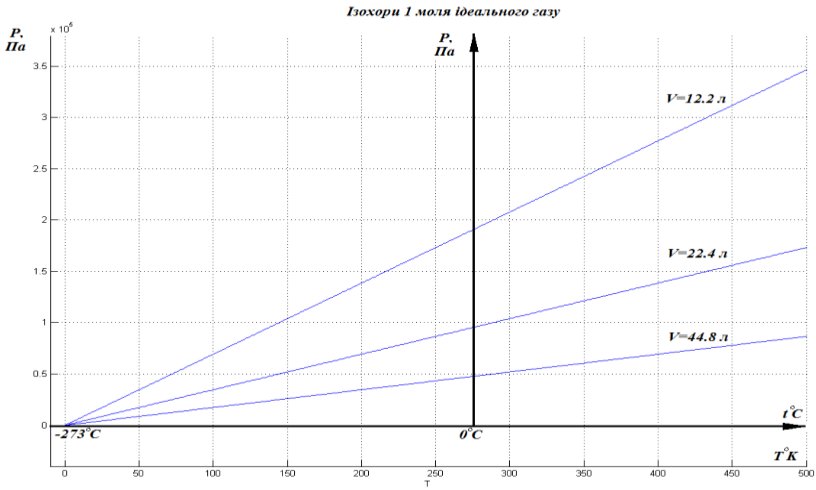


Рис. 6.3 – Ізохори одного моля ідеального газу

Англійський фізик Томсон (лорд Кельвін) запропонував прийняти за нуль абсолютної (термодинамічної) шкали температур значення $t = -273^{\circ}\mathrm{C}$, яке відоме як абсолютний нуль температури.

Зв'язок між термодинамічною температурою T і температурою t за шкалою Цельсія визначають формулою:

$$T^{\circ}\mathrm{K} = 273 + t^{\circ}\mathrm{C}. \qquad (6.8)$$

Так, температурі $t = 0^{\circ}\mathrm{C}$ відповідає термодинамічна температура $T = 273^{\circ}\mathrm{K}$ температурі $t = 20^{\circ}\mathrm{C}$ відповідає термодинамічна температура $T = 293^{\circ}\mathrm{K}$.

6.3. Рівняння стану ідеального газу

Газові закони дають залежність між параметрами газу попарно. В реальних процесах всі чотири параметри можуть змінюватись одночасно. Рівняння, яке з'єднує всі параметри ідеального газу називають рівнянням стану. Вперше його отримав французький вчений і інженер Клапейрон.

Нехай деяку масу газу перевели з стану 1 з параметрами (P_1, V_1, T_1) в стан $1'$ (P_1', V_2, T_1) ізотермічно за сталої температури $T_1 = \mathrm{const}$ (рис. 6.4).

Це перший процес. Потім, газ перевели з точки $1'\ (P_1',V_2,T_1)$ в точку $2\ (P_2,V_2,T_2)$ ізохорно за сталого об’єму V_2 (другий процес).

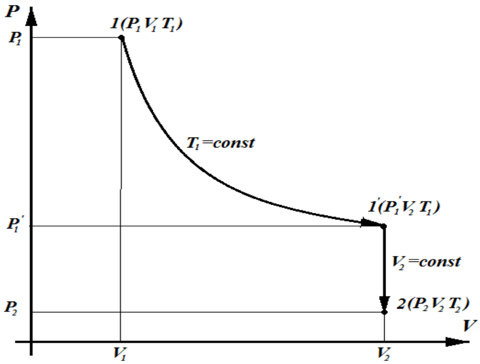


Рис. 6.4

Для першого процесу справедливий закон Бойля–Маріотта:

$$P_1V_1 = P_1'V_2.$$

Для другого процесу справедливий закон Шарля:

$$\frac{P_1'}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}.$$

З останньої формули випливає $P_1' = \frac{T_1}{T_2}P_2$. Підставимо цей вираз в перше рівняння і отримаємо: $P_1V_1 = \frac{T_1}{T_2}P_2V_2$ або:

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}. \qquad (6.9)$$

Часто це рівняння записують у вигляді:

$$\boxed{\frac{PV}{T} = \mathrm{const};} \quad (\text{якщо } m = \mathrm{const}). \qquad (6.10)$$

Це і є ***рівняння Клапейрона.*** Тут стала величина const залежить від природи газу і його маси.

Менделєєв записав це рівняння для 1 моля газу $\frac{PV_m}{T} = R,$ де V_m – ***молярний об’єм***; R має однакове значення для всіх ідеальних газів.

Цю величину називають ***універсальною газовою сталою***: $R = 8{,}31\ \text{Äæ/(ì î ëü}\cdot{}^{\circ}\text{Ê)}$. Оскільки $V = \nu \cdot V_m$, де ν – кількість речовини, то $PV = \nu \cdot R \cdot T$. Або можна записати:

$$\boxed{PV = \frac{m}{M} R \cdot T.} \tag{6.11}$$

Це і є ***рівняння стану ідеального газу Менделєєва–Клапейрона.*** Це досить важливе рівняння в теорії ідеальних газів, що пов'язує всі чотири основних термодинамічних параметри. Часто використовують також іншу форму рівняння стану ідеального газу, для чого вводять ***сталу Больцмана***:

$$k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \text{Äæ/}{}^{\circ}\text{Ê}.$$

Це також дуже важлива константа у фізиці, яка пов'язує енергію і температуру. Отже, $PV = \nu \cdot R \cdot T = \nu \cdot N_A \cdot k \cdot T$. Але $\nu \cdot N_A = N$ – число молекул газу. Також, якщо позначити через n концентрацію молекул в одиниці об'єму $n = N / V$, то отримаємо ще один вираз для ***рівняння стану ідеального газу***:

$$\boxed{P = nkT.} \tag{6.12}$$

Інтерактивна симуляція:
https://phet.colorado.edu/sims/html/as-properties/latest/gas-properties_/en.html

Контрольні питання

1. Що вивчає молекулярна фізика?
2. Термодинаміка. Які існують термодинамічні параметри?
3. Що таке кількість речовини? Молярна маса?
4. Як формулюють закон Авогадро?
5. Як формулюють закон Дальтона? Що таке парціальний тиск?
6. Які існують газові закони?
7. Що таке ідеальний газ?
8. Як записують рівняння Менделєєва–Клапейрона?

Література: [**1**, с. 65–70; **4**, с. 58–60]

Лекція 7.
Молекулярно-кінетична теорія газів. Внутрішня енергія ідеального газу

- **Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії**
- **Закон Больцмана про рівномірний розподіл енергії за ступенями вільності. Внутрішня енергія ідеального газу**

7.1. Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії

Основним методом молекулярно-кінетичної теорії газів є застосування статистичних закономірностей до великої кількості подібних мікроскопічних об'єктів – атомів і молекул ідеального газу з метою виявлення залежностей між мікроскопічними параметрами і макроскопічними параметрами. ***Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії*** встановлює такий зв'язок між середньою кінетичною енергією одного атома чи молекули і тиском ідеального газу.

Отримання цього рівняння докладно описано в п. 6.3. Ознайомимось з цим рівнянням і величинами, які туди входять. Рівняння записують у вигляді:

$$\boxed{P = \frac{1}{3} n \cdot m_o \cdot \left\langle \upsilon^2 \right\rangle = \frac{2}{3} n \left\langle \varepsilon_k \right\rangle,} \tag{7.1}$$

де P – тиск ідеального газу; m_0 – маса атома ідеального газу; $n = \dfrac{N}{V}$ – концентрація атомів газу в об'ємі V; $\left\langle \upsilon^2 \right\rangle = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} \upsilon_i^{\,2}$ – середній квадрат швидкостей атомів (N – кількість атомів, υ_i – швидкість i-го атома); $\left\langle \varepsilon_k \right\rangle = \dfrac{m_0 \cdot \left\langle \upsilon^2 \right\rangle}{2}$ – середня кінетична енергія руху атомів газу.

З мікроскопічної точки зору, тиск газу пропорційний концентрації атомів $n = N/V,$ від якої залежить кількість ударів в стінку посудини, та середній кінетичній енергії атомів:

$$\left\langle \varepsilon_k \right\rangle = \frac{m_0 \cdot \left\langle \upsilon^2 \right\rangle}{2},$$

від якої залежить сила кожного удару.

7.2. Закон Больцмана про рівномірний розподіл енергії за ступенями вільності. Внутрішня енергія ідеального газу

Рівняння стану ідеального газу $P = n \cdot k \cdot T$.

У цьому рівнянні $k = \dfrac{R}{N_A} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Äæ/$^\circ$Ê – ***стала Больцмана***). Тому, ми можемо прирівняти праві сторони рівняння стану і рівняння (7.1): $\dfrac{2}{3} n \langle \varepsilon_k \rangle = n \cdot k \cdot T$. Звідси, для середньої кінетичної енергії атомів отримуємо важливу формулу:

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{3}{2} k \cdot T. \tag{7.2}$$

Термодинамічна температура є мірою середньої кінетичної енергії хаотичного руху атомів.

Якщо взяти гази з різними масами атомів $\langle \varepsilon_k \rangle = \dfrac{m_0 \cdot \langle \upsilon^2 \rangle}{2}$, то оскільки за однакових температур кінетичні енергії однакові, то це означає що будуть різними $\langle \upsilon^2 \rangle$, а, відповідно, і швидкості атомів. Іншими словами, за однакової температури легші атоми мають рухатись швидше ніж важкі.

Розподіл Максвела – розподіл атомів газу за швидкостями руху: https://www.thephysicsaviary.com/Physics/Programs/Labs/Maxwell/ Distribution/

Інший висновок з формули (7.2), якщо $T \to 0^\circ$K то $\langle \varepsilon_k \rangle \to 0$. Цей висновок випливає з припущення що газ ідеальний. Але чим ближче температура наближається до нуля, тим більші відхилення від ідеальності будуть спостерігатися для газів. Проте, звичайно, кінетична енергія також буде зменшуватись[1, 4].

Формула (7.2) справедлива тільки для одноатомних ідеальних газів (інертних). Більшість газів складається з молекул, в склад яких входять кілька атомів. Для таких багатоатомних газів справедлива формула $\langle \varepsilon_k \rangle = \dfrac{i}{2} k \cdot T$. У цій формулі i – ***кількість ступенів вільності молекул*** газу.

Δ – ***Кількість ступенів вільності*** **дорівнює числу координат, необхідних щоб описати рух тіла.**

Наприклад, якщо тіло переміщується тільки вздовж прямої, достатньо однієї координати – $i = 1$. Це приклад одновимірного руху. Якщо тіло може рухатись на площині (наприклад, кулька котиться по столу), то потрібно 2 координати $(i = 2)$. Це приклад двовимірного руху. Якщо тіло рухається в просторі, то щоб визначити його положення потрібно 3 координати. Це тривимірний рух. Кількість ступенів вільності $i = 3$. Цей рух відповідає руху частинок одноатомних ідеальних газів.

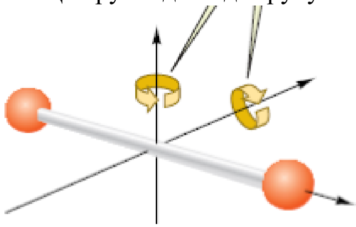


Рис. 7.1 – Великий момент інерції відносно двох осей

Для двохатомних ідеальних газів (O_2, H_2, N_2) потрібно 3 поступальних ступеня вільності і 2 обертальних (рис. 7.1), тобто всього 5 ступенів вільності $(i = 5)$. Взагалі, щоб описати обертальний рух тіла потрібно 3 кутових координати, які будуть відраховувати кут повороту відносно відповідної осі.

Для двохатомних молекул обертання навколо осі самої молекули має незначний момент інерції, на відміну від обертання навколо двох перпендикулярних осі молекули напрямків (див. рис. 7.1). Тому, обертальний рух навколо осі молекули майже не запасає енергію, тому його не враховують.

Для трьохатомних молекул (CO_2, H_2O) потрібно враховувати 3 поступальних і 3 обертальних ступені вільності, тому для них $i = 6$.

Слід відмітити, що атоми в молекулах не закріплені жорсткими зв'язками і можуть коливатись відносно своїх положень рівноваги. Такі коливальні рухи можливі за дуже високих температур – від 400 °C і вище. Це дає молекулі додаткові ***коливальні ступені вільності*** за таких температур.

Δ – З***акон Больцмана про рівномірний розподіл енергій за ступенями вільності молекул***:

– на кожний поступальний і обертальний ступінь вільності припадає в середньому кінетична енергія, що дорівнює $kT/2$, а на кожний коливальний ступінь вільності – в середньому енергія kT.

Коливальний ступінь має вдвоє більшу енергію тому, що на нього припадає не лише кінетична енергія, як у разі поступального і обертального руху, але і потенціальна енергія, причому середні значення кінетичної і потенціальної енергій однакові:

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \langle \varepsilon_p \rangle = \frac{k \cdot T}{2}.$$

Таким чином, середня енергія молекули:

$$\boxed{\left\langle \varepsilon_k \right\rangle = \frac{i}{2} k \cdot T,} \tag{7.3}$$

де $i = i_{\text{ïîñò}} + i_{\text{îáåðò}} + 2i_{\text{êîë}}$.

В ідеальному газі молекули не взаємодіють одна з одною за допомогою полів, тому взаємна потенціальна енергія взаємодії молекул дорівнює нулю. ***Внутрішня енергія*** U ідеального газу складається тільки з кінетичної енергії його молекул. Тому, якщо ідеальний газ містить в собі N молекул, кожна з яких має середню кінетичну енергію $\left\langle \varepsilon_k \right\rangle$, то внутрішня енергія буде:

$$U = N \cdot \left\langle \varepsilon_k \right\rangle = \frac{m}{M} \cdot N_A \cdot \left\langle \varepsilon_k \right\rangle = \frac{m}{M} \cdot N_A \cdot \frac{i}{2} \cdot k \cdot T.$$

Якщо згадати, що $k \cdot N_A = R$, то для ***внутрішньої енергії*** U отримуємо:

$$\boxed{U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R \cdot T.} \tag{7.4}$$

Внутрішня енергія ідеального газу залежить тільки від його температури. Оскільки для ідеального газу $\left\langle \varepsilon_k \right\rangle = \dfrac{m_0 \left\langle \upsilon^2 \right\rangle}{2} = \dfrac{i}{2} k \cdot T$, можна знайти середньоквадратичну швидкість молекул такого газу: $\upsilon_{\text{êâ}} = \sqrt{\left\langle \upsilon^2 \right\rangle}$. Отже, $\upsilon_{\text{êâ}} = \sqrt{\left\langle \upsilon^2 \right\rangle} = \sqrt{\dfrac{i \cdot k \cdot T}{m_0}} = \sqrt{\dfrac{i \cdot k \cdot T \cdot N_A}{m_0 \cdot N_A}} = \sqrt{\dfrac{i \cdot R \cdot T}{M}}$.

Так, за кімнатної температури молекули кисню мають середню квадратичну швидкість 480 м/с, молекули водню – 1900 м/с.

Контрольні питання

1. Як записують основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії?
2. Яке число степенів вільності мають різні молекули?
3. Як визначити середню кінетичну енергію руху атомів газу?
4. Як формулюється закон Больцмана про рівномірний розподіл енергії за ступенями вільності молекул?
5. Що таке внутрішня енергія ідеального газу?

Література: [**1**, с. 70–73, 77–80; **4**, с. 60–62]

Лекція 8.
Перше начало термодинаміки. Теплоємність

- **Перше начало термодинаміки**
- **Питома і молярна теплоємність**
- **Елементарна робота газу при зміні його об'єму**
- **Рівняння Майєра**
- **Адіабатний процес**

8.1. Перше начало термодинаміки

Змінити ***внутрішню енергію*** U ідеального газу можна двома способами: або нагріти газ, або виконати над газом певну роботу.

Δ – ***Процес теплообміну* – це передача частини внутрішньої енергії від більш нагрітого тіла до менш нагрітого.**

Δ – ***Кількість теплоти Q* – є мірою переданої при теплообміні внутрішньої енергії.**

Вимірюється кількість теплоти в системі СІ в одиницях енергії: $[Q]=$ Äæ.

Перше начало термодинаміки є відображенням закону збереження енергії.

Δ – ***Перше начало термодинаміки*: підведена до системи кількість теплоти δQ іде на збільшення її внутрішньої енергії dU і на здійснення системою роботи δA проти зовнішніх сил:**

$$\boxed{\delta Q = dU + \delta A.} \tag{8.1}$$

Правило знаків для цього рівняння

Внутрішня енергія dU – додатна величина, якщо вона збільшилась в результаті процесу (іншими словами, якщо температура системи зросла).

Кількість теплоти δQ – вважається величиною додатною, коли теплота підводиться до системи.

Робота δA – вважається додатною величиною, якщо термодинамічна система виконує її над зовнішніми тілами.

Примітка. Зміну величини в фізиці як і в математиці прийнято позначати символом Δ. Наприклад, $\Delta x = x_2 - x_1$. Якщо ця зміна нескінченно мала, то її називають диференціалом і позначають літерою d, тобто dx. В першому началі фігурують невеликі зміни величин, якщо можна так сказати – «порції». Тому ці невеликі «порції» і позначені символами диференціалів. Можна помітити, що біля ***внутрішньої енергії*** dU стоїть класична літера d. В фізиці прийнято так писати щоб підкреслити, що ***внутрішня енергія є функцією стану*** системи. Це є наслідком того, що внутрішня енергія залежить лише від температури системи (формула (7.4). Якщо ми переведемо систему із стану з температурою T_1 в стан з температурою T_2, то завжди $\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R(T_2 - T_1) = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R \cdot \Delta T$, або якщо зміна температури невелика, то $dU = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R \cdot dT$.

Кількість теплоти і робота залежать від процесу, за допомогою якого система була переведена із одного стану в інший. В подальшому будуть наведені залежності для роботи для різних ізопроцесів. Робота і кількість теплоти відрізняються для різних можливих переходів із початкового в кінцевий стан. Тому кажуть, що ***кількість теплоти і робота є функціями процесу***, що прийнято позначати символом δ.

Якщо термодинамічна система виконує певну роботу і періодично повертається до попереднього стану, як це відбувається в робочих машинах, то $dU = 0$, і в цьому випадку з першого начала термодинаміки випливає:

$$\delta Q = \delta A,$$

тобто робота, яка здійснюється системою дорівнює підведеній кількості теплоти, (а якщо є розсіювання теплоти внаслідок теплопровідності, випромінювання і подібних процесів, то робота буде меншою за підведену кількість теплоти) [1, 3]. Тому перше начало термодинаміки можна сформулювати також таким чином:

Δ – Неможливо побудувати періодично діючий двигун, який виконував би роботу без підведення енергії ззовні, або виконував би роботу більшу, ніж кількість переданої йому ззовні енергії.

Двигун, який виконує роботу без підведення енергії або виконує роботу, більшу за підведену до нього енергію, називають ***вічним двигуном першого роду***. Виходячи з першого начала термодинаміки можна стверджувати, що такий двигун неможливий.

Вічні двигуни першого роду:
https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=mf_perpetuum_mobile&l=ua

8.2. Питома і молярна теплоємність

Δ – *Питома теплоємність* c – це кількість теплоти, яку необхідно надати одиниці маси речовини для підвищення її температури на один градус:

$$c = \frac{\delta Q}{m \cdot dT}. \tag{8.2}$$

Одиниці вимірювання питомої теплоємності: $[c] =$ Äæ / (êã · °Ê).

Δ – *Молярна теплоємність* C^{μ} – це кількість теплоти, яку необхідно надати одному молю речовини для підвищення його температури на один градус.

$$C^{\mu} = \frac{\delta Q}{\mu \cdot dT}. \tag{8.3}$$

Одиниці вимірювання питомої теплоємності: $[C^{\mu}] =$ Äæ / (êã · °Ê). У цій формулі $\mu = \dfrac{m}{M}$ – кількість речовини. Якщо підставити цей вираз до формули (8.3), то отримаємо:

$$C^{\mu} = \frac{\delta Q}{\frac{m}{M} \cdot dT} = M \cdot \frac{\delta Q}{m \cdot dT}.$$

Між молярною теплоємністю C^{μ} та питомою c існує зв'язок:

$$C^{\mu} = M \cdot c. \tag{8.4}$$

Оскільки величина теплоємності газу залежить від умов, за яких йому надається теплота, то розрізняють теплоємності при сталому тиску C_P^{μ} і сталому об'ємі C_V^{μ}. (те саме справедливо і для питомих теплоємностей).

Нагрівання однакових мас різних речовин:
https://phet.colorado.edu/en/simulation/energy-forms-and-changes

8.3. Елементарна робота газу при зміні його об'єму

Знайдемо елементарну роботу δA газу при невеликій зміні його об'єму dV (рис. 8.1).

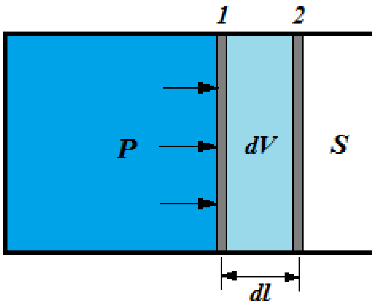


Рис. 8.1

Припустимо, що під дією тиску газу в циліндрі P поршень перемістився з положення 1 в положення 2 на відстань dl. Якщо площа поршня S, то з боку газу на нього буде діяти в напрямку руху сила F:

$$F = P \cdot S.$$

Якщо під дією цієї сили поршень перемістився на відстань dl, то ця сила виконає роботу:

$$\delta A = F \cdot dl = P \cdot S \cdot dl.$$

Як видно з рис. 8.1, $S \cdot dl = dV$, – ми отримали формулу для елементарної роботи газу при невеликій зміні його об'єму:

$$\boxed{\delta A = P \cdot dV.} \tag{8.5}$$

Виникає питання, наскільки невеликою має бути зміна об'єму dV в цій формулі? Відповідь проста: коли ми розраховували роботу сили на переміщенні dl, вважали силу, що діє на поршень, сталою величиною. Сила визначається тиском газу в циліндрі і площею поршня. Отже, для того, щоб припущення про незмінність сили вздовж переміщення було істинним, потрібно, щоб об'єм змінився мало порівняно з початковим об'ємом газу в циліндрі, щоб можна було знехтувати зміною тиску газу.

Якщо зміна об'єму досить велика і тиск в циліндрі суттєво змінюється, то роботу можна знайти за формулою:

ї

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \delta A = \int_{V_1}^{V_2} P \cdot dV. \tag{8.6}$$

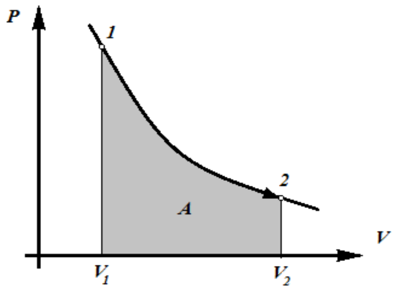


Рис. 8.2

Інтеграл в цій формулі означає суму елементарних робіт на відповідних елементарних змінах об'єму. Якщо зобразити залежність тиску від об'єму в координатах $P-V$, то робота буде дорівнювати площі фігури під графіком (рис. 8.2). На рисунку система переходить з першого положення в друге, тобто газ розширюється і виконує роботу. У цьому випадку робота буде додатною величиною. Якщо газ стискають, тобто роботу над системою виконують зовнішні сили (система переходить з другого положення в перше), то робота буде від'ємною.

Інтерактивна симуляція:
https://www.thephysicsaviary.com/Physics/Programs/Labs/GasInBox/

8.4. Рівняння Майєра

Якщо відбувається нагрівання $\mu = m/M$ молів речовини, то кількість теплоти можна визначити за формулою $\delta Q = \mu \cdot C^{\mu} \cdot dT$.

Розглянемо нагрівання 1 моля ідеального газу. З першого начала термодинаміки отримуємо:

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

або

$$C^{\mu} \cdot dT = dU + P \cdot dV.$$

Оскільки:

$$U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} R \cdot T,$$

то для одного моля:

$$dU = \frac{i}{2} \cdot R \cdot dT. \qquad (8.7)$$

Якщо нагрівання моля ідеального газу відбувається при сталому об'ємі, то $dV = 0$, тобто робота виконуватись не буде. Перше начало термодинаміки для 1 моля газу набуде вигляду:

$$C_V^{\mu} \cdot dT = dU = \frac{i}{2} \cdot R \cdot dT.$$

Звідки випливає формула для молярної теплоємності при сталому об’ємі:

$$\boxed{C_V^\mu = \frac{i}{2}R.} \tag{8.8}$$

Якщо нагрівання 1 моля газу відбувається за сталого тиску, то робота вже нульовою не буде. При нагріванні газу для забезпечення незмінності тиску газ має розширитись, тобто буде змінюватись об’єм і буде виконуватись робота. Тому перше начало термодинаміки для 1 моля газу можна записати у вигляді:

$$C_P^\mu \cdot dT = dU + P \cdot dV. \tag{8.9}$$

З рівняння стану Менделєєва–Клапейрона для 1 моля газу випливає:

$$P \cdot V = R \cdot T.$$

Беремо диференціал цієї формули з урахуванням що тиск сталий:

$$P \cdot dV = R \cdot dT.$$

У загальному випадку, коли змінюється і тиск, і об’єм, диференціал мав би вигляд $P \cdot dV + V \cdot dP = R \cdot dT.$ Підставимо цей вираз і вираз для внутрішньої енергії моля газу (формула (8.7)) у рівняння (8.9):

$$C_P^\mu \cdot dT = \frac{i}{2} \cdot R \cdot dT + R \cdot dT.$$

Звідки отримуємо

$$C_P^\mu = \frac{i}{2} \cdot R + R. \tag{8.10}$$

Для молярної теплоємності при сталому тиску C_P^μ, отримали вираз:

$$\boxed{C_P^\mu = \frac{i+2}{2} \cdot R.} \tag{8.11}$$

Також з формули (8.10) випливає зв’язок між молярними теплоємностями при сталому тиску і при сталому об’ємі – ***формула Майєра*:**

$$\boxed{C_P^\mu = C_V^\mu + R.} \tag{8.12}$$

Це рівняння вказує на те, що молярна теплоємність при сталому тиску C_P^μ більша за молярну теплоємність при сталому об'ємі C_V^μ на величину універсальної газової сталої R. Пояснюється це тим, що при нагріванні за сталого тиску частина тепла надана системі витрачається на виконання роботи проти зовнішніх сил, тому потрібно більше тепла для нагрівання газу за таких умов ніж при сталому об'ємі [1].

Значення теплоємності, розрахованої за формулами (8.8) і (8.11), непогано збігаються з експериментом для одно- і багатоатомних ідеальних газів, якщо їх температура незначно відрізняється від кімнатної.

Неповнота класичної теорії теплоємності. З формул (8.8) і (8.11) випливає, що теплоємності ідеальних газів визначаються тільки кількістю степенів вільності, тобто просторовою структурою молекул. Зокрема, для одноатомних газів (i = 3) випливає:

$$C_V^\mu = \frac{3}{2}R; \qquad C_P^\mu = \frac{5}{2}R.$$

Для двохатомних жорстких молекул (i = 5):

$$C_V^\mu = \frac{5}{2}R; \qquad C_P^\mu = \frac{7}{2}R.$$

Для багатоатомних жорстких молекул (i = 6):

$$C_V^\mu = 3R; \qquad C_P^\mu = 4R.$$

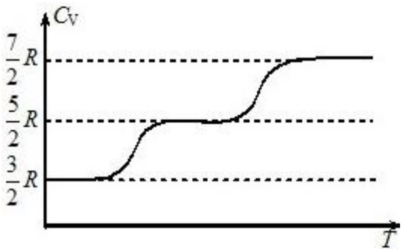


Рис. 8.3

Досліди свідчать, що такий прогноз більшою чи меншою мірою справджується тільки при не дуже низьких і не дуже високих температурах. Це ілюструє рис. 8.3, де схематично показано температурну залежність теплоємності C_V^μ водню H_2.(i = 5).

При проміжних температурах маємо очікуване для жорстких двохатомних молекул значення $C_V^\mu = \frac{5}{2}R$. Але при охолодженні газу теплоємність починає зменшуватись і при дуже низьких температурах набуває значення $C_V^\mu = \frac{3}{2}R$, яке притаманне одноатомному газу. Аналогічно, при значному нагріванні теплоємність зростає, наближаючись до величини $C_V^{\mu} = \frac{7}{2}R$ яка є характерною для двохатомних пружних молекул через підключення коливального ступеня вільності. Пояснити ці розбіжності класична фізика не здатна, оскільки вони пов'язані зі специфічними квантовими властивостями молекул та інших мікроскопічних частинок.

8.5. Адіабатний процес

Δ – ***Адіабатним називають процес*, який відбувається без обміну теплотою між термодинамічною системою і навколишнім середовищем** $(\delta Q = 0)$.

Термодинамічний процес можна вважати адіабатним, якщо:

– він відбувається в спеціальній термоізольованій оболонці;

– процес відбувається дуже швидко, тому теплообміном між системою і середовищем можна знехтувати;

– теплообмін не встигає відбутись внаслідок великих масштабів термодинамічного процесу.

Адіабатний процес описують ***рівнянням Пуассона***:

$$\boxed{P \cdot V^{\gamma} = \text{const},} \tag{8.13}$$

тут $\gamma = C_P^{\mu} / C_V^{\mu}$ – ***показник адіабати.***

Рівняння Пуассона можна записати у наступних формах:

– через температуру і об'єм $T \cdot V^{\gamma - 1} = \text{const}$;

– через температуру і тиск $\dfrac{T^{\gamma}}{P^{\gamma - 1}} = \text{const}$.

Всі ці рівняння рівнозначні і їх вибір залежить від конкретної задачі.

Показник адіабати можна також виразити через питомі теплоємності врахувавши залежність (8.4):

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V}.$$

Якщо ж врахувати співвідношення (8.8) та (8.11), то отримуємо вираз показника адіабати через кількість степенів вільності молекул газу:

$$\boxed{\gamma = \frac{i + 2}{i}.} \tag{8.14}$$

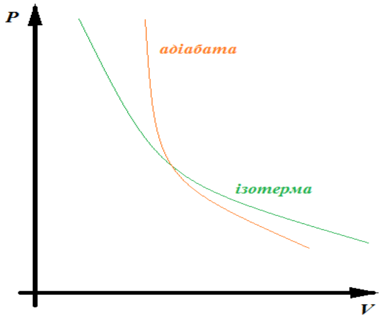


Рис. 8.4

Із останньої формули випливає, що завжди $\gamma > 1$. Через це графік адіабати буде мати вигляд (рис. 8.4):

$$P = \frac{\text{const}}{V^{\gamma}},$$

в координатах $P - V$ спадає більш швидко ніж графік ізотермічного процесу:

$$P = \frac{\text{const}}{V}.$$

Контрольні питання

1. Як формулюють перше начало термодинаміки?
2. Як визначають поняття кількості теплоти?
3. Що таке теплоємність, питома теплоємність та молярна теплоємність?
4. Як можна визначити роботу газу при зміні його об’єму?
5. Як записують рівняння Майєра?

Література: [**1**, с. 75–76, 80–86; **4**, с. 69–72]

Лекція 9.
Робота ідеального газу при ізопроцесах

- **Робота за різних ізопроцесів ідеального газу**
- **Ізохорний процес**
- **Ізобарний процес**
- **Ізотермічний процесс**
- **Адіабатний процес**

9.1. Робота за різних ізопроцесів ідеального газу

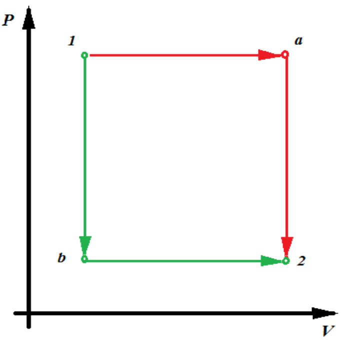


Рис. 9.1

Робота ідеального газу залежить не тільки від початкової і кінцевої точки стану термодинамічної системи, але і від процесу, який відбувався (рис. 9.1). Наприклад із стану з параметрами як в точці 1 можна перейти в стан 2 двома шляхами. Перший шлях через проміжну точку a: $1 \to a \to 2$: процес $1 \to a$ – ізобарний, процес $a \to 2$ – ізохорний. Можна зробити перехід і через точку b: процес $1 \to b$ – ізохорний, процес $b \to 2$ – ізобарний.

Робота дорівнює площі під графіком процесу в координатах $P - V$. Наприклад, для ізохорних процесів (графік вертикальна лінія, оскільки $V = \text{const}$) робота буде нульовою. Звичайно, що для процесу $1 \to a \to 2$ робота більша, ніж для процесу $1 \to b \to 2$.

У першому випадку нагрітий газ спочатку ізобарно розширився. Тиск ізобари $1 \to a$ був сталим і мав більше значення ніж для ізобари $b \to 2$. Тому і робота газу більша. Для процесу $1 \to b \to 2$ газ спочатку ізохорно охолов (тільки при охолоджені можливе зменшення тиску при сталому об'ємі). Потім холодний газ при сталому невисокому тиску ізобарно розширили до точки 2. Звичайно робота газу буде в цьому випадку невеликою.

Розглянемо роботу ідеального газу для різних відомих нам ізопроцесів ідеального газу (один параметр газу – сталий) і для адіабатного процесу.

9.2. Ізохорний процес

Ізохорний процес ($V = \text{const}$, ***закон Шарля*** $P / T = \text{const}$).

Якщо температуру записати в градусах Цельсія, то закон Шарля набуде вигляду:

$$P = P_0(1 + \alpha \cdot t^\circ \mathrm{C}),$$

де P_0 – це тиск газу за температури $t = 0^\circ\mathrm{C}$, $\alpha = \dfrac{1}{273}$.

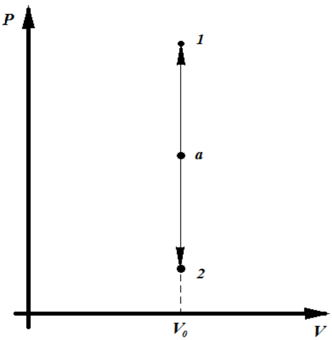


Рис. 9.2

Елементарна робота $\delta A = P \cdot dV$ для ізохорного процесу дорівнює нулю, тому що об'єм не міняється $dV = 0$. На рис. 9.2 зображені можливі ізохорні процеси: процес $a \to 1$ – ізохорне нагрівання; процес $a \to 2$ – ізохорне охолодження. Під час ізохорного процесу вся теплота іде на збільшення внутрішньої енергії газу, тому перше начало термодинаміки набуде вигляду:

$$\delta Q = dU.$$

Для 1 моля: $dU = C_V^{\mu} \cdot dT$.

Для μ моль: $dU = \dfrac{m}{M} \cdot C_V^{\mu} \cdot dT$.

Отже, ***робота ідеального газу для ізохорного процесу*** $A = 0$ $(V = \mathrm{const})$.

Ізохорний процес:
https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=mf_izochoricky_dej&l=ua

9.3. Ізобарний процес

Ізобарний процес $(P = \mathrm{const}$, ***закон Гей–Люссака*** $V / T = \mathrm{const})$.

Якщо температуру записати в градусах Цельсія, то закон Гей-Люссака набуде вигляду:

$$V = V_0(1 + \alpha \cdot t^\circ \mathrm{C}),$$

де V_0 – це об'єм газу за температури $t = 0^\circ\mathrm{C}$, $\alpha = \dfrac{1}{273}$.

Роботу при ізобарному процесі визначають формулою (8.6):

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \delta A = \int_{V_1}^{V_2} P \cdot dV.$$

Оскільки тиск сталий $P = P_0 = \text{const},$ то його можна винести за знак інтеграла. Для ізобарного процесу отримуємо:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \delta A = P_0 \cdot \int_{V_1}^{V_2} dV,$$

тобто, ***для ізобарного процесу робота***:

$$\boxed{A = P_0 \cdot (V_2 - V_1).} \qquad (9.1)$$

На рис. 9.3 зображений ізобарний процес $1 \to 2$. Це ізобарне розширення. Робота дорівнює площі прямокутника $V_1 \to 1 \to 2 \to V_2$, яка визначається формулою (9.1). Напишемо рівняння (9.1) по-іншому, використовуючи рівняння стану Менделєєва–Клапейрона:

$$A = \frac{m}{\mu} R \cdot (T_2 - T_1). \qquad (9.2)$$

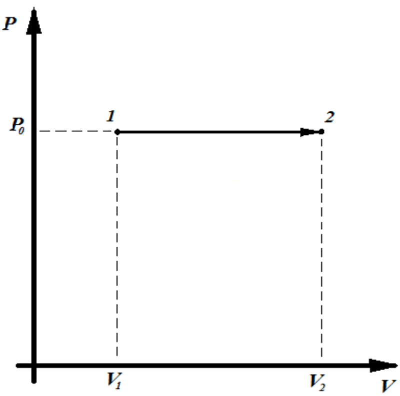


Рис. 9.3

З цього рівняння випливає фізичний зміст універсальної газової сталої R: якщо $T_2 - T_1 = 1^\circ\text{K},$ то для $\mu = \frac{m}{M} = 1$ ì îëü робота $A = R$, тобто:

Δ – ***Універсальна газова стала*** R **дорівнює роботі одного моля ідеального газу при ізобарному його розширенні якщо його нагріти на 1 градус.**

Перше начало термодинаміки $\delta Q = dU + \delta A$ для ізобарного процесу можна записати у вигляді:

Для одного моля: $C_P^\mu \cdot dT = C_V^\mu \cdot dT + P \cdot dV$ або

$$C_P^\mu \cdot dT = C_V^\mu \cdot dT + R \cdot dT$$

(останнє формула є ***рівнянням Майєра*** помноженим на dT).

Для ізобарного процесу є ще одна корисна залежність. Для внутрішньої енергії справедлива формула: $dU = \frac{i}{2}\frac{m}{M} R \cdot dT$. З рівняння стану Менделєєва–Клапейрона для ізобарного процесу:

$$P \cdot dV = \frac{m}{M} R \cdot dT,$$

але $P \cdot dV = \delta A$.

Порівнюючи ці співвідношення, для ***ізобарного процесу*** можна записати:

$$dU = \frac{i}{2} \delta A. \tag{9.3}$$

Ізобарний процес:
https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=mf_izobaricky_dej&l=ua

9.4. Ізотермічний процесс

Ізотермічний процес ($T = \text{const}$, ***закон Бойля–Маріотта*** $PV = \text{const}$).

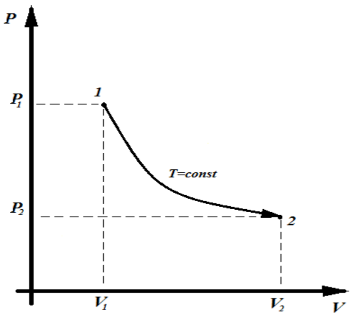


Рис. 9.4

Оскільки $dT = 0$, то внутрішня енергія не міняється $dU = 0$. Для ізотермічного процесу перше начало термодинаміки (рис. 9.4):

$$\delta Q = dU + \delta A$$

набуває вигляду $\delta Q = \delta A$.

Іншими словами, все тепло передане системі при ізотермічному процесі перетворюється на роботу.

Роботу при ізотермічному процесі визначають формулою (8.6):

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \delta A = \int_{V_1}^{V_2} P \cdot dV.$$

На відміну від попереднього ізобарного процесу тиск виносити за знак інтеграла не можна, тому що тиск є функцією об'єму для ізотермічного процесу: $P = P(V)$.

Вигляд цієї залежності можна знайти із рівняння стану ідеального газу:

$$P = \frac{m}{M}\frac{RT}{V}.$$

Підставимо це рівняння під знак інтеграла:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P \cdot dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M}\frac{RT}{V} \cdot dV = \frac{m}{M} R \cdot T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} R \cdot T \cdot \ln V \Big|_{V_1}^{V_2}.$$

$$\boxed{A = \frac{m}{M} RT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}.} \qquad (9.4)$$

Для ізотермічного процесу справедливим є співвідношення $P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$, звідки випливає:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}.$$

Для роботи ізотермічного процесу справедлива ще одна формула [1]:

$$\boxed{A = \frac{m}{M} R \cdot T \cdot \ln \frac{P_1}{P_2}.} \qquad (9.5)$$

Робота дорівнює площі криволінійної трапеції $V_1 \to 1 \to 2 \to V_2$ і визначається формулою (9.4) через об'єм або (9.5) через тиск.

Ізотермічний процес:
https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=mf_izotermicky_dej&l=ua

9.5. Адіабатний процес

Адіабатний процес ($\delta Q = 0$, ***закон Пуассона*** $PV^{\gamma} = \mathrm{const}$).

Оскільки $\delta Q = 0$, то для адіабатного процесу перше начало термодинаміки:

$$\delta Q = dU + \delta A$$

набуває вигляду $\delta A = -dU$. Тобто, термодинамічна система виконує роботу проти зовнішніх сил за рахунок своєї внутрішньої енергії.

Оскільки:

$$dU = \frac{i}{2}\frac{m}{M} R \cdot dT = \frac{m}{M} C_V^{\mu} \cdot dT,$$

то

$$A = \int_1^2 \delta A = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{M} C_V^{\mu} \cdot dT = -\frac{m}{M} C_V^{\mu} \int_{T_1}^{T_2} dT.$$

$$\boxed{A = \frac{m}{M} C_V^{\mu} (T_1 - T_2).} \qquad (9.6)$$

Графік адіабатного процесу подібний до графіка ізотермічного процесу (див. рис. 9.4). Але оскільки адіабата спадає швидше, то і площа (тобто робота) під графіком буде меншою ніж для ізотерми. Це пояснюється тим, що при адіабатному розширенні немає притоку теплоти ззовні і газ охолоджується. Для ізотермічного процесу температура підтримується сталою за рахунок підведеної ззовні кількості теплоти, тому і робота буде більшою.

Адіабатний процес:
https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=mf_adiabaticky_dej&l=ua

Контрольні питання

1. Як знаходять роботу ідеального газу для ізотермічного процесу?
2. Як знаходять роботу ідеального газу для ізобарного процесу?
3. Як знаходять роботу ідеального газу для ізохорного процесу?
4. Як знаходять роботу ідеального газу для адіабатного процесу?

Література: [**1**, с. 84–88; **4**, с. 69–72]

Лекція 10.
Теплові машини.
Ідеальна теплова машина. Цикл Карно

- **Кругові оборотні та необоротні процеси. Принцип дії теплової машини**
- **Теорема Карно. Ідеальна теплова машина**

10.1. Кругові оборотні та необоротні процеси. Принцип дії теплової машини

У термодинаміці часто використовують наступні види процесів, які необхідно розрізняти. Процес може бути ***круговим,*** а також ***оборотним*** і ***необоротним***. Крім того існують ***прямі*** і ***зворотні цикли.***

Δ – ***Круговим процесом* (*циклом*) називають процес, при якому система пройшовши через ряд проміжних станів, повертається у початковий стан** (рис. 10.1).

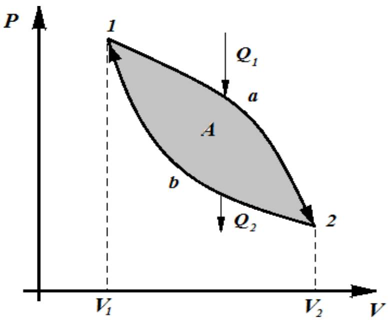


Рис. 10.1

Цикл, який виконує ідеальний газ, можна розбити на процеси розширення ($1 \rightarrow a \rightarrow 2$) і стискання ($2 \rightarrow b \rightarrow 1$). Робота розширення:

$$A_p = \int_1^2 P \cdot dV$$

дорівнює площі під верхньою кривою і додатна, цю роботу виконує газ над зовнішніми тілами. Робота стискання:

$$A_{\text{ñò}} = \int_2^1 P \cdot dV$$

дорівнює площі під нижньою кривою і від’ємна, вона виконується над газом зовнішніми тілами. Загальна робота термодинамічної системи за цикл буде визначатись як різниця роботи розширення і роботи стискання: $A = A_p - A_{ñò}$.

Як видно з рис. 10.1, робота газу за цикл буде дорівнювати площі самого циклу (виділена сірим кольором на рисунку).

Δ – *Прямим циклом* називають цикл, в якому термодинамічною системою виконується додатна робота $A > 0$.

При цьому цикл в координатах $P - V$ виконується за годинниковою стрілкою. Якщо здійснити цикл проти годинникової стрілки, то робота термодинамічної системи за цикл буде від'ємною $A < 0$ (рис. 10.2).

Δ – *Зворотним* називають цикл, якщо системою виконується від'ємна робота.

Інакше, над системою роботу виконують зовнішні сили.

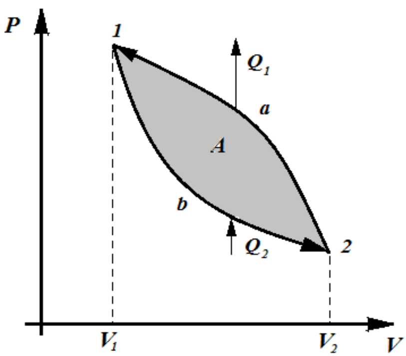


Рис. 10.2

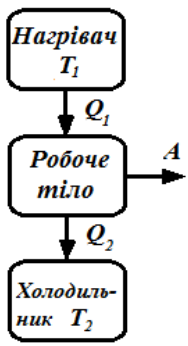


Рис. 10.3

Прямий цикл використовується в тепловій машині, в якій робоче тіло отримує енергію в формі теплоти Q_1 від зовнішніх джерел і частину цієї теплоти віддає оточуючому середовищу Q_2, а частину витрачає на виконання корисної роботи A (див. рис. 10.3):

$$A = Q_1 - Q_2. \qquad (10.1)$$

Коефіцієнт корисної дії теплової машини (**к.к.д.**) можна записати так:

$$\boxed{\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.} \qquad (10.2)$$

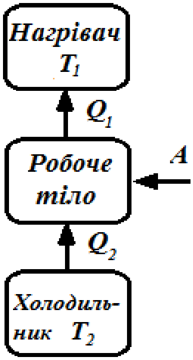


Рис. 10.4

Зворотний цикл використовується в холодильній машині (рис. 10.4), у якій робоче тіло за рахунок роботи зовнішніх сил відбирає у менш нагрітого тіла (***холодильника***) кількість теплоти Q_2 і віддає більш нагрітому тілу (***нагрівачу***) кількість теплоти $Q_1 = Q_2 + A$.

Ефективність холодильної машини характеризується її ***холодильним коефіцієнтом***, який дорівнює відношенню віднятої в холодильника кількості теплоти Q_2, до затраченої роботи A на приведення машини в дію:

$$\eta = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}. \tag{10.3}$$

З формули (10.2) випливає, що к.к.д. теплової машини [1]:

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

завжди менше 1. Холодильний коефіцієнт (10.3) може бути як більше, так і менше одиниці.

Щоб зрозуміти, як працюють теплові машини, потрібно пам'ятати наступне: ***якщо газ адіабатно стискається, то він нагрівається.*** Якщо процес не адіабатний, то з такого стиснутого газу буде виділятись тепло. ***Якщо газ розширюється, то він охолоджується.*** Якщо процес не адіабатний, то газ буде забирати тепло з навколишнього середовища охолоджуючи його (корисно переглянути симуляцію: https://www.thephysicsaviary.com/Physics/Programs/Labs/GasInBox/)

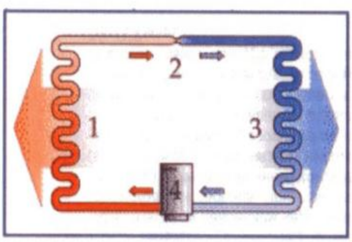


Рис. 10.5

Розглянемо прямий цикл (рис. 10.1). Робоче тіло (газ) розширюється по верхній кривій. Йому надали кількість теплоти Q_1, тому він розширюється нагрітим. Під час свого розширення газ виконує роботу, наприклад штовхає поршень двигуна. В кінцевій точці свого розширення газ буде мати мінімальну температуру. Охолоджений газ легше стиснути (нижня крива, рис. 10.1).

У будь-якому випадку, під час стискання газ буде нагріватись і деяка кількість теплоти Q_2 виділиться під час цього процесу (в реальних двигунах часто робочий газ не стискають а просто випускають назовні). У холодильній машині навпаки, газ стискають нагрітим (див. рис. 10.2), при цьому з газу виділяється велика кількість теплоти Q_1, розширюється газ холодним. Під час розширення газ охолоджується і вбирає в себе з оточуючого середовища кількість теплоти Q_2. Розглянемо роботу холодильної машини більш докладно. Схематично холодильна машина зображена на рис. 10.5 та 10.6. Найпростіший одноконтурний холодильник складається з чотирьох головних частин (рис. 10.5): 1) конденсатор (радіатор); 2) дросель (або капілярна трубка); 3) випарник (трубка великого діаметра, знаходиться в морозильній камері); 4) компресор.

Рис. 10.6

До цього переліку слід додати робоче тіло – газ, який циркулює в системі. Місцезнаходження всіх згаданих компонентів можна побачити на рис. 10.6.

Принцип роботи холодильної машини наступний. Компресор 4 накачує робоче тіло в конденсатор (радіатор). Завдяки дроселю (капілярна трубка) тиск в радіаторі збільшується (крива $2 \to a \to 1$, рис. 10.2). Дросель – це вузьке місце в системі циркуляції робочого тіла, тому тиск до дроселя в радіаторі звичайно вищий, ніж тиск за дроселем в випарнику (або морозильній камері). Під час такого стискання з робочого тіла «видавлюється» кількість теплоти Q_1, яка нагріває радіатор до температур вище кімнатної. Робоче тіло віддає тепло оточуючому середовищу (радіатор або конденсатор розміщують назовні холодильника за задньою стінкою, рис. 10.6).

Після вузького місця в системі (дроселя) газ потрапляє в морозильну камеру (випарник). Компресор постійно відкачує газ з нього, крім того трубки випарника ширші за трубки радіатора, тому там створюється зона пониженого тиску. Газ розширюється у випарнику і охолоджується, «вбираючи» в себе тепло Q_2 з морозильної камери (крива $1 \rightarrow b \rightarrow 2,$ рис. 10.2). Звичайно, за рис. 10.4, кількість теплоти, яку холодильник віддає нагрівачу (кімнаті) більша за кількість теплоти відібраної в морозильній камері на величину роботи, виконаної компресором. Для холодильної машини: $Q_1 = Q_2 + A$.

Слід ще відмітити, що для підвищення ефективності холодильної машини в якості робочого тіла використовують спеціальні гази. Наприклад – фреон. Такий газ при стисканні не просто нагрівається, він ще і конденсується в рідину, віддаючи при цьому ще додаткову теплоту конденсації радіатору (конденсатору). Розширюючись в морозильній камері (випарник) рідина за низького тиску випаровується, відбираючи додаткову кількість теплоти на випаровування. В сучасних холодильниках не використовують фреон, а інші спеціальні екологічно не шкідливі гази, які не руйнують озоновий шар Землі.

За даною схемою працюють також інші корисні прилади, такі як кондиціонери і теплові насоси. Якщо радіатор розмістити назовні будинку а випарник всередині оселі, то ми отримаємо простий кондиціонер.

Робота холодильної машини:

https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=mf_lednicka&l=ua

Розглянемо оборотні і необоротні термодинамічні процеси.

Δ – *Термодинамічний процес називають оборотним,* якщо цей процес відбувшись у прямому а потім у зворотному напрямку, проходить через ті самі проміжні стани і система повертається в початковий стан.

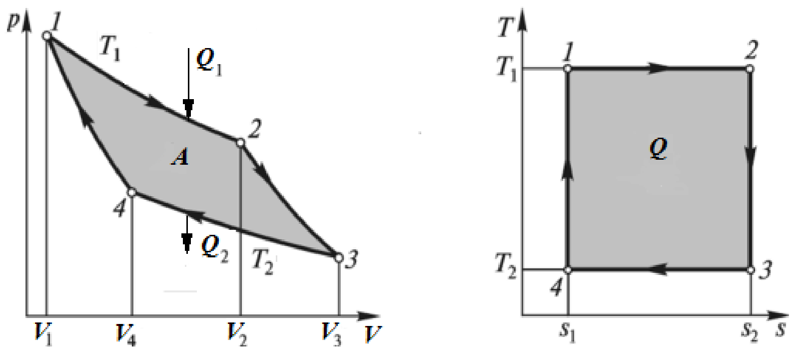
Оборотні термодинамічні процеси є ідеалізацією, але її зручно використовувати для моделювання реальних процесів, які всі є ***необоротними.*** Всі реальні процеси протікають з розсіюванням енергії на такі «незворотні» процеси як – теплопередача, випромінювання, тертя та ін. Тому, термодинамічну систему якщо і можна повернути у початковий стан, то не через ті самі проміжні стани. Крім того, оборотні термодинамічні процеси мають відбуватись так, щоб в кожен момент часу газ знаходився в стані термодинамічної рівноваги. Якщо параметри змінюються стрибкоподібно або дуже швидко, так що не встигає встановитись рівноважний стан термодинамічної системи, то такий процес знову ж таки неможливо перевести в початковий стан через ті самі проміжні стани. Те ж стосується втрат тепла внаслідок теплопровідності або тертя – неможливо повернути всю теплоту назад від іншого тіла повертаючи систему в початковий стан через ті самі проміжні стани.

Оборотні термодинамічні процеси – це процеси, що відбуваються без незворотних втрат енергії і рівноважно.

Оборотні процеси є ідеалізацією, яка дозволяє з одного боку спростити теорію, а з іншого, – відкинути ефекти, величиною яких часто можна знехтувати в реальних процесах. Оборотні термодинамічні процеси досліджуються теоретично, що дає змогу робити оцінки і розрахунки для реальних необоротних процесів, за умови що розсіювання енергії в них незначне.

У розвитку термодинаміки велике значення мало дослідження спеціального оборотного циклу, циклу Карно. На початку XIX ст. значний інтерес становили питання вдосконалення теплових машин. Одним з найважливіших було питання про межу ефективності таких машин, або як збільшити к.к.д. теплової машини і від чого він залежить. Також окремо поставало питання про переваги тих чи інших робочих тіл. Ці проблеми і хотів розв'язати С. Карно у своїй праці «Міркування про рушійну силу вогню та про машини, здатні розвивати цю силу».

Потрібно було пов'язати різні циклічні процеси переходу теплоти від нагрітого тіла до холодного з кількістю виконаної при такому переході роботи і знайти оптимальний процес. Це було зроблено за допомогою ***циклу Карно***, який є оборотним. Він складається з двох адіабатних та двох ізотермічних процесів (рис. 10.7). На рис. 10.7, *а* цикл Карно наведено в координатах $P-V$, на рис. 10.7, *б* – в координатах $T-S$ (температура–ентропія).



а *б*

Рис. 10.7 – Цикл Карно

10.2. Теорема Карно. Ідеальна теплова машина

Цикл Карно – це цикл ідеальної теплової машини. В такій машині нема необоротних втрат теплоти на теплопровідність, теплове випромінювання, тертя та інші. Тому такий цикл є оборотним.

У процесі ізотермічного розширення $1 \to 2$ робоче тіло перебуває в тепловому контакті з нагрівачем при температурі T_1. Розширюючись, робоче тіло виконує роботу розширення $A_{ð}$ і поглинає певну кількість теплоти від нагрівача Q_1. Ізотермічний процес досить вигідний для перетворення теплоти в роботу. Дійсно, з першого начала термодинаміки $\delta Q = dU + \delta A$ випливає, що оскільки при ізотермічному процесі внутрішня енергія не міняється $dU = 0$ (оскільки не міняється температура газу), то $\delta Q = \delta A$, тобто вся надана тілу теплота перетворюється в роботу. Іншими словами, для ізотерми $1 \to 2$:

$$Q_1 = A_{ð}. \qquad (10.4)$$

Далі використовують адіабатний процес $2 \to 3$ – також досить вигідний процес. Тепло не підводиться, але газ виконує роботу за рахунок зменшення своєї внутрішньої енергії $(\delta Q = 0$, з першого начала термодинаміки $\delta A = -dU)$. Оскільки внутрішня енергія зменшується, то температура газу падає від температури нагрівача T_1 до температури холодильника T_2, що і потрібно, тому що охолоджений газ можна легко стиснути до початкового стану.

Для стискання робочого тіла використовується ізотермічний процес $3 \to 4$, який відбувається за температури холодильника T_2. При цьому виділяється певна кількість теплоти Q_2, яка передається холодильнику. Над газом виконується від'ємна робота стискання $A_{cò}$, причому як і для будь-якого ізотермічного процесу:

$$Q_2 = A_{ñò}. \qquad (10.5)$$

Завершує процес стискання адіабата $4 \to 1$. Газ стискають адіабатно, що вимагає виконання деякої роботи стискання. Що цікаво, як випливає з формули (9.6) для роботи газу в адіабатному процесі, ця робота залежить лише від початкової і кінцевої температури газу:

$$A = \frac{m}{M} C_V^{\mu} (T_1 - T_2).$$

Тому робота розширення в адіабатному процесі $2 \rightarrow 3$ (яка дорівнює площі під цією кривою), дорівнює за модулем але протилежна за знаком роботі адіабатного стискання $4 \rightarrow 1$. Тому, корисна робота за цикл:

$$A = Q_1 - Q_2 = A_{р} - A_{ст}, \tag{10.6}$$

і ця робота дорівнює площі циклу (в координатах $P - V$, рис. 10.7 *а*).

Для коефіцієнта корисної дії теплової машини Карно з формули (10.2) отримуємо:

$$\boxed{\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A_{р} - A_{ст}}{A_{р}}.} \tag{10.7}$$

Для коефіцієнта корисної дії машини, що працює за циклом Карно, можна також довести справедливість наступної формули (п. 9.2 лекцій ХНУ):

$$\boxed{\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.} \tag{10.8}$$

Слід відмітити, що для реальних теплових машин, де є розсіювання теплоти (тобто працюють за необоротним циклом) коефіцієнт корисної дії не може бути більшим, ніж для ідеальної теплової машини Карно:

$$\boxed{\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}} \tag{10.9}$$

(вираз к.к.д. через температуру нагрівача і холодильника справедливий тільки для ідеальної теплової машини, вираз через кількість теплоти – справедливий завжди для будь-якого оборотного циклу).

Карно довів наступну теорему:

Δ – ***Теорема Карно*: із всіх періодично діючих теплових машин найбільший коефіцієнт корисної дії мають машини, що працюють за оборотним термодинамічним циклом Карно, при цьому *коефіцієнт корисної дії залежить тільки від температури нагрівача і холодильника.***

Цикл Карно:

https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=mf_carnot&l=ua

Парова машина:
https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=mf_parnistroj&l=ua

Контрольні питання

1. Термодинамічний процес. Що таке прямі і зворотні цикли?
2. Яка різниця між оборотними і необоротними термодинамічними процесами?
3. Як визначити коефіцієнт корисної дії теплової машини?
4. Який принцип роботи у холодильних машин?
5. Що таке цикл Карно?

Література: [**1**, с. 100–104; **4**, с. 85–88]

Лекція 11.
Ентропія. Друге начало термодинаміки

- **Обчислення ентропії ідеального газу. Визначення другого начала термодинаміки**
- **Зміна ентропії в процесах ідеального газу**
- **Вільна енергія. Ентальпія**

11.1. Обчислення ентропії ідеального газу. Визначення другого начала термодинаміки

Для циклу Карно було виведено співвідношення (10.8):

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

звідки випливає:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}. \tag{11.1}$$

Δ – *Приведеною кількістю теплоти* називають відношення кількості теплоти *Q*, отриманої робочим тілом при ізотермічному процесі, до величини температури процесу *T*.

Оскільки для адіабатних процесів $Q = 0,$ то для циклу Карно (враховуючи що Q_2 віддається робочим тілом, тому $Q_2 < 0)$ з рівняння (11.1) випливає:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0. \tag{11.2}$$

Інакше, **приведена кількість теплоти для *оборотного циклу* дорівнює 0.**

Для елементарного циклу ***приведена кількість теплоти*** буде $\delta Q / T$.

Виявляється, що не тільки для циклу Карно, але і для довільного ***оборотного*** циклу повна ***приведена кількість теплоти*** за цикл буде дорівнювати нулю:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0. \tag{11.3}$$

Це означає, що під інтегралом стоїть диференціал деякої функції стану системи. Тобто, якщо ми почали цикл з початкової точки і пройшли цілий ряд проміжних станів і повернулись в вихідну точку, і порахували при цьому елементарні приведені кількості теплоти і додали їх (що і означає формула (11.3)), то така сума буде дорівнювати 0. Причому це не залежить від того який був цикл, головне щоб всі процеси були оборотні. Тобто, функція під інтегралом від процесу не залежить, а тільки від стану системи. Раніше ми стикались з такою функцією – це внутрішня енергія системи. Внутрішня енергія залежить тільки від температури системи, тому як би ми не змінювали її під час циклу, сума цих невеликих змін вздовж всього циклу буде нульовою, якщо ми повернемось в вихідну точку [1, 7].

$$\oint dU = 0.$$

Δ – **Функцію стану, диференціал якої дорівнює елементарній приведеній кількості теплоти, називають *ентропією*:**

$$\boxed{dS = \frac{\delta Q}{T}.} \tag{11.4}$$

Ентропія в системі СІ: $[S] =$ Äæ / °K.

Ентропію S визначають за формулою (11.4) з точністю до деякої сталої величини, але фізичний зміст має зміна ентропії під час термодинамічного процесу. Якщо система переходить із стану 1 в стан 2, то зміну ентропії в цьому процесі визначають за формулою:

$$\Delta S = \int_1^2 dS = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \tag{11.5}$$

Як випливає із формули (11.5), ***ентропія величина адитивна***, тобто, якщо зміна ентропії першої частинки термодинамічної системи ΔS_1, другої – ΔS_2 і т.д., то зміна ентропії системи визначатиметься формулою:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots + \Delta S_N. \tag{11.6}$$

З формули (11.3) випливає, що для оборотного циклу $\Delta S = 0$. Можна довести (п. 9.3 лекції 9), що для необоротного циклу $\Delta S > 0$ ентропія зростає. Крім того, для необоротного процесу справедлива формула:

$$\Delta S > \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

Δ – ***Друге начало термодинаміки (закон зростання ентропії) – ентропія ізольованої системи може або зростати, або лишатись незмінною.***

$$\boxed{\Delta S \geq 0.} \tag{11.7}$$

Перше начало термодинаміки є законом збереження енергії і не показує в якому напрямку можуть протікати ті чи інші процеси. Другий закон встановлює напрям розвитку термодинамічних процесів. Наприклад, передача теплоти від більш холодного тіла до більш нагрітого не суперечить першому началу термодинаміки як і передача в зворотному напрямку. Головне щоб ці кількості теплоти були однакові. Але самовільна передача тепла від холодного до гарячого тіла буде суперечити другому началу термодинаміки.

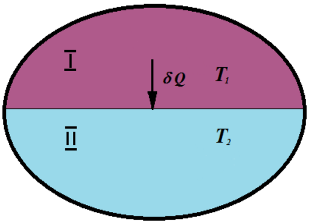


Рис. 11.1

Розглянемо приклад: нехай термодинамічна система складається з двох частин, які знаходяться при різних температурах (рис. 11.1), причому $T_1 > T_2$. В силу адитивності ентропії (формула (11.6) для зміни ентропії системи можна записати:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2. \tag{11.8}$$

Зміна ентропії першої частини:

$$\Delta S_1 = -\frac{\delta Q}{T_1}.$$

Знак «мінус» перед δQ враховує те, що перша частинка термодинамічної системи тепло віддає. Друга частина це тепло приймає, причому в тій самій кількості, тому:

$$\Delta S_2 = \frac{\delta Q}{T_2}.$$

Підставимо ці вирази у формулу (11.8):

$$\Delta S = \frac{\delta Q}{T_2} - \frac{\delta Q}{T_1} = \delta Q\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right). \tag{11.9}$$

Якщо $T_1 > T_2$, то як видно з (11.9) $\Delta S > 0$, тобто такий процес не суперечить другому началу. Якщо ж навпаки, припустити що $T_2 > T_1$, тобто тепло передається від менш нагрітого до більш нагрітого тіла, то зміна ентропії була б меншою нуля $\Delta S < 0$, що суперечить другому началу термодинаміки. В цьому прикладі ми бачимо, що проста передача теплоти від більш нагрітого до менш нагрітого тіла внаслідок теплопровідності є процесом необоротним, ентропія системи зросла. Неможливо перевести систему в початковий стан і відібрати тепло назад. Щоб повернути систему в початковий стан потрібно втручання зовнішніх чинників.

Одним з перших формулювань ***другого начала термодинаміки*** було формулювання Клаузіуса:

Δ – **Теплота ніколи не може переходити сама собою від тіл з меншою температурою до тіл з більшою температурою.**

Гіпотетичний прилад в якому здійснювався би такий перехід теплоти називається ***вічним двигуном другого роду.*** Такий прилад не суперечить першому началу термодинаміки, але його існування заперечує друге начало.

11.2. Зміна ентропії в процесах ідеального газу

Знайдемо зміну ентропії в термодинамічних процесах ідеального газу. Для цього в рівнянні (11.5) виразимо кількість теплоти за першим началом термодинаміки:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T}. \tag{11.10}$$

У свою чергу:

$$dU = \frac{i}{2}\frac{m}{M} R \cdot dT.$$

Також

$$\delta A = P \cdot dV = \frac{m}{M}\frac{R \cdot T}{V} dV.$$

Підставимо ці вирази у формулу (11.10) і отримаємо:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dU}{T} + \int_1^2 \frac{\delta A}{T} = \frac{i}{2}\frac{m}{M} R \int_1^2 \frac{dT}{T} + \frac{m}{M} R \int_1^2 \frac{dV}{V}$$

або:

$$\boxed{\Delta S = \frac{m}{M} C_V^{\mu} \ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{M} R \ln\frac{V_2}{V_1}.} \tag{11.11}$$

Для адіабатного оборотного процесу $\delta Q = 0,$ за формулою (11.10) $\Delta S = 0,$ тому адіабатний процес називають ***ізоентропійним***.

***Деякі корисні формули для розрахунку зміни ентропії під час фазових переходів*:**

– при переході з твердого у рідкий стан:

$$\Delta S = \int_{T\hat{a}}^{\text{Ð}} \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T}\int_{T\hat{a}}^{\text{Ð}} \delta Q = \frac{\lambda m}{T_{\ddot{\imath}\ddot{e}}}, \tag{11.12}$$

де $T_{\ddot{\imath}\ddot{e}}$ – температура плавлення; λ – питома теплота плавлення; m – маса речовини;

– якщо нагрівається тверде тіло чи рідина:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m \cdot c \cdot dT}{T} = m \cdot c \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = m \cdot c \ln \frac{T_2}{T_1}, \tag{11.13}$$

де c – питома теплоємність речовини;

– під час переходу з рідкого в газоподібний стан:

$$\Delta S = \int_{\text{Ð}}^{\tilde{A}} \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T}\int_{\text{Ð}}^{\tilde{A}} \delta Q = \frac{r \cdot m}{T_{\hat{e}\grave{e}\ddot{\imath}}}, \tag{11.14}$$

де $T_{\hat{e}\grave{e}\ddot{\imath}}$ – температура кипіння; r – питома теплота кипіння.

11.3. Вільна енергія. Ентальпія

Для оборотних процесів перше начало термодинаміки можна подати у такій формі:

$$T \cdot dS = dU + dA. \tag{11.15}$$

Для роботи термодинамічного процесу маємо:

$$dA = -(dU - T \cdot dS) \tag{11.16}$$

або

$$dA = -d(U - T \cdot S) - S \cdot dT. \tag{11.17}$$

Тут використовується формула диференціала добутку функцій $d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du.$

Величину

$$F = U - T \cdot S. \tag{11.18}$$

називають ***вільною енергією***.

Рівність (11.17) можна подати таким чином:

$$dA = -dF - S \cdot dT. \tag{11.19}$$

Якщо у системі відбувається ізотермічний процес, то $dT = 0$ і рівність (11.19) матиме вигляд:

$$dA = -dF. \tag{11.20}$$

Таким чином, ***вільна енергія дорівнює роботі системи при ізотермічному процесі***.

З рівності (11.18) маємо:

$$T \cdot S = U - F. \tag{11.21}$$

Величину $T \cdot S$ називають ***зв'язаною енергією***, вона є тією частиною внутрішньої енергії системи, яка не може бути переведена у роботу при ізотермічному процесі.

У теплотехніці часто використовують ще одну функцію стану термодинамічної системи, яку називають ***ентальпією*** – H (або ***теплова функція***).

Перше начало термодинаміки можна записати у вигляді:

$$dQ = dU + pdV = d(U + pV) - Vdp = dH - Vdp. \tag{11.22}$$

Ентальпію визначають за формулою:

$$H = U + pV. \tag{11.23}$$

Як видно з формули (11.22): ***ентальпія*** **–** це теплота підведена до термодинамічної системи в ізобарному процесі.

Контрольні питання

1. Як визначають ентропію термодинамічної системи?
2. Як формулюється друге начало термодинаміки?
3. Що таке приведена кількість теплоти?
4. Як визначити зміну ентропії в процесах ідеального газу?
5. Що таке вільна енергія, ентальпія?

Література: [**1**, с. 104–112; **4**, с. 89–95]

Частина 3.

ЕЛЕКТРОСТАТИКА

Лекція 12.
Закон Кулона.
Закон збереження електричних зарядів

- **Електричний заряд. Закон збереження електричних зарядів**
- **Закон Кулона**
- **Напруженість електричного поля**

12.1. Електричний заряд. Закон збереження електричних зарядів

У природі існує два типи електричних зарядів – позитивні і негативні. Однойменні заряди відштовхуються, а різнойменні – притягуються. Носієм найменшого електричного від'ємного заряду в природі є електрон, позитивного – протон. Заряд електрона дорівнює $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Êë.

Заряд протона має таке саме значення тільки із знаком «плюс». Одиницею електричного заряду є ***кулон***: $[q] =$ Êë.

Δ – ***Один кулон*** **– заряд, що проходить через поперечний переріз провідника, в якому сила струму 1 А за час 1 секунду.**

Δ – ***Закон збереження заряду*****: в ізольованій системі повна алгебраїчна сума електричних зарядів лишається незмінною.**

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = \text{const}.$$

Електричні заряди породжують навколо себе ***електричне поле***.

Δ – ***Електричне поле*** **– вид матерії, який існує навколо електричних зарядів і за допомогою якого передається електрична взаємодія.**

Δ – Поле нерухомих зарядів називають ***електростатичним.***

Δ – ***Електростатика*** **– розділ фізики, який вивчає взаємодію нерухомих в певній системі відліку зарядів, а також властивості електростатичних полів.**

12.2. Закон Кулона

У 1785 р. французький вчений Кулон експериментально встановив основний закон взаємодії точкових електричних зарядів. Для цього він використовував крутильні ваги (рис. 12.1).

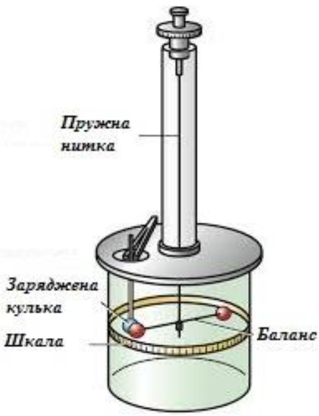


Рис. 12.1

До пружної нитки прикріплено легке, виготовлене з ізоляційного матеріалу коромисло. На одному кінці прикріплена мала заряджена кулька, до іншого – рівний за масою баланс. Через отвір в кришці вносилась інша заряджена кулька, яка взаємодіяла з першою. Внаслідок цього, нитка закручувалась на певний кут, який можна було визначити за шкалою, а вже з величини кута закручування визначали силу взаємодії. Важливим моментом є те, що закон встановлений для точкових зарядів.

Δ – ***Точковим*** **називають заряд, який зосереджений на тілі, лінійні розміри якого малі порівняно з відстанню до інших заряджених тіл з якими він взаємодіє.**

Δ – ***Закон Кулона*****: сила електростатичної взаємодії між двома точковими електричними зарядами прямо пропорційна до добутку величин зарядів, обернено пропорційна квадрату відстані між ними і напрямлена по лінії центрів.**

$$\boxed{F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2},} \qquad (12.1)$$

де $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Êë^2 / (Í ·ì) – ***електрична стала***.

Діелектрична проникність речовини ε показує, наскільки сила взаємодії зарядів в вакуумі F_0 більша за силу взаємодії цих зарядів F на тій самій відстані у речовині:

$$\varepsilon = \frac{F_0}{F}.$$

Для вакууму $\varepsilon = 1$, для повітря $\varepsilon \approx 1$, для решти речовин $\varepsilon > 1$.

Часто також цю формулу записують у вигляді:

$$F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2},$$

де $k = \dfrac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon}$. Для вакууму $\varepsilon = 1$, $k = 9 \cdot 10^9$ Í ·ì^2 / Êë^2.

Якщо заряди мають однаковий знак, то сила взаємодії $F > 0$, це сила відштовхування, якщо ж заряди мають протилежний знак, то $F < 0$, це сила притягання (рис. 12.2). Звичайно, за третім законом Ньютона $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right|$.

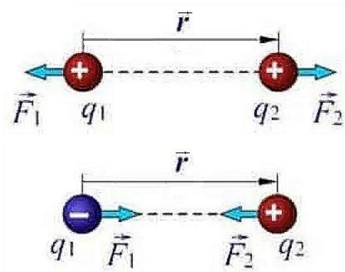


Рис. 12.2

Закон Кулона можна записати у векторній формі. Для сили, що діє збоку першого заряду на другий $\vec{F}_2$ справедлива формула (12.2) (в подальшому будемо позначати цю силу просто $\vec{F}$.

Якщо цікавить сила, що діє збоку другого заряду на перший $\vec{F}_1$ потрібно провести вектор $\vec{r}$ в протилежний бік – від другого заряду до першого).

$$\boxed{\vec{F} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.} \qquad (12.2)$$

У цій формулі $\vec{r} / r$ – просто одиничний вектор, що задає напрям сили $\vec{F}$.

12.3. Напруженість електричного поля

Щоби охарактеризувати електричне поле в кожній точці простору вводять дві величини: ***напруженість електростатичного поля*** $\vec{E}$ (векторна величина) і ***потенціал електростатичного поля*** φ (скалярна величина). Напруженість електростатичного поля – це силова характеристика, потенціал – енергетична характеристика поля.

Електростатичні поля виникають навколо зарядів і взаємодіють із зарядами. Тому для дослідження електростатичних полів використовують пробний точковий позитивний заряд q_0. Величина цього заряду має бути настільки малою, щоб своїм полем помітно не збурити досліджуване поле. Розглянемо довільний заряд q, поле якого потрібно дослідити (рис. 12.3).

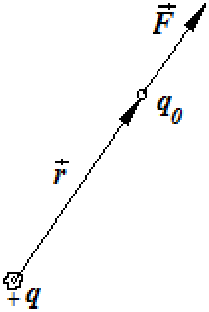


Рис. 12.3

Для цього внесемо в поле невеликий позитивний точковий заряд q_0 і розглянемо силу $\vec{F}$, яка діє на цей заряд (формула для сили справедлива для точкових зарядів, або заряджених тіл сферичної форми):

$$\vec{F} = \frac{q \cdot q_0}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

Ця сила залежить не тільки від досліджуваного заряду q, але й від величини пробного заряду q_0.

Відношення цієї сили до величини пробного заряду не залежатиме від його величини і буде характеризувати поле самого досліджуваного заряду q.

Δ – ***Напруженість електричного поля*** $\vec{E}$ **в певній точці дорівнює відношенню сили, що діє на пробний позитивний точковий заряд поміщений в цю точку поля, до величини цього заряду.**

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}.} \tag{12.3}$$

Напруженість поля є векторною величиною.

Для ***поля точкового заряду***:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r},} \tag{12.4}$$

або для абсолютної величини напруженості поля точкового заряду q :

$$\boxed{E = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}.} \tag{12.5}$$

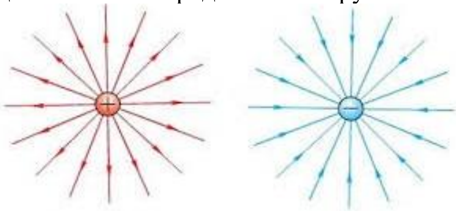
Вимірюється напруженість електричного поля, як випливає з формули (12.3) в «ньютонах/кулон». Але у фізиці і техніці таку одиницю вимірювання майже ніколи не використовують, а вимірюють напруженість у вольтах, поділених на метр (В/м): $[E] = \frac{\text{I}}{\text{Êë}} = \frac{\text{A}}{\text{ì}}$.

Якщо відома напруженість електричного поля в будь-якій точці простору, то можна легко визначити силу, що діє з боку цього поля на пробний заряд q_0 (за визначенням формули (12.3)):

$$\boxed{\vec{F} = q_0 \cdot \vec{E}.} \qquad (12.6)$$

Таким чином, напруженість електричного поля називають силовою характеристикою.

Електричні поля часто зображують графічно за допомогою ліній напруженості, які проводять так, щоб дотичні до цих ліній в кожній точці збігалися з напрямом вектора $\vec{E}$ (а отже і сили що діє на позитивний пробний заряд в цій точці), а густина цих ліній на рисунку пропорційна абсолютній величині вектора напруженості. Наприклад, для точкових зарядів лінії напруженості зображені на рис. 12.4.

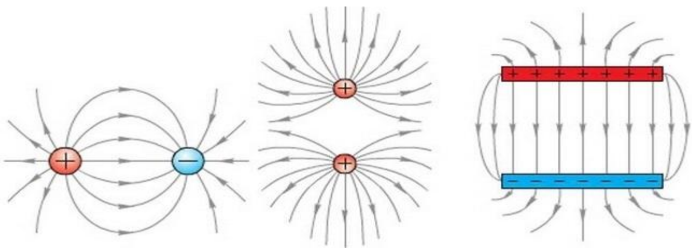


а *б*

Рис. 12.4

Лінії напруженості, як випливає з їх визначення, напрямлені завжди від позитивного заряду (*а*), або до негативного заряду (*б*) або ідуть в нескінченність. Вони ніколи не перетинаються між собою. На рис. 12.4 зображені поля відокремлених зарядів.

Якщо ці заряди зблизити, то отримаємо досить важливу конфігурацію, яка називається ***електричним диполем*** (рис. 12.5, *а*). Також наведені поля двох однойменних зарядів (рис. 12.5, *б*) і двох різнойменно заряджених площин, рис. 12.5, *в*).



а *б* *в*

Рис. 12.5

Силові лінії:
https://phet.colorado.edu/en/simulation/charges-and-fields

Для електростатичних полів справедливий ***принцип суперпозиції*** (накладання), рис. 12.6.

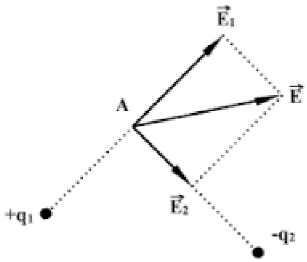


Рис. 12.6

У точці A заряд $+q_1$ створює поле напруженість якого $\vec{E}_1$, а заряд $-q_2$ створює напруженість $\vec{E}_2$. Результуюча напруженість $\vec{E}$ в точці A дорівнюватиме векторній сумі напруженостей полів $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Принцип суперпозиції справедливий і для більшого числа зарядів в системі. Отже:

∆ – ***Напруженість поля системи точкових зарядів*** **у деякій точці простору дорівнює векторній сумі напруженостей полів, які створив би у цій точці кожний із зарядів,** зокрема:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i. \qquad (12.7)$$

Статичні заряди:
https://phet.colorado.edu/en/simulation/balloons
https://phet.colorado.edu/en/simulation/john-travoltage

Кулонівські сили:
https://phet.colorado.edu/en/simulation/coulombs-law

Гравітаційні сили:
https://phet.colorado.edu/en/simulation/gravity-force-lab-basics

Контрольні питання

1. Що вивчає електростатика?
2. Як визначають електричне поле; його напруженість?
3. Як формулюється закон збереження електричного заряду?
4. Як формулюється закон Кулона?
5. Як визначають напруженість поля системи точкових зарядів?

Література: [**1**, с. 146–152; **4**, с. 103–106]

Лекція 13.
Потенціальна енергія. Потенціал поля

- **Робота з переміщення заряду в електростатичному полі. Потенціальна енергія**
- **Зв'язок між потенціалом і напруженістю поля**

13.1. Робота з переміщення заряду в електростатичному полі. Потенціальна енергія

Розглянемо роботу, яку виконують сили електростатичної взаємодії під час переміщення в полі точкового пробного заряду q_0 з точки 1 в точку 2 по довільній траєкторії (рис. 13.1).

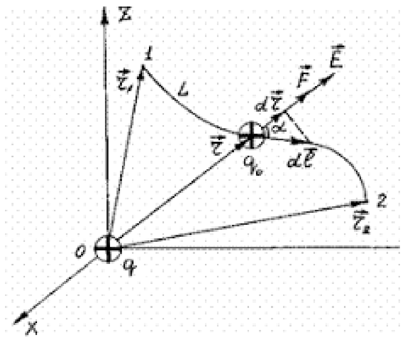


Рис. 13.1

Нехай поле створено точковим зарядом q. Розіб'ємо траєкторію руху заряду q_0 на невеликі переміщення $d\vec{l}$ такі, що в межах такої ділянки можна вважати траєкторію приблизно прямолінійною і вектор напруженості $\vec{E}$, створеного зарядом q поля – сталим. Елементарна робота сили електричної взаємодії зарядів на цій ділянці:

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{l})$$

(тут стоїть скалярний добуток, тому що напрям сили і переміщення в загальному випадку не збігаються).

Для сили $\vec{F}$ використаємо формулу (12.6): $\vec{F} = q_0 \cdot \vec{E}$, тоді для елементарної роботи на ділянці траєкторії $d\vec{l}$ отримаємо:

$$dA = q_0 \cdot (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = q_0 \cdot E \cdot dl \cdot \cos\alpha.$$

Як видно з рис. 13.1, $dl \cdot \cos\alpha = dr$, а отже, $dA = q_0 \cdot E \cdot dr$.

Робота поля з переміщення заряду q_0 з початкового положення 1 в кінцеве положення 2 вздовж всієї траєкторії:

$$\Delta A = \int_1^2 dA = \int_{r_1}^{r_2} q_0 \cdot E \cdot dr = q_0 \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot dr = \frac{q_0 \cdot q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 \cdot q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Bigg|_{r_1}^{r_2},$$

або

$$\Delta A = -\frac{q_0 \cdot q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right). \qquad (13.1)$$

З цієї формули видно, що робота електростатичного поля з переміщення пробного заряду не залежить від форми траєкторії руху, а залежить тільки від початкового і кінцевого положень пробного заряду (ці положення задаються відповідними радіус-векторами, які входять в формулу роботи). Силові поля, що задовольняють цій вимозі, називають ***консервативними*** (ще один приклад консервативного силового поля – гравітаційне). Іншими словами, ***робота електростатичних сил вздовж замкненої траєкторії дорівнює нулю*.** Це можна записати у вигляді:

$$\Delta A = \oint dA = q_0 \cdot \oint_L (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = 0. \qquad (13.2)$$

Δ – Лінійний інтеграл $\oint_L (\vec{E} \cdot d\vec{l})$ обчислений вздовж довільного замкненого контуру L називають *циркуляцією вектора напруженості електричного поля вздовж контуру L.*

В електростатичному полі *циркуляція вектора напруженості* за будь-яким замкненим контуром L дорівнює нулю.

$$\boxed{\oint_L (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = 0.} \qquad (13.3)$$

Оскільки робота консервативних сил здійснюється за рахунок потенціальної енергії W, то:

$$\Delta A = A_2 - A_1 = -\Delta W = -(W_2 - W_1). \qquad (13.4)$$

Ця формула є вираженням того факту, що якщо система виконує додатну роботу за рахунок своєї енергії, то енергія системи зменшиться і її зміна буде від’ємною).

Порівнюючи формули (13.1) та (13.4) отримуємо вираз для потенціальної енергії електростатичного поля двох взаємодіючих точкових зарядів (для інших конфігурацій зарядів формули будуть іншими):

$$\boxed{W = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q_0 \cdot q}{r}.} \qquad (13.5)$$

Якщо прийняти, що на нескінченності $r \to \infty$ потенціальна енергія дорівнює нулю $(W_\infty = 0)$, то з формули (13.4) отримуємо:

$$\Delta A = A_{1\to\infty} = -(W_\infty - W_1) = W_1.$$

$$\boxed{A_{1\to\infty} = W_1.} \qquad (13.6)$$

Δ **–** ***Потенціальна енергія заряду в певній точці електростатичного поля*** **дорівнює роботі поля з переміщення цього заряду з певної точки у нескінченість.**

Залежність потенціальної енергії двох точкових зарядів від відстані між ними і знаків зарядів:
http://physics.bu.edu/~duffy/HTML5/potential2.html

Як видно з формули (13.5) величина потенціальної енергії залежить також і від величини пробного заряду q_0. Тому, щоб характеризувати поле, створене зарядом q розглядають величину, яку називають ***потенціалом поля*** φ.

Δ – Величину, що дорівнює відношенню потенціальної енергії пробного заряду до його величини називають *потенціалом електростатичного поля* φ.

$$\boxed{\varphi = \frac{W}{q_0}.} \qquad (13.7)$$

Для ***точкового заряду*** потенціал поля визначається рівнянням:

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r}.} \qquad (13.8)$$

Взагалі, у ***випадку довільного поля***, якщо в деякій точці відомий потенціал φ, то потенціальна енергія пробного заряду q_0 в цьому полі визначається формулою:

$$\boxed{W = q_0 \cdot \varphi.} \qquad (13.9)$$

З цієї формули видно, чому потенціал називають енергетичною характеристикою поля. Якщо об'єднати формули (13.4) для роботи і (13.9) – для потенціальної енергії, то отримаємо важливий вираз для роботи електростатичного поля [1, 5].

Δ – При переміщенні заряду q_0 з точки поля з потенціалом φ_1 в точку з потенціалом φ_2 електростатичними силами виконується робота:

$$\boxed{A_{1\to 2} = q_0 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2).} \qquad (13.10)$$

Якщо прийняти потенціал на нескінченності рівним нулю, то

$$A_{1\to\infty} = q_0 \cdot (\varphi_1 - \varphi_\infty) = q_0 \cdot \varphi_1,$$

тобто, для будь-якої точки поля:

$$\boxed{\varphi_1 = \frac{A_{1\to\infty}}{q_0}.} \qquad (13.11)$$

Потенціал можна визначити також наступним чином:

Δ – *Потенціал* будь-якої точки електростатичного поля дорівнює роботі, яку виконує поле по переміщенню одиничного позитивного заряду із даної точки в нескінченість.

У системі СІ за одиницю потенціалу прийнято одиницю вимірювання ***Вольт***: $[\varphi] = \text{Äæ/Êë} = \text{Âî ëüò}$.

У фізиці і хімії часто використовують таку одиницю енергії як ***електрон-вольт.***

Δ – Один *електрон-вольт* дорівнює енергії, яку набуває електрон при проходженні ним різниці потенціалів в 1 Вольт:

$$A = e \cdot \Delta\varphi = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{Êë} \cdot 1\ \text{Âî ëüò} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{Äæ}.$$

Отже:

$$1\ \text{åÂ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{Äæ}. \qquad (13.12)$$

В електрон-вольтах зручно вимірювати енергію в мікросвіті коли розглядають фізичні явища на рівні атомів і молекул.

Для електростатичного поля справедливий принцип суперпозиції (накладання) полів:

Δ – *Принцип накладання полів* – потенціал поля системи зарядів у деякій точці дорівнює сумі потенціалів кожного заряду системи у цій точці:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_{з}. \qquad (13.13)$$

13.2. Зв’язок між потенціалом і напруженістю поля

Кожна точка електростатичного поля характеризується двома величинами: ***напруженістю електростатичного поля*** $\vec{E}$ (векторна величина) і ***потенціалом електростатичного поля*** φ (скалярна величина). Між цими величинами існує зв’язок.

Як і будь-який вектор у просторі, напруженість електростатичного поля можна розкласти на компоненти вздовж відповідних осей координат:

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}.$$

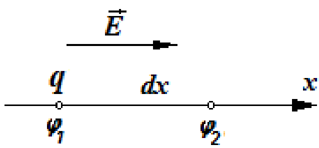


Рис. 13.2

Розглянемо спочатку зв’язок між напруженістю і потенціалом в одновимірному випадку, коли вектор $\vec{E}$ напрямлений вздовж однієї осі x, тобто має одну компоненту (рис. 13.2).

При переміщенні заряду q з першого положення в інше вздовж осі x електростатичними силами буде виконана робота:

$$dA = F \cdot dx = q \cdot E \cdot dx.$$

З іншого боку

$$dA = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = -q \cdot d\varphi.$$

Прирівнюючи праві частини, отримуємо:

$$\boxed{q \cdot E \cdot dx = -q \cdot d\varphi,}$$

або

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}. \qquad (13.14)$$

Знак «мінус» вказує, що напруженість поля напрямлена в бік зменшення потенціалу. Величина напруженості дорівнює похідній потенціалу за координатою. З цієї формули видно, чому одиницею напруженості є $[E] =$ Â/ì .

Якщо вектор напруженості напрямлений в просторі довільним чином, то співвідношення (13.13) можна записати для кожної з його компонент. Тоді для вектора напруженості отримаємо:

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right).$$

У математиці вводять поняття ***градієнта скалярної функції***:

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = \nabla\varphi.$$

У загальному, ***напруженість електростатичного поля*** $\vec{E}$ пов'язана з ***потенціалом поля*** φ наступним співвідношенням:

$$\boxed{\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi.} \tag{13.15}$$

Вектор градієнта показує напрям найшвидшої зміни скалярної функції, а його величина в точці пропорційна швидкості цієї зміни (рис. 13.3).

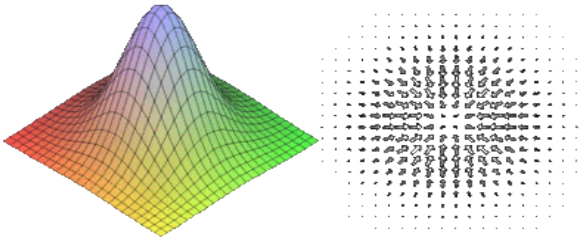


Рис. 13.3

Рівняння (13.14) та (13.15) визначають зв'язок між напруженістю і потенціалом в диференціальній формі. Проте між цими характеристиками поля існує зв'язок і в інтегральній формі. Дійсно, якщо заряд q переміщується полем з першого положення в друге (див. рис. 13.1), то робота поля по переміщенню згідно з формулою (13.10):

$$A_{1\to 2} = q_0 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2).$$

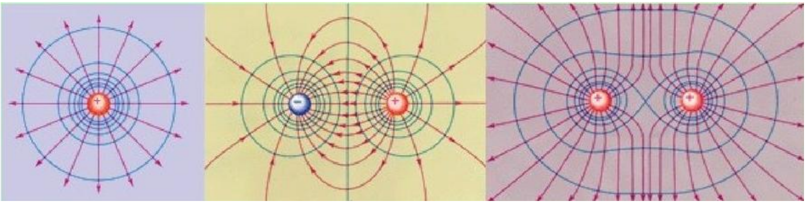
З іншого боку, з формули (13.2) отримаємо:

$$A_{1\to 2} = \int_1^2 (\vec{F} \cdot d\vec{l}\,) = q_0 \cdot \int_1^2 (\vec{E} \cdot d\vec{l}\,).$$

Прирівнявши праві сторони виразів для роботи, отримаємо:

$$\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E} \cdot d\vec{l}\,).} \tag{13.16}$$

Інтегрування тут проводять по будь-якій кривій, що з'єднує точки 1 та 2. Для графічного зображення потенціалу електростатичного поля використовують ***еквіпотенціальні поверхні***, тобто поверхні з однаковим потенціалом (рис. 13.4).



а *б* *в*

Рис. 13.4

Еквіпотенціальні поверхні зображені синіми лініями. Крок потенціалу між сусідніми поверхнями однаковий. Силові лінії (лінії напруженості) зображені червоними лініями. На рис. 13.4, *а* зображені еквіпотенціальні поверхні і силові лінії точкового заряду (рис. 13.4, *б*) електричного диполя (рис. 13.4, *в*) двох однакових додатних зарядів. Поверхні рівного потенціалу завжди перпендикулярні вектору напруженості електростатичного поля $\vec{E}$. Дійсно, якщо переміщувати заряд по такій поверхні, то елементарна робота: $dA = -q \cdot d\varphi = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ (тому що для такої поверхні $\varphi = \text{const}$). З іншого боку:

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{l}) = q \cdot (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = q \cdot E \cdot dl \cdot \cos\alpha. \qquad (13.17)$$

Оскільки при переміщенні заряду $dl \neq 0$, заряд і напруженість також ненульові, то для того, щоби вираз (13.17) дорівнював нулю, необхідно, щоб $\cos\alpha = 0$. Звідси випливає, що кут між переміщенням $d\vec{l}$ і вектором напруженості $\vec{E}$ дорівнює $\alpha = 90^\circ$.

Вигляд еквіпотенціальних поверхонь різних систем точкових зарядів:

https://www.compadre.org/osp/EJSS/4457/245.htm
https://phet.colorado.edu/en/simulation/charges-and-fields

Контрольні питання

1. Як знайти роботу з переміщення заряду в електростатичному полі?
2. Що таке потенціал електростатичного поля?
3. Як визначають зв'язок між потенціалом і напруженістю поля?
4. Як формулюється принцип накладання полів?

Література: [**1**, с. 152–156; **4**, с. 106–109]

Лекція 14.
Теорема Гауса–Остроградського

- **Теорема Гауса–Остроградського (для електростатичних полів)**
- **Приклади застосування теореми Гауса–Остроградського**
  – напруженість поля нескінченої рівномірно зарядженої площини;
  – поле двох рівномірно заряджених паралельних площин

14.1. Теорема Гауса–Остроградського (для електростатичних полів)

Розглянемо елементарну поверхню dS, в межах якої вектор напруженості електростатичного поля $\vec{E}$ можна вважати сталим (рис. 14.1).

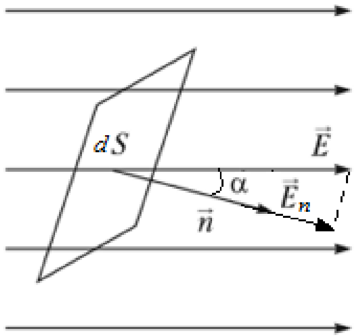


Рис. 14.1

Поставимо у відповідність цій поверхні вектор:

$$d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS, \tag{14.1}$$

де $\vec{n}$ – одиничний перпендикулярний до поверхні dS вектор (нормаль). Для замкнених поверхонь позитивний напрям $\vec{n}$ збігається з напрямом зсередини назовні.

Δ – ***Елементарним потоком*** **вектора напруженості електростатичного поля $\vec{E}$ через поверхню dS називають скалярний добуток:**

$$\boxed{d\hat{O} = (\vec{E} \cdot d\vec{S}).} \tag{14.2}$$

Якщо розписати скалярний добуток, то отримаємо ще один вираз для елементарного потоку:

$$d\Phi = (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = E \cdot dS \cdot \cos\alpha = E_n \cdot dS. \qquad (14.3)$$

де E_n – проекція вектора напруженості електростатичного поля $\vec{E}$ на напрям нормального до поверхні dS вектора $\vec{n}$; α – кут між векторами $\vec{E}$ та $\vec{n}$ для певної елементарної поверхні dS.

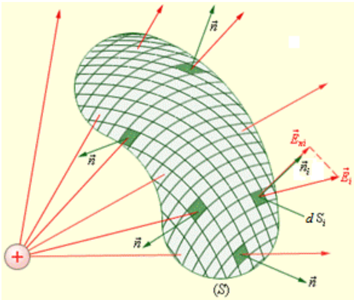


Рис. 14.2

Щоб визначити потік вектора напруженості через довільну поверхню великих розмірів, цю поверхню розбивають на елементарні (малі) поверхні (рис. 14.2). Для кожної такої елементарної ділянки визначають елементарний потік за формулою (14.2). Потім ці елементарні потоки додають для всіх малих ділянок на яку розбита велика поверхня S:

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}). \qquad (14.4)$$

Якщо поверхня S замкнена, то пишуть:

$$\Phi = \oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}). \qquad (14.5)$$

Як видно із визначення потоку, в системі СІ він вимірюється в наступних одиницях: $[\Phi] = \text{Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}$.

Знайдемо потік вектора напруженості Φ електростатичного поля $\vec{E}$ через сферичну поверхню, в центрі якої знаходиться деякий позитивний заряд q (рис. 14.3). Виберемо на поверхні сфери елементарну ділянку dS. Напруженість поля в центрі цієї ділянки буде визначатись формулою:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}; \quad \Phi = \oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \oint_S \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r}.$$

Радіус має сталу величину на всій поверхні, тому його можна виносити за знак інтеграла як інші константи. Скалярний добуток $(\vec{r} \cdot d\vec{S}) = r \cdot dS$, тому що радіус сфери завжди перпендикулярний до її поверхні і збігається за напрямом з нормаллю $\vec{n}$ до поверхні (рис. 14.3). Отже, для потоку отримаємо:

$$\hat{O} = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \oint_S dS.$$

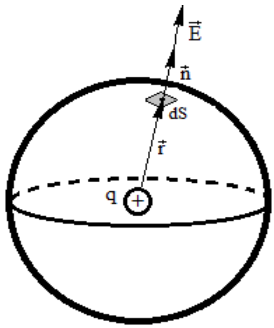


Рис. 14.3

У цій формулі $\oint_S dS = S_{\tilde{n}\hat{o}}$ інтеграл по замкненій поверхні від dS – це просто площа сферичної поверхні радіуса r :

$$S_{\tilde{n}\hat{o}} = 4\pi r^2.$$

Для потоку $\hat{O}$ вектора напруженості електростатичного поля $\vec{E}$ через сферичну поверхню в центрі якої знаходиться деякий позитивний заряд q отримуємо:

$$\hat{O} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}. \qquad (14.6)$$

Можна довести, що потік не залежить від форми поверхні, а лише від заряду, що знаходиться всередині цієї поверхні.

Δ – ***Теорема Гауса–Остроградського*: потік вектора напруженості електростатичного поля $\vec{E}$ крізь довільну замкнену поверхню зсередини назовні дорівнює алгебраїчній сумі зарядів, які охоплюються поверхнею S, поділеній на добуток електричної сталої ε_0 на діелектричну проникність ε:**

$$\boxed{\hat{O} = \oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i.} \qquad (14.7)$$

Щоб описати поле всередині діелектрика вводять ***вектор індукції електричного поля*** (або ***вектор електричного зміщення***) $\vec{D}$:

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E}. \qquad (14.8)$$

Теорема Гауса–Остроградського для електричного поля в діелектрику набуде вигляду:

$$\boxed{\hat{O} = \oint_S (\vec{D} \cdot d\vec{S}) = \sum_{i=1}^{N} q_i.} \qquad (14.9)$$

14.2. Приклади застосування теореми Гауса–Остроградського

Теорема Гауса–Остроградського використовується для розрахунку напруженості електростатичного поля різних систем зарядів, особливо якщо цим системам притаманна певна симетрія.

14.2.1. Напруженість поля нескінченої рівномірно зарядженої площини

Розподіл зарядів по поверхні рівномірно заряджених площин часто характеризують за допомогою ***поверхневої густини заряду*** σ. За визначенням, це заряд, що приходиться на одиницю площі поверхні:

$$\sigma = \frac{q}{S}. \qquad (14.10)$$

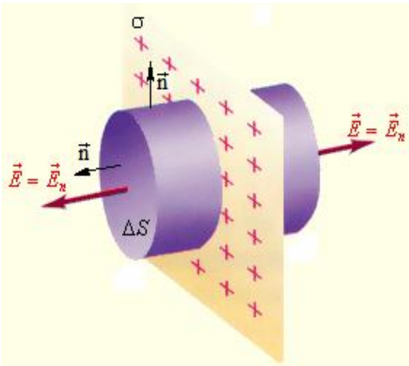


Рис. 14.4

Розглянемо рівномірно заряджену площину з поверхневою густиною заряду σ (рис. 14.4). Поле напруженості такої площини буде ***однорідним, тобто напрямок вектора напруженості в кожній точці такого поля має однаковий напрям.*** В цьому випадку він напрямлений перпендикулярно площині і від неї. На рисунку зображені вектори напруженості електростатичного поля $\vec{E}$ виходять через основи циліндричної поверхні.

Ця поверхня перетинає площину, її бічні напрямляючі перпендикулярні до площини, а основи циліндричної поверхні мають площу ΔS і паралельні до неї. Отже, відповідно до закону Гауса–Остроградського, потік через циліндричну поверхню [1–3]:

$$\hat{O} = \oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \frac{\sigma \cdot \Delta S}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}. \qquad (14.11)$$

(в нашому випадку заряд на частині площини всередині поверхні $q = \sigma \cdot \Delta S$). Потік через замкнену циліндричну поверхню зсередини назовні дорівнює сумі потоків через основи і через бокову поверхню.

$$\hat{O} = \oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \hat{O}_{\text{á³÷í à}} + 2\hat{O}_{\text{î ñí î âè}} = \int_{S_{\text{á³÷í à}}} (\vec{E} \cdot d\vec{S}) + 2 \int_{S_{\text{î ñí î âè}}} (\vec{E} \cdot d\vec{S}).$$

Число 2 у цій формулі стоїть тому, що циліндр має дві основи і потоки через ці поверхні однакові. Як видно з рис. 14.4, вздовж всієї основи вектори $\vec{E}$ та $\vec{n}$ паралельні, тому, враховуючи, що вектор напруженості не міняється вздовж цієї поверхні, можемо записати:

$$\hat{O}_{\text{î ñí î âè}} = \int\limits_{S_{\text{î ñí î âè}}} (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \int\limits_{S_{\text{î ñí î âè}}} E \cdot dS = E \cdot \int\limits_{S_{\text{î ñí î âè}}} dS = E \cdot \Delta S.$$

На бічній поверхні циліндра вектори $\vec{E}$ та $\vec{n}$ перпендикулярні, тому їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто потік вектора напруженості через бічну поверхню дорівнює нулю, отже:

$$\hat{O} = \oint\limits_{S} (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = 2\hat{O}_{\text{î ñí î âè}} = 2E \cdot \Delta S. \qquad (14.12)$$

Підставляючи це рівняння у формулу (14.11), отримуємо:

$$2E \cdot \Delta S = \frac{\sigma \cdot \Delta S}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}.$$

Напруженість поля $\vec{E}$ нескінченої рівномірно зарядженої площини з поверхневою густиною заряду σ визначають за формулою:

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon \cdot \varepsilon_0}.} \qquad (14.13)$$

Очевидно, що напруженість не залежить від відстані до площини. В реальних ситуаціях заряджені площини мають кінцевий розмір і формула (14.13) буде справедлива, коли відстань від точки де визначають поле, набагато менша лінійних розмірів площини.

14.2.2. Поле двох рівномірно заряджених паралельних площин

На рис. 14.5 зображені дві паралельні різнойменно заряджені площини: ліва – заряджена негативно, отже лінії напруженості поля напрямлені до цієї площини (суцільні стрілки на рисунку). Праворуч знаходиться позитивно заряджена площина, лінії напруженості цієї площини напрямлені від неї (пунктирні стрілки).

Як видно з рисунка, між площинами вектори першої і другої площин, за принципом суперпозиції, додаються. Поза площинами вектори мають протилежний напрямок і взаємно компенсуються. Тому, поле буде зосереджено між площинами (якщо їх заряди рівні і протилежні), а назовні поле нульове.

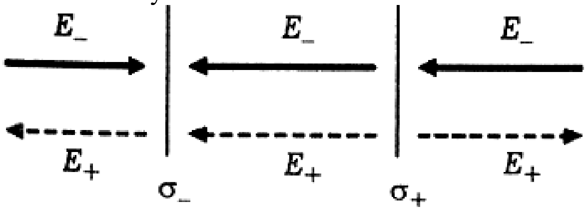


Рис. 14.5

Отже, між площинами:

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma_+}{2\varepsilon \cdot \varepsilon_0} + \frac{\sigma_-}{2\varepsilon \cdot \varepsilon_0}.$$

Якщо $\sigma_+ = \sigma_- = \sigma$, то ***напруженість електростатичного поля між двома різнойменно зарядженими нескінченими площинами*:**

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}.} \qquad (14.14)$$

Знайдемо різницю потенціалів між площинами, якщо відстань між ними d. Відповідно до формули (13.14):

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}.$$

Звідси випливає, що $d\varphi = -E \cdot dx.$ Інтегруючи вираз, отримуємо:

$$\Delta\varphi = -\int_0^d E \cdot dx = -\int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot dx = -\frac{\sigma}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}\int_0^d dx = -\frac{\sigma d}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}.$$

Різниця потенціалів між площинами:

$$\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = E \cdot d = \frac{\sigma \cdot d}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}.} \qquad (14.15)$$

Контрольні питання

1. Як формулюється теорема Гауса–Остроградського?
2. Як знайти потік вектора напруженості електростатичного поля?
3. Приклади застосування теореми Гауса–Остроградського.

4. Що таке густина заряду?

Література: [**1**, с. 163–172; **4**, с. 109–112]

Лекція 15.
Електроємність. Конденсатори

- **Визначення електроємності**
- **Паралельне з'єднання конденсаторів**
- **Послідовне з'єднання конденсаторів**
- **Енергія заряджених провідників**

15.1. Визначення електроємності

Розглянемо провідник, що перебуває в однорідному середовищі далеко від інших заряджених тіл та інших провідників. Такий провідник називається ***відокремленим***.

Δ – ***Електроємність відокремленого провідника*** **дорівнює заряду, який треба надати провіднику, щоб його потенціал змінився на один вольт.**

$$\boxed{C = \frac{q}{\varphi}.} \qquad (15.1)$$

У системі СІ ємність вимірюють у ***фарадах***:

$$[C] = \frac{\text{Êóëîí}}{\text{Âîëüò}} = \text{Ô} \ (\text{ôàðàäà}).$$

Наприклад, розглянемо відокремлений провідник у вигляді кулі. Оскільки потенціал кулі (назовні визначається формулою для потенціалу точкового заряду зосередженого в центрі кулі і заряд якого дорівнює заряду кулі):

$$\varphi = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot R},$$

тут R – радіус кулі, q – її заряд.

Для електроємності кулі отримуємо:

$$C_{\hat{e}\acute{o}\ddot{e}^3} = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R. \qquad (15.2)$$

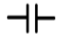
Одна ***фарада*** дуже велика ємність, наприклад, для сферичного провідника:

$$R = \frac{C_{\text{êóë³}}}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \cdot C_{\text{êóë³}}.$$

Таким чином, радіус кулі, ємність якої 1 Ф, має дорівнювати $R = 9 \cdot 10^9\ \text{ì}$. Для прикладу, електроємність Землі приблизно дорівнює 0,71 мФ, тому електроємність часто вимірюють у похідних менших одиницях:

$$1\ \text{ìêÔ} = 10^{-6}\ \text{Ô}\ \text{(мікрофарада)},$$

$$1\ \text{íÔ} = 10^{-9}\ \text{Ô}\ \text{(нанофарада)},\ 1\ \text{ïÔ} = 10^{-12}\ \text{Ô}\ \text{(пікофарада)}.$$

Для ***накопичення зарядів*** використовують спеціальні пристрої, які називають ***конденсаторами.*** Конденсатор складається з двох провідних обкладинок розділених діелектриком. На електричних схемах зображується символом 

Δ – *Ємність конденсатора* дорівнює відношенню заряду накопиченого в конденсаторі, до різниці потенціалів між його обкладинками

$$\boxed{\tilde{N} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}.} \tag{15.3}$$

Розглянемо плоский конденсатор. Це дві провідні обкладинки площею S на відстані d одна від одної. Між ними часто розміщують діелектрик з проникністю ε (рис. 15.1).

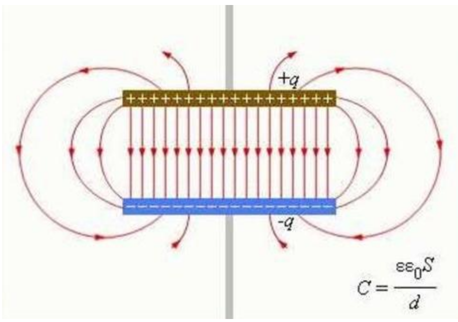


Рис. 15.1

Різниця потенціалів між обкладинками – за формулою (14.15):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E \cdot d = \frac{\sigma \cdot d}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0},$$

але $\sigma = \dfrac{q}{S}$, тому $\varphi_1 - \varphi_2 = \dfrac{q \cdot d}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot S}$.

***Ємність плоского конденсатора*:**

$$\boxed{\tilde{N} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot S}{d}.} \qquad (15.4)$$

З формули видно, що для збільшення ємності конденсатора потрібно збільшити площу обкладинок, зменшити відстань між ними або ввести між обкладинками діелектрик з великим значенням діалектричної проникності ε.

Властивості плоского конденсатора:
https://phet.colorado.edu/en/simulation/capacitor-lab-basics

Крім електроємності конденсатори мають ще одну важливу характеристику – ***пробивну напругу***. Ця величина визначає максимально допустиму напругу (різницю потенціалів) між обкладинками, яку може витримати діелектрик конденсатора без пробою. Пробивна напруга залежить як від властивостей діелектрика так і від його товщини [2]. Для збільшення електроємності або пробивної напруги конденсатори часто з'єднують у батареї відповідно паралельно або послідовно.

15.2. Паралельне з'єднання конденсаторів

Паралельне з'єднання конденсаторів в батарею застосовують для того, щоб отримати більшу ємність. Всю батарею на рис. 15.2, яка складається з N конденсаторів можна замінити одним еквівалентним конденсатором $C_{ï\,àð}$. Визначимо його ємність.

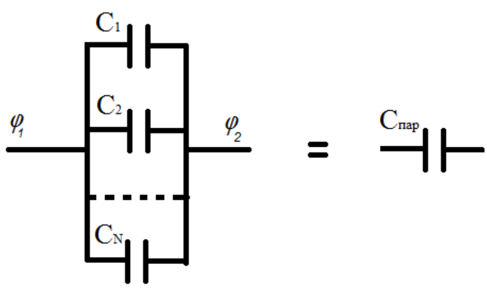


Рис. 15.2

При паралельному з'єднанні на кожному з конденсаторів однакова різниця потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$. Заряд батареї конденсаторів дорівнюватиме сумі зарядів окремих конденсаторів: $q_{\text{ї àð}} = q_1 + q_2 + ... + q_N$.

Розділимо вираз на різницю потенціалів між обкладинками:

$$\frac{q_{\text{ї àð}}}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q_1}{\varphi_1 - \varphi_2} + \frac{q_2}{\varphi_1 - \varphi_2} + ... + \frac{q_N}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Отже, якщо порівняти цей вираз з формулою визначення ємності (15.3), то для ємності паралельно з'єднаних конденсаторів отримаємо:

$$\boxed{C_{\text{ї àð}} = \tilde{N}_1 + \tilde{N}_2 + ... + \tilde{N}_N = \sum_{i=1}^{N} \tilde{N}_i.} \qquad (15.5)$$

Слід відмітити, що пробивна напруга при паралельному з'єднанні не перевищує найменшої пробивної напруги конденсатора батареї.

15.3. Послідовне з'єднання конденсаторів

Послідовне з'єднання дає програш в ємності. Ємність всієї батареї виходить меншою за саму маленьку ємність, що входить в батарею. Проте таке з'єднання збільшує пробивну напругу батареї, що часом буває дуже важливо. Розглянемо послідовне з'єднання конденсаторів (рис. 15.3).

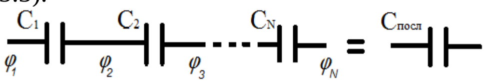


Рис. 15.3

Напишемо різницю потенціалів на всій батареї $\varphi_N - \varphi_1$:

$$\varphi_N - \varphi_1 = (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_3 - \varphi_2) + ... + (\varphi_N - \varphi_{N-1}). \qquad (15.6)$$

Обкладинки конденсаторів електрично ізольовані, і за законом збереження заряду з'єднані обкладинки сусідніх конденсаторів мають однаковий протилежний за знаком заряд. Тобто: $q_1 = q_2 = q_3 = ... = q_N = q$.

Розділимо формулу (15.6) на заряд конденсатора батареї q:

$$\frac{\varphi_N - \varphi_1}{q} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{q} + \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{q} + ... + \frac{\varphi_N - \varphi_{N-1}}{q}.$$

Порівнюючи цей вираз з визначенням ємності конденсатора, формула (15.3), отримаємо для ємності послідовно з’єднаних конденсаторів:

$$\boxed{\frac{1}{C_{\text{ï î ñë}}} = \frac{1}{\tilde{N}_1} + \frac{1}{\tilde{N}_2} + \ldots + \frac{1}{\tilde{N}_N} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\tilde{N}_i}.} \qquad (15.7)$$

Слід відмітити, що прикладена до батареї послідовно з’єднаних конденсаторів напруга розділиться порівну тільки у випадку, якщо ємності рівні. Якщо ж ємності різні, то з формули:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = \frac{q}{C}$$

випливає, що при рівному заряді, напруга на конденсаторі меншої ємності має бути більшою, ніж напруга на конденсаторі більшої ємності. Тому це потрібно пам’ятати якщо є необхідність збільшувати пробивну напругу шляхом послідовного з’єднання.

15.4. Енергія заряджених провідників

Нанесення на провідник електричного заряду пов’язано з виконанням роботи проти сил відштовхування між однойменними зарядами. Ця робота йде на збільшення електричної енергії зарядженого провідника. Елементарна робота dA, яка виконується зовнішніми силами для перенесення заряду dq з нескінченності на провідник:

$$dA = \varphi \cdot dq = \varphi \cdot C \cdot d\varphi.$$

Робота, яка виконується для збільшення потенціалу провідника від 0 до φ:

$$A = \int_0^{\varphi} dA = \int_0^{\varphi} \varphi \cdot C \cdot d\varphi = \frac{C \cdot \varphi^2}{2}.$$

Оскільки робота дорівнює ***електричній енергії провідника*** W, то, використовуючи формулу (15.1) для визначення ємності, цей результат можна записати у вигляді:

$$\boxed{W = \frac{C \cdot \varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q \cdot \varphi}{2}.} \qquad (15.8)$$

Аналогічно можна знайти енергію зарядженого конденсатора, де замість φ буде $\Delta\varphi$ – різниця потенціалів обкладинок. В цьому випадку, різниця потенціалів між обкладинками дорівнює напрузі між ними $\Delta\varphi = U$. Тому ***енергію зарядженого конденсатора*** визначають такими рівняннями:

$$\boxed{W = \frac{C \cdot U^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q \cdot U}{2}.} \qquad (15.9)$$

Ємність плоского конденсатора можна знайти за формулою (15.4):

$$Ñ = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot S}{d}.$$

Різницю потенціалів між площинами за формулою (14.15):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = E \cdot d.$$

Для енергії зарядженого конденсатора отримаємо наступний вираз:

$$W = \frac{C \cdot U^2}{2} = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot S}{2d} \cdot E^2 \cdot d^2 = \frac{1}{2}\varepsilon \cdot \varepsilon_0 E^2 \cdot S \cdot d = \frac{1}{2}\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 \cdot V,$$

де $V = Sd$ – об'єм між пластинами плоского конденсатора.

Густина електростатичної енергії поля (енергія одиниці об'єму поля) дорівнює:

$$\boxed{\omega = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 = \frac{D \cdot E}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon \cdot \varepsilon_0}.} \qquad (15.10)$$

Слід відмітити, що певний час в науці велись дискусії про те, з чим саме зв'язана електрична енергія. Існувало дві точки зору, одна з яких стверджувала, що енергія пов'язана із зарядами на провідниках, інша – що енергія пов'язана з електростатичним полем. В електростатиці неможливо віддати перевагу жодній точці зору. Але в електродинаміці доведено – саме поле має енергію, поле може переносити цю енергію із швидкістю світла (бо світло само являє собою електромагнітну хвилю). Формула (15.10) отримана для плоского конденсатора, але вона залишається справедливою і в інших випадках, де потрібно визначити енергію електричного поля.

Контрольні питання

1. Як визначити електроємність відокремленого провідника?
2. Визначення ємності конденсатора, ємності плоского конденсатора.

3. Як знайти еквівалентну ємність для паралельного з’єднання?
4. Як знайти еквівалентну ємність для послідовного з’єднання?
5. Від яких параметрів залежить енергія зарядженого конденсатора?
6. Що таке густина електростатичної енергії поля?

Література: [**1**, с. 184–191; **4**, с. 126–131]

Лекція 16.
Струм. Електрорушійна сила

- **Електричний струм**
- **Джерело струму. Електрорушійна сила. Напруга**
- **Закон Ома**
- **Закон Джоуля–Ленца**

16.1. Електричний струм

Δ – ***Електричним струмом*** **називають будь-який впорядкований рух електричних зарядів.**

За напрямок електричного струму умовно приймають напрямок руху позитивних електричних зарядів (рис. 16.1). У металах, де носіями струму є вільні електрони, напрям струму протилежний руху електронів.

Δ – ***Сила струму*** **– це електричний заряд, що проходить через переріз провідника в одиницю часу.**

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt}.} \qquad (16.1)$$

У системі СІ струм вимірюється в амперах: $[I] =$ А (Àì ï åð).

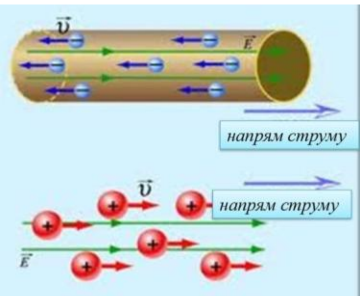


Рис. 16.1

Якщо сила струму і його напрям з часом не змінюються, то такий струм називають ***постійним***. Бувають також і змінні види струму. Одним з самих розповсюджених видів змінного струму є струм в електромережі. Він змінюється за синусоїдальним законом з частотою 50 Гц.

Для характеристики розподілу струму по перерізу провідника використовують ***вектор густини струму*** $\vec{j}$.

Δ – ***Густиною електричного струму*** **називають вектор напрямлений вздовж струму і чисельно рівний силі струму, який проходить через одиничну перпендикулярну струму площадку:**

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS}. \qquad (16.2)$$

У системі СІ: $[j] = \text{À} / \text{ì}^{\,2}$.

Для постійного електричного струму в однорідному провіднику:

$$I = j \cdot S. \qquad (16.3)$$

Для довільної поверхні $I = \int\limits_S (\vec{j} \cdot d\vec{S})$, тобто ***сила струму*** I **–** це потік вектора густини струму через поверхню S.

Розглянемо відрізок провідника, по якому тече струм I. Якщо $\langle \upsilon \rangle$ – середня швидкість впорядкованого руху носіїв заряду, то площадки S (праворуч) за час dt встигнуть досягнути заряди, що знаходяться на відстані не більшій ніж $l = \langle \upsilon \rangle dt$ від цієї площадки (рис. 16.2):

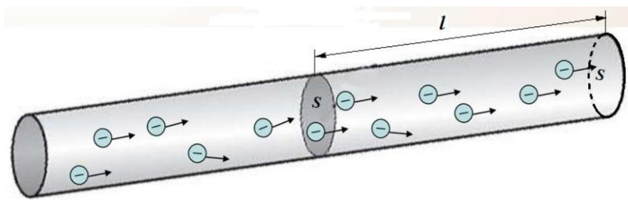


Рис. 16.2

Іншими словами, площадку S перетнуть всі заряди що знаходяться в об’ємі:

$$V = l \cdot S = \langle \upsilon \rangle dt \cdot S.$$

Кількість таких носіїв заряду в цьому об’ємі дорівнює:

$$N = n \cdot V,$$

де n – концентрація зарядів носіїв струму в провіднику.

За час dt через поперечний переріз провідника (площадка S праворуч) пройде заряд $dQ = e \cdot N$ (e – заряд електрона), або

$$dQ = n \cdot \langle \upsilon \rangle dt \cdot S \cdot e.$$

Сила струму в провіднику буде дорівнювати:

$$I = \frac{dQ}{dt} = n \cdot \langle \upsilon \rangle \cdot S \cdot e.$$

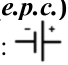
Для ***густини струму*** $j = \dfrac{I}{S}$ отримуємо наступну формулу:

$$\boxed{j = n \cdot \langle \upsilon \rangle \cdot e,} \qquad (16.4)$$

де n – концентрація носіїв струму; $\langle \upsilon \rangle$ – середня швидкість впорядкованого руху носіїв струму(не плутати з середньою тепловою швидкістю); e – заряд частинки носія струму (в металах це електрони, але можуть бути іони та ін.).

16.2. Джерело струму. Електрорушійна сила. Напруга

Щоб в деякому середовищі існував впорядкований рух вільних електричних зарядів (струм), потрібно щоб в цьому середовищі було електричне поле. Для того, щоб струм був тривалим, енергія поля має весь час поповнюватись за рахунок джерела струму [7].

***Джерело струму або електрорушійної сили* (*е.р.с.*)** для постійного струму на схемах позначають наступним чином: 

Всередині джерела струму на електрони повинні діяти сили неелектричного походження, які називають ***сторонніми***. Вони розділяють негативні і позитивні заряди і направляють їх до зовнішнього електричного кола. В електричному колі заряди рухаються вже під дією електричного поля утворюючи струм. Сторонні сили можуть мати різну природу: механічну, магнітну, хімічну та ін. Подібно до напруженості електричного поля, для того щоб характеризувати сторонні сили, вводять напруженість сторонніх сил:

$$\vec{E}_{\text{ñòîð}} = \frac{\vec{F}_{\text{ñòîð}}}{q}. \qquad (16.5)$$

Замкнене електричне коло буде мати вигляд, показаний на рис. 16.3. Всередині джерела струму сторонні сили переміщують електричні заряди проти сил електростатичного поля, таким чином виконуючи роботу.

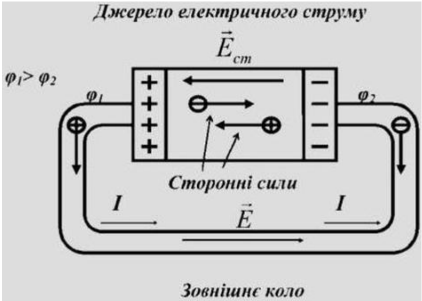


Рис. 16.3

Δ – ***Електрорушійною силою*** (***е.р.с.***) **називають фізичну величину, що дорівнює роботі сторонніх сил під час переміщення одиничного позитивного заряду вздовж джерела струму.**

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\grave{A}_{\tilde{n}\grave{o}\,\hat{\imath}\,\eth}}{q}.} \qquad (16.6)$$

Вимірюється електрорушійна сила в вольтах, як і електричний потенціал поля: $\varepsilon\ = \hat{A}\ (\hat{A}\hat{\imath}\,\ddot{e}\ddot{u}\grave{o})$.

Ділянка кола на якій відсутні джерела електрорушійної сили називається ***однорідною***. Якщо на ділянці електричного кола присутні джерела електрорушійної сили, то ***неоднорідною***.

Якщо порахувати повну роботу, яка виконується над зарядом під час проходження ним неоднорідної ділянки електричного кола від точки 1 до точки 2 (рис. 16.4), то вона буде дорівнювати сумі робіт:

$$A_{12} = A_{\tilde{n}\grave{o}} + A_{\mathring{a}\ddot{e}},$$

äå $A_{\tilde{n}\grave{o}}$ – робота сторонніх сил на ділянці, $A_{\mathring{a}\ddot{e}}$ – робота електричного поля.

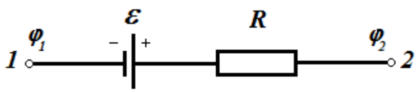


Рис. 16.4

Враховуючи, що $A_{\tilde{n}\grave{o}} = q \cdot \varepsilon$; $A_{\mathring{a}\ddot{e}} = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$, отримуємо:

$$A_{12} = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + q \cdot \varepsilon. \qquad (16.7)$$

Δ – ***Напругою*** U ***на ділянці електричного кола*** **називають фізичну величину, яка дорівнює сумарній роботі електричних і сто-**

ронніх сил під час переміщення одиничного позитивного заряду вздовж даної ділянки кола:

$$\boxed{U_{12} = \frac{A_{12}}{q} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon.} \tag{16.8}$$

Поняття ***напруги*** є узагальненням поняття ***різниці потенціалів*** **–** напруга на ділянці електричного кола дорівнює різниці потенціалів тільки у випадку відсутності на цій ділянці джерел електрорушійної сили. Тобто, для однорідної ділянки:

$$\boxed{U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2).} \tag{16.9}$$

16.3. Закон Ома

Δ **–** ***Закон Ома для однорідної ділянки електричного кола в інтегральній формі*** **– сила струму що тече в провіднику пропорційна до напруги на кінцях провідника** (рис. 16.5):

$$\boxed{I = \frac{U}{R}.} \tag{16.10}$$

де $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – ***напруга*** на ділянці; R – ***електричний опір провідника.***

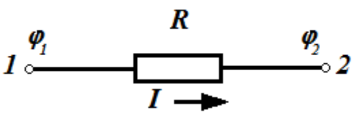


Рис. 16.5

Одиницею опору в СІ є Ом: R $=$ Î ì .

Δ – **1 Ом – опір такого провідника, в якому за напруги 1 Вольт тече струм в 1 Ампер.**

Величину $G = \dfrac{1}{R}$ називають ***електропровідністю провідника.***

Опір провідника залежить від його розмірів і форми, від матеріалу провідника і також від температури.

$$\boxed{R = \rho\frac{l}{S},} \tag{16.11}$$

де ρ – ***питомий опір*** матеріалу провідника; $\frac{1}{\rho} = \sigma$ – ***питома провідність*** матеріалу; l – довжина провідника; S – площа поперечного перетину.

Залежність від температури:

$$R = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t), \qquad (16.12)$$

де R_0 – опір провідника при температурі 0°С; α – температурний коефіцієнт опору; t – температура, °С.

Формула (16.12) справедлива для металів. Їх опір лінійно зростає з підвищенням температури. Проте існують речовини, опір яких навпаки зменшується із зростанням температури, наприклад напівпровідники, розчини тощо.

Провідники з різними опорами можна з'єднувати послідовно і паралельно.

Послідовне з'єднання (див. рис. 16.6)

Еквівалентний опір: $R = R_1 + R_2 + ... + R_N = \sum_{i=1}^{N} R_i$.

Паралельне з'єднання (див. рис. 16.7)

Еквівалентний опір: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_N} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}$.

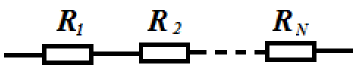


Рис. 16.6

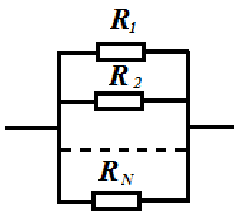


Рис. 16.7

Напишемо закон Ома в інтегральній формі: $I \cdot R = U$.

Підставимо в цю формулу вираз для опору провідника (16.11):

$$I \cdot \rho \frac{l}{S} = U.$$

Цей вираз можна переписати у вигляді:

$$\frac{I}{S} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{U}{l}.$$

Якщо згадати, що $\frac{I}{S} = j$ (формула (16.3)):

– $\frac{1}{\rho} = \sigma$ – питома провідність матеріалу провідника;

– $\frac{U}{l} = E$ – напруженість електричного поля в провіднику, то можна записати $j = \sigma \cdot E$.

Цей вираз часто записують у векторній формі:

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}.} \tag{16.13}$$

Δ – ***Закон Ома для однорідної ділянки електричного кола в диференціальній формі*: густина струму в будь-якій точці провідника прямо пропорційна напруженості електричного поля в цій точці. Коефіцієнт пропорційності – *питома електрична провідність* σ.**

Якщо на ділянці діють сторонні сили, то потрібно врахувати напруженість поля сторонніх сил.

Δ – ***Отримуємо закон Ома для неоднорідної ділянки електричного кола в диференціальній формі*:**

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_{\text{ñòîð}}).} \tag{16.14}$$

Помножимо скалярно обидві частини рівняння (16.14) на вектор $d\vec{l}$ – ***вектор елементу довжини провідника***. Абсолютна величина цього вектора дорівнює довжині елементу провідника, і напрямлений він вздовж стуму в цьому елементі. Тоді отримаємо:

$$(\vec{j} \cdot d\vec{l}) \cdot \rho = (\vec{E} \cdot d\vec{l}) + (\vec{E}_{\text{ñòîð}} \cdot d\vec{l}).$$

Інтегруємо цей вираз вздовж ділянки електричного кола:

$$j \cdot S \cdot \int_1^2 \frac{\rho \cdot dl}{S} = \int_1^2 (\vec{E} \cdot d\vec{l}) + \int_1^2 (\vec{E}_{\text{ñòîð}} \cdot d\vec{l}).$$

Отже, $I \cdot R = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon$.

Δ – **Закон Ома** ***для неоднорідної ділянки електричного кола в інтегральній формі*****:**

$$\boxed{I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon}{R} = \frac{U}{R}.} \qquad (16.15)$$

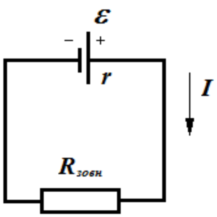


Рис. 16.8

Якщо початок і кінець кола (точки 1 та 2) збігаються, то $\varphi_1 = \varphi_2$ (рис. 16.8). Отже,

$$I = \frac{\varepsilon}{R}. \qquad (16.16)$$

Потрібно враховувати, що оскільки контур замкнений, то R в цій формулі – це загальний опір всього електричного кола:

$$R = R_{\text{çî âí}} + r. \qquad (16.17)$$

Отримуємо:

Δ – **Закон Ома** ***для замкненого електричного кола*****:**

$$\boxed{I = \frac{\varepsilon}{R_{\text{çî âí}} + r},} \qquad (16.18)$$

де $R_{\text{çî âí}}$ – опір зовнішньої ділянки електричного кола; r – ***внутрішній опір джерела струму.***

Формулу (16.18) можна переписати у вигляді:

$$U = \varepsilon - I \cdot r, \qquad (16.19)$$

де $U = I \cdot R_{\text{çî âí}}$ – падіння напруги на зовнішній однорідній ділянці електричного кола. Іншими словами, напруга на зовнішній ділянці менше е.р.с. джерела струму на величину падіння напруги на внутрішньому опорі джерела $I \cdot r$. Тому чим менше внутрішній опір – тим краще джерело струму.

Якщо замкнути накоротко зовнішні клеми джерела струму, то зовнішній опір буде дорівнювати нулю. Струм в колі набуде максимального значення, його величина буде обмежуватись тільки невеликим внутрішнім опором джерела струму r . Такий струм називають ***струмом короткого замикання***:

$$I_{\text{ê.ç.}} = \frac{\varepsilon}{r}. \qquad (16.20)$$

Подібний режим роботи є аварійним для джерела струму і може вивести його з ладу. Крім того, різко зростає кількість теплоти, що виділяється в джерелі і провідниках, що може викликати займання. Тому, режиму короткого замикання потрібно уникати.

Якщо джерело струму розімкнене, то $I=0$, і як видно з формули (16.15) в цьому випадку:

$$\varepsilon=\varphi_2-\varphi_1. \qquad (16.21)$$

Інакше, електрорушійна сила джерела струму дорівнює різниці потенціалів між його розімкненими клемами. Напруга на зовнішньому колі завжди менша за величину електрорушійної сили на величину падіння напруги на внутрішньому опорі джерела, формула (16.19).

16.4. Закон Джоуля–Ленца

Розглянемо однорідну ділянку електричного кола, до якої прикладена напруга U (рис. 16.9). За час t через будь-який переріз електричного кола переноситься заряд: $q=I\cdot t$.

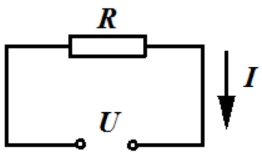


Рис. 16.9

Оскільки електрорушійна сила на однорідній ділянці кола відсутня, то роботу виконують лише електричні сили. Під час переміщення заряду q вздовж ділянки кола з напругою U виконується робота:

$$A=q\cdot U=U\cdot I\cdot t. \qquad (16.22)$$

Якщо струм проходить по нерухомому провіднику з опором R, то вся ця робота іде на нагрівання провідника $A=Q$.

Δ – ***Закон Джоуля – Ленца в інтегральній формі***:

$$\boxed{Q=U\cdot I\cdot t=\frac{U^2}{R}t=I^2\cdot R\cdot t.} \qquad (16.23)$$

Для ***потужності струму*** $P=\dfrac{A}{t}$ отримуємо:

$$\boxed{P=U\cdot I=\frac{U^2}{R}=I^2\cdot R.} \qquad (16.24)$$

Δ – Кількість теплоти, що виділяється за одиницю часу в одиниці об'єму, називається *густиною теплової потужності струму*:

$$\omega = \frac{dQ}{dV \cdot dt}. \qquad (16.25)$$

Із закону Джоуля–Ленца для елементарної кількості теплоти dQ можна записати:

$$dQ = I^2 \cdot R \cdot dt = (j \cdot dS)^2 \cdot \rho \frac{dl}{dS} \cdot dt = \rho \cdot j^2 \cdot dl \cdot dS \cdot dt = \rho \cdot j^2 \cdot dV \cdot dt.$$

Δ – ***Закон Джоуля–Ленца у диференціальній формі*:**

$$\boxed{\omega = \rho \cdot j^2.} \qquad (16.26)$$

Оскільки $\rho = \dfrac{1}{\sigma}$ і $j = \sigma \cdot E$,то для густини теплової потужності справедливі також формули:

$$\boxed{\omega = j \cdot E = \sigma \cdot E^2.} \qquad (16.27)$$

Потужність лампи:
https://www.thephysicsaviary.com/Physics/Programs/Labs/PowerOfLight/

Контрольні питання

1. Що таке електричний, постійний і змінний струм?
2. Як визначають силу струму, його густину?
3. Що таке джерело струму, електрорушійна сила, напруга?
4. Що таке електричний опір, провідність?
5. Як формулюються закони Ома, Джоуля–Ленца?
6. Як знайти еквівалентний опір для послідовного і паралельного з’єднань провідників?

Література: [**1**, с. 192–199; **4**, с. 133–137]

Частина 4.

МАГНЕТИЗМ

Лекція 17.
Закон Ампера

- **Загальні положення**
- **Закони магнітного поля. Закон Ампера**
- **Векторний і скалярний добутки векторів**

17.1. Загальні положення

Δ – ***Магнетизм*** **– це особлива форма матеріальної взаємодії що виникає між рухомими зарядами.**

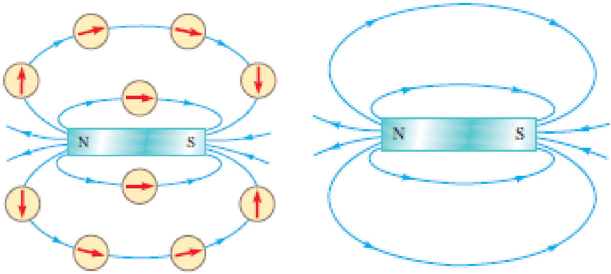
Передача магнітної взаємодії здійснюється магнітним полем. Основною характеристикою магнітного поля є ***вектор магнітної індукції*** $\vec{B}$. Одиницею вимірювання індукції магнітного поля в системі СІ є ***Тесла*** (Тл): $[\vec{B}] = \grave{O}\ddot{e}$.

Для графічного зображення магнітних полів зручно використовувати лінії магнітної індукції (силові лінії). Так як і для ліній напруженості електростатичного поля I вважають, що в кожній точці такої лінії ***вектор індукції*** $\ln\frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L}t$ направлений по дотичній, а густина цих ліній пропорційна до модуля вектора індукції в даній точці [4].

Магніти мають два полюси: ***північний*** (N) ***і південний*** (S). Однойменні полюси відштовхуються, а протилежні притягуються.

Прийнято вважати, що вектор індукції магнітного поля S направлений від північного полюса до південного (див. рис. 17.1, *а*). Якщо в магнітне поле помістити магнітну стрілку, то північний кінець стрілки вкаже напрям магнітного поля (див. рис. 17.1, *б*).

Важливим кроком у використанні магнетизму був винахід компаса – малої магнітної стрілки закріпленої біля середини на осі обертання. Така стрілка має здатність орієнтуватись вздовж магнітних силових ліній Землі, що обумовило її широке застосування для навігації.



а *б*

Рис. 17.1 – Магнітне поле штабового магніту

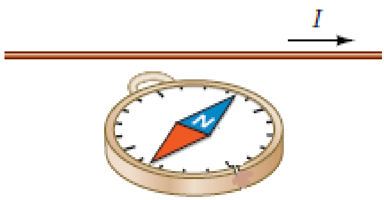


Рис. 17.2 – Взаємодія компаса і провідника із струмом

Довгий час природа магнетизму була невідома. Першим, хто пролив світло на походження магнітних сил був датський фізик Ерстед. В 1820 р. він дослідним шляхом виявив дію провідника з електричним струмом на магнітну стрілку (рис. 17.2).

У момент, коли по провіднику починав протікати струм, стрілка компаса починала рухатись і відхилялась від свого початкового напрямку. Сучасна наука стверджує, що магнітне поле виникає навколо рухомих зарядів. Тому будь-який провідник із струмом є джерелом магнітних полів.

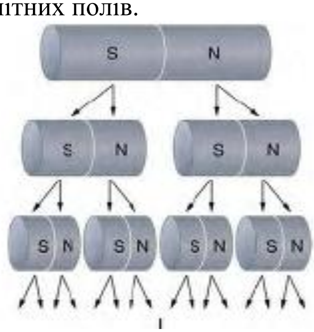


Рис. 17.3

В часи Ерстеда була поширена думка, що в природі існують магнітні заряди подібні до зарядів в електростатиці – монополі. Але спроби виявити такі заряди були безуспішними. Як би ми не намагались отримати окремий магнітний полюс шляхом поділу магніту навпіл – зробити це не вдасться (див. рис. 17.3). Магнітні полюси існують тільки попарно.

Це пояснюється тим, що в природних магнітах поле також породжується струмами, тільки ці струми мікроскопічні, вони зумовлені рухом електронів в атомах і молекулах речовини. Отже, навколо провідника із струмом утворюються магнітні силові лінії. Якщо провідник прямолінійний, то силові лінії мають форму кілець з центром на провіднику, причому ці кільця лежать в перпендикулярній до провідника площині (рис. 17.4). Для визначення напрямку ***вектора індукції магнітного поля*** $\vec{B}$ використовують ***правило правої руки*****:**

Якщо правою рукою обхопити провідник із струмом так, щоб великий палець вказував напрям струму, то решта зігнутих пальців вкажуть напрям індукції магнітного поля $\vec{B}$ (рис. 17.5).

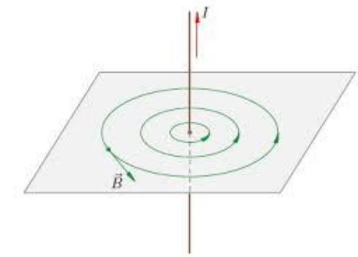


Рис. 17.4 – Магнітне поле прямолінійного провідника

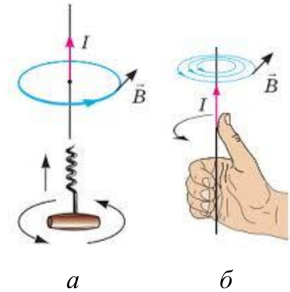


Рис. 17.5 – Правило правої руки провідника із струмом

Досить важливою виступає форма провідника у вигляді рамки (рис. 17.6). Якщо по рамці пропустити струм, то з рисунка видно, що лінії індукції всередині рамки підсиляться, вони будуть входити з однієї сторони рамки (це буде південний полюс S) і виходити з іншої сторони (північний полюс N). На рис. 17.6 (праворуч) показаний вигляд рамки із струмом зверху.

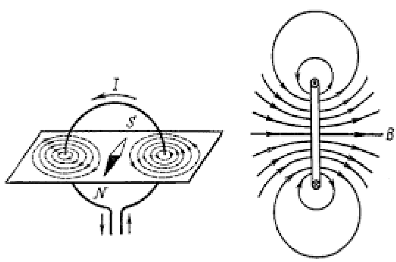


Рис. 17.6 – Магнітне поле витка із струмом

Ми отримали аналог магнітної стрілки. Така рамка також буде певним чином орієнтуватись в зовнішньому магнітному полі, а саме так, щоб північний полюс рамки вказував напрям зовнішнього поля.

Якщо поле рамки недостатньо сильне, можна об’єднати велику кількість таких рамок і отримати **котушку індуктивності або** соленоїд.

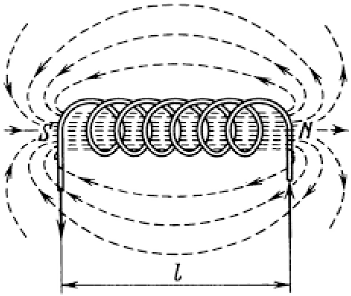


Рис. 17.7 – Магнітне поле котушки

Така конструкція дуже поширена в техніці (рис. 17.7). Кожен виток такої котушки – це окрема рамка із струмом.

Магнітні поля всіх витків додаються всередині. Вся котушка має два полюси, магнітне поле нагадує поле штабового магніту і може бути дуже великим за величиною, особливо якщо всередині помістити осердя з магнітного матеріалу.

Магнітне поле навколо провідника із струмом:

https://www.thephysicsaviary.com/Physics/Programs/Labs/FieldFromWire/

https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=mag_vodic&l=ru

Симуляція:
https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/magnets-and-electromagnets
(файл: magnets-and-electromagnets_en.jar)

17.2. Закони магнітного поля. Закон Ампера

Розглянемо провідник із струмом довільної форми, який знаходиться в зовнішньому магнітному полі (рис. 17.8). Якщо в провіднику протікає струм I, то навколо провідника утвориться магнітне поле.

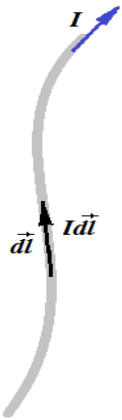


Рис. 17.8

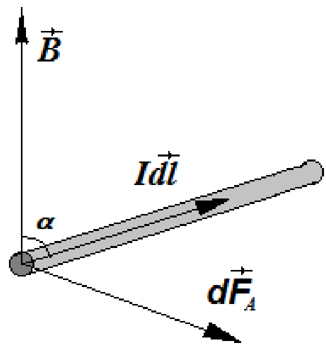


Рис. 17.9

Це поле буде взаємодіяти з зовнішнім полем, внаслідок чого на провідник почне діяти деяка сила, яка називається ***силою Ампера.*** Експерементально була встановлена залежність цієї сили для прямолінійного провідника (див. рис. 17.9) від: сили струму I; індукції зовнішнього магнітного поля $\vec{B}$, довжини відрізка провідника, на який ця сила діє l і кута між напрямом струму і індукцією зовнішнього поля α. Але ця залежність справедлива тільки для прямолінійного відрізка провідника. Тому, щоби знайти результуючу силу, що діє на провідник довільної форми в магнітному полі, його розбивають на невеликі ділянки такі, що в межах цих ділянок провідник можна вважати прямолінійним. Потім знаходять силу Ампера, яка діє на таку ділянку і додають векторно всі сили по всій довжині провідника для всіх ділянок. Отже, дамо деякі визначення перед тим, як написати формулу для сили Ампера.

Δ – *Елементом провідника* $d\vec{l}$ називають вектор, напрям якого збігається з напрямом струму в провіднику, а модуль дорівнює довжині цього елементу.

Δ – *Елементом струму* називають векторну величину, що дорівнює добутку *елементу провідника* на силу струму в ньому $Id\vec{l}$ (див. рис. 17.8).

Якщо елемент провідника такий, що його можна вважати прямолінійним і індукцію зовнішнього поля $\vec{B}$ в межах елементу однорідною, то ***елементарну силу Ампера*** $d\vec{F}_A$ можна знайти за формулою:

$$\boxed{d\vec{F}_A = [Id\vec{l} \times \vec{B}] = I \cdot [d\vec{l} \times \vec{B}].} \tag{17.1}$$

Ця формула математично виражає собою ***закон Ампера***:

Δ – *Закон Ампера* – сила $d\vec{F}_A$**, яка діє з боку зовнішнього магнітного поля на елемент провідника** $d\vec{l}$**, дорівнює векторному добутку елементу струму на індукцію поля** $\vec{B}$.

Напрям ***сили Ампера*** можна встановити за допомогою ***правила лівої руки*:**

Якщо долоню лівої руки розмістити так, щоб в неї входили лінії магнітної індукції, а чотири витягнуті пальці розмістити за напрямом електричного струму, то відведений на 90° великий палець покаже напрям сили Ампера, яка діє на провідник із струмом в магнітному полі (рис. 17.9–17.10).

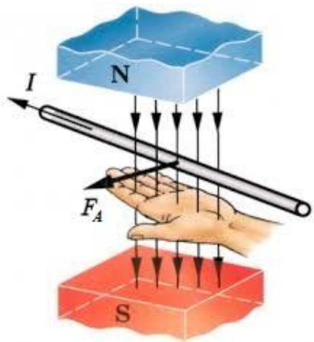


Рис. 17.10

Сила, яка діє на весь провідник із струмом в зовнішньомумагнітному полі є рівнодіючою всіх таких елементарних сил:

$$\vec{F}_A = \int_l d\vec{F}_A = \int_l I \cdot [d\vec{l} \times \vec{B}].$$

Якщо провідник прямолінійний і розташований в однорідному магнітному полі, то:

$$\boxed{\vec{F}_A = I \cdot [\vec{l} \times \vec{B}].} \qquad (17.2)$$

Для модуля сили Ампера можназаписати:

$$F_A = I \cdot l \cdot B \cdot \sin\alpha, \qquad (17.3)$$

де α кут між напрямом струму і вектором індукції $\vec{B}$ (рис. 17.9).

Закон Ампера дає змогу визначити числове значення індукції магнітного поля. Нехай прямолінійний провідник із струмом розміщений перпендикулярно до ліній індукції однорідного магнітного поля $\vec{B}$. Тоді $\alpha = 90^\circ$, $\sin\alpha = 1$, з формули (17.3) знаходимо:

$$B = \frac{F_A}{I \cdot l}. \qquad (17.4)$$

Δ – *Магнітна індукція* чисельно дорівнює відношенню сили Ампера, яка діє збоку магнітного поля на перпендикулярний полю відрізок провідника із струмом, до довжини цього відрізка і до сили струму в провіднику.

Одиниця магнітної індукції в СІ – Тесла: $[\vec{B}] = Òë = \frac{Í}{À \cdot ì}$.

Δ – *Одна тесла – магнітна індукція* такого однорідного магнітного поля, в якому на кожен метр провідника із струмом 1 А, розташованого перпендикулярно до силових ліній індукції магнітного поля $\vec{B}$, *діє сила в 1 Ньютон.*

Дія сили Ампера на рухомий провідник із струмом:

https://www.thephysicsaviary.com/Physics/Programs/Labs/RailGunLab/

17.3. Векторний і скалярний добутки векторів

Нехай задані два вектори $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$. Скалярний добуток цих векторів $(\vec{a}\cdot\vec{b})$ – це просто число, скаляр.

Векторний добуток $\vec{c} = [\vec{a}\times\vec{b}]$ – це також вектор.

Скалярний добуток можна визначити за формулою:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = a\cdot b\cdot\cos\alpha,$$

або через координати векторів:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

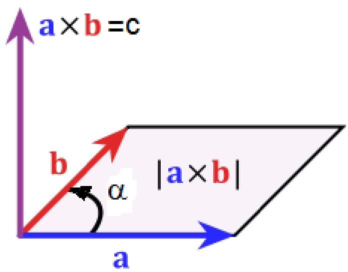


Рис. 17.11

Векторний добуток **– це вектор** $\vec{c}$, **розташований перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори** $\vec{a}$ **і** $\vec{b}$, **величина його дорівнює добутку модулів векторів множників на синус кута між ними:**

$$c = a\cdot b\cdot\sin\alpha.$$

і направлений він так, що якщо дивитись з вершини вектора $\vec{c}$, **то найкоротший поворот від *першого* вектора** $\vec{a}$ **до вектора** $\vec{b}$ **буде направлений проти часової стрілки**.

Зверніть увагу, що $[\vec{a}\times\vec{b}] = -[\vec{b}\times\vec{a}]$.

Орієнтацію вектора $\vec{c}$ можна визначити також за допомогою правила правої руки, яке наочно продемонстроване на рисунку нижче (зверху для $[\vec{a}\times\vec{b}]$ знизу для $[\vec{b}\times\vec{a}]$), рис. 17.12.

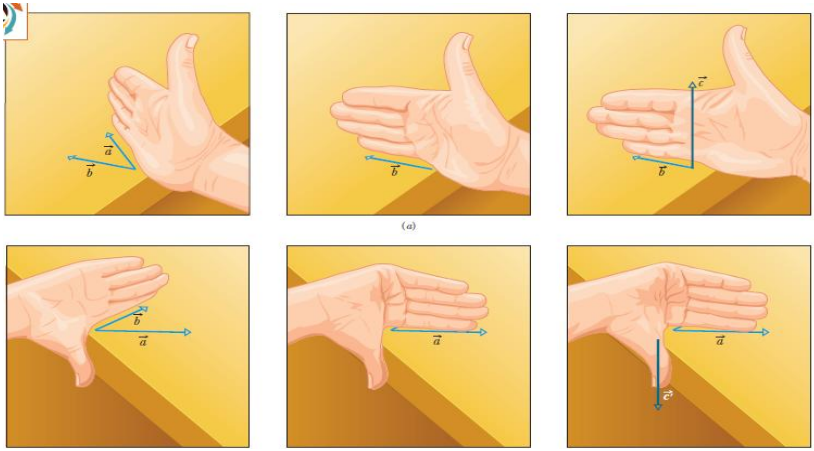


Рис. 17.12

Контрольні питання

1. Що таке магнітне поле, вектор магнітної індукції?
2. Як напрямлене магнітне поле постійного магніту?
3. Як формулюють правило правої руки?
4. Як формулюється закон Ампера? Що таке сила Ампера?
5. Як визначити напрямок сили Ампера?

Література: [**1**, с. 217–221; **4**, с. 160–161]

Лекція 18.
Рух заряджених частинок у магнітному полі

- **Сила Лоренца**
- **Магнітне поле Землі**

18.1. Сила Лоренца

Δ **– Сила, яка діє на окремий рухомий заряд в магнітному полі називається *силою Лоренца.***

Розрахуємо її величину. За законом Ампера на ***елемент струму*** $Id\vec{l}$ в магнітному полі з ***індукцією*** $\vec{B}$ діє сила:

$$d\vec{F}_A = [Id\vec{l} \times \vec{B}] = I \cdot [d\vec{l} \times \vec{B}] \qquad (18.1)$$

або

$$dF_A = I \cdot dl \cdot B \cdot \sin\alpha, \qquad (18.2)$$

де α – це кут між напрямком струму або швидкістю руху носіїв струму та індукцією магнітного поля.

Струм можна представити у вигляді:

$$I = j \cdot S,$$

де j – густина струму; S – поперечний переріз провідника.

Для густини струму справедлива формула:

$$j = q \cdot n \cdot \upsilon,$$

де q – заряд носія струму; $n = N/V$ – концентрація носіїв в одиниці об'єму; υ – середня швидкість впорядкованого руху носіїв струму.

Якщо підставити вираз для струму в рівняння (18.2), отримаємо:

$$dF_A = q \cdot n \cdot \upsilon \cdot S \cdot dl \cdot B \cdot \sin\alpha.$$

У цій формулі можна об'єднати деякі елементи, наприклад:

$S \cdot dl = dV$ – об'єм провідника, що відповідає елементу довжини dl; $n \cdot dV = dN$ – кількість носіїв в цьому об'ємі. Отже,

$$dF_A = q \cdot \upsilon \cdot dN \cdot B \cdot \sin\alpha.$$

Якщо на елемент провідника з dN носіями діє сила Ампера dF_A, то сила яка діє на один рухомий заряд, або величина сили Лоренца дорівнюватиме $F_Ë = dF_A / dN$ або

$$F_{\text{Ё}} = q \cdot \upsilon \cdot B \cdot \sin\alpha. \qquad (18.3)$$

Якщо крім величини за модулем врахувати також і напрямок сили, то отримаємо рівняння:

$$\boxed{\vec{F}_{\text{Ё}} = q \cdot [\vec{\upsilon} \times \vec{B}].} \qquad (18.4)$$

Це і є ***вираз для сили Лоренца***, або сили що діє на рухомий заряд в магнітному полі.

Сила Лоренца завжди перпендикулярна до швидкості частинки, тому вона не виконує роботи. Також, як видно з формули (18.3), якщо частинка рухається вздовж ліній індукції $\alpha = 0^{\circ}$ або проти ліній $\alpha = 180^{\circ}$, то сила Лоренца на таку частинку ***діяти не буде***. Ні напрям, ні величина швидкості змінюватись не будуть. Якщо в магнітне поле влетять дві частинки паралельно одна одній, але із зарядами різних знаків, то сила Лоренца буде діяти на них в протилежних напрямках (рис. 18.1). Якщо направити пучок частинок, які утворились, наприклад, під час радіоактивного розпаду в камеру з магнітним полем (рис. 18.2), то буде відбуватись розділення частинок на два протилежних напрямки відповідно до їх заряду.

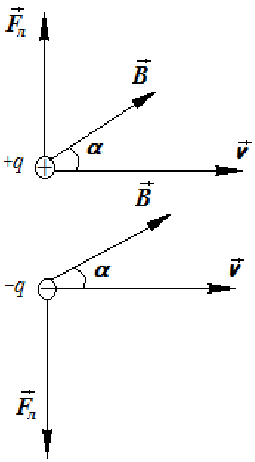


Рис. 18.1

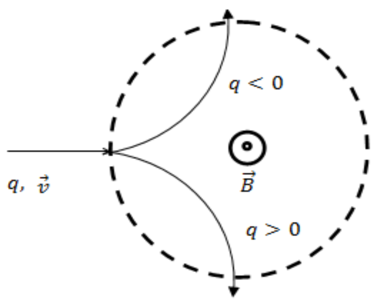


Рис. 18.2

Розглянемо більш докладно рух заряджених частинок коли їх швидкість перпендикулярна магнітному полю $\alpha = 90^{\circ}$ (рис. 18.3) або направлена під довільним кутом до ліній індукції магнітного поля (рис. 18.4).

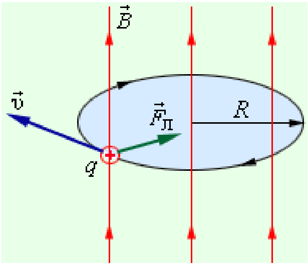


Рис. 18.3

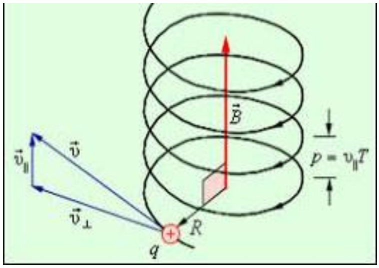


Рис. 18.4

Якщо швидкість перпендикулярна полю, то сила Лоренца, яка завжди перпендикулярна до швидкості частинки, буде доцентровою силою і частинка буде рухатись по колу деякого радіуса R (див. рис. 18.3). В цьому випадку:

$$q \cdot \upsilon \cdot B = \frac{m \cdot \upsilon^2}{R}.$$

Звідки для радіуса R траєкторії отримуємо формулу:

$$R = \frac{m \cdot \upsilon}{q \cdot B}. \tag{18.5}$$

Радіус тим більший, чим більша маса частинки і її швидкість. Якщо поле сильніше або частинка має більший заряд, то радіус буде меншим. Якщо частинка влітає в магнітне поле під довільним кутом (див. рис. 18.4), то її швидкість можна розкласти на дві складові – перпендикулярну і паралельну полю: $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_{\parallel} + \vec{\upsilon}_{\perp}$.

Перпендикулярна до поля складова зумовить рух по колу радіуса:

$$R = \frac{m \cdot \upsilon_{\perp}}{q \cdot B}.$$

Паралельна складова призведе до дрейфу частинки вздовж ліній індукції поля. В сумі ми отримаємо рух зарядженої частинки по спіралі навколо ліній магнітного поля. Частинка обертається по колу рівномірно, тому період її обертання:

$$T = \frac{2\pi \cdot R}{\upsilon_{\perp}} = \frac{2\pi \cdot m}{q \cdot B}.$$

Отже, крок спіралі або відстань між її витками:

$$p = \upsilon_{\parallel} \cdot T = \frac{2\pi \cdot m}{q \cdot B} \upsilon_{\parallel}.$$

18.2. Магнітне поле Землі

Подібним чином рухаються заряджені частинки, що випромінюються Сонцем і попадають в магнітне поле Землі (рис. 18.5).

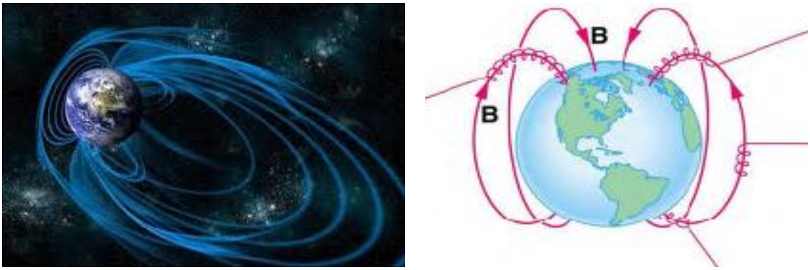


Рис. 18.5 – Магнітне поле Землі

Рис. 18.6 – Полярне сяйво

Перпендикулярна складова швидкості змушує частинки обертатись навколо ліній індукції магнітного поля, а паралельна лініям складова швидкості змушує ці частинки дрейфувати вздовж магнітних ліній до полюсів. Там частинки входять в атмосферу і іонізують атоми повітря викликаючи полярні сяйва (рис. 18.6).

Магнітне поле Землі захищає планету від руйнівної дії потоків космічної радіації і є надійним щитом для всіх живих істот на ній.

Заряд в магнітному полі:

https://www.thephysicsaviary.com/Physics/Programs/Labs/ChargeinMagFieldLab/

https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=mag_wehnelt&l=ru

Контрольні питання

1. Як визначають силу Лоренца?
2. Як можна знайти напрямок сили Лоренца?
3. Як знайти траєкторію руху заряджених частинок коли їх швидкість перпендикулярна магнітному полю?
4. Яке значення для живих організмів має магнітне поле Землі?

Література: [**1**, с. 222–224; **4**, с. 164–166]

Лекція 19.
Магнітне поле постійного електричного струму

- **Магнітне поле в речовині**
- **Закон Біо–Савара–Лапласа**
- **Магнітне поле відрізка прямолінійного провідника із струмом**
- **Магнітне поле в центрі колового струму**
- **Взаємодія паралельних провідників із струмом**

19.1. Магнітне поле в речовині

Якщо провідник із струмом помістити в різні середовища, то створювана ним індукція магнітного поля буде різною. У всіх речовинах існують мікроскопічні струми утворені рухами електронів в атомах і молекулах. Ці струми створюють свої магнітні поля, які накладаються на поле провідника і змінюють це поле [1, 3].

Вектор магнітної індукції $\vec{B}$ характеризує результуюче магнітне поле в речовині створене як мікрострумами атомів і молекул так і макроскопічними струмами.

Для характеристики магнітного поля створеного макрострумом вводять ***вектор напруженості магнітного поля*** $\vec{H}$***, який не залежить від властивостей середовища.***

Зв'язок між векторами $\vec{B}$ та $\vec{H}$ має вигляд:

$$\vec{B} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}, \tag{19.1}$$

де μ_0 – ***магнітна стала*:**

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Í /À}^2 = \text{Ãí /ì}\ .$$

μ – ***відносна магнітна проникність середовища***, число, яке показує в скільки разів магнітна індукція $\vec{B}$ у середовищі більша ніж магнітна індукція в вакуумі $\vec{B}_0$:

$$\mu = \frac{B}{B_0}.$$

Для вакууму $\mu = 1$.

Напруженість магнітного поля $\vec{H}$ вимірюють в амперах, поділених на метр (А/ì): $[H] = \text{À/ì}$.

Оскільки у вакуумі

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0},$$

то 1 А/м – це напруженість такого поля, магнітна індукція якого в вакуумі дорівнює $B = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Òë.

19.2. Закон Біо–Савара–Лапласа

Цей закон дає змогу визначити індукцію магнітного поля, створену елементом струму у будь-якій точці простору. Положення цієї точки задається радіусом-вектором $\vec{r}$, проведеним від елементу струму в цю точку (рис. 19.1):

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu \cdot \mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot [d\vec{l} \times \vec{r}\,]}{r^3},} \qquad (19.2)$$

де $I \cdot d\vec{l}$ – ***елемент струму***.

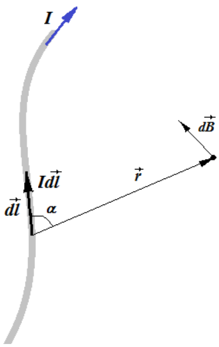


Рис. 19.1 – Поле елемента струму

Для модуля вектора індукції отримуємо:

$$dB = \frac{\mu \cdot \mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin\alpha}{r^2}, \qquad (19.3)$$

тут α – кут між елементом струму і радіусом-вектором, проведеним від цього елементу в точку, де визначається поле. Для напруженості магнітного поля $\vec{H}$, відповідно:

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot [d\vec{l} \times \vec{r}\,]}{r^3}. \qquad (19.4)$$

Щоб знайти в деякій точці простору сумарне поле яке створює там весь провідник, а не його малий елемент, потрібно за принципом суперпозиції, інтегрувати формулу Біо–Савара–Лапласа (19.3) по всій довжині провідника:

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B}.$$

Розглянемо деякі приклади.

19.3. Магнітне поле відрізка прямолінійного провідника із струмом

Із закону Біо–Савара–Лапласа для напруженості магнітного поля в точці A, яку створює елемент струму провідника $I d\vec{l}$:

$$d\vec{B}_A = \frac{\mu \cdot \mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot [d\vec{l} \times \vec{r}\,]}{r^3}$$

або

$$dB_A = \frac{\mu \cdot \mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin\alpha}{r^2},$$

Тоді

$$B_A = \int_L dB_A = \frac{\mu \cdot \mu_0}{4\pi} \cdot \int_L \frac{I \cdot dl \cdot \sin\alpha}{r^2}.$$

Щоб інтегрувати цей вираз, зведемо всі змінні величини під знаком інтеграла до однієї – кута α (рис. 19.2):

$$dl = \frac{dx}{\sin\alpha} = \frac{r \cdot d\alpha}{\sin\alpha}.$$

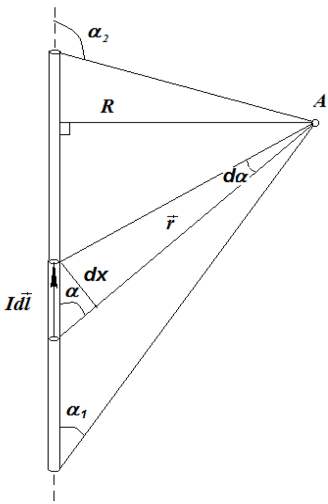


Рис. 19.2

Крім того:

$$r = \frac{R}{\sin\alpha}.$$

Підставимо ці формули в інтеграл:

$$B_A = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \int_L \frac{\sin\alpha \cdot d\alpha}{R} = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot R}(-\cos\alpha)\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2},$$

або результат:

$$\boxed{B_A = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot R}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2),} \quad (19.5)$$

де R – відстань від точки де визначають поле до провідника; α_1 – початковий кут між відрізком провідника і радіусом вектором проведеним в точку A, де визначають поле α_2 – кінцевий кут.

До прикладу, якщо відрізок провідника необмежений, то тоді $\alpha_1 = 0^\circ$ та $\alpha_2 = 180^\circ$.

Якщо $\cos\alpha_1 = 1$ і $\cos\alpha_2 = -1$, тоді поле необмеженого відрізка провідника із струмом I в будь-якій точці на відстані R від провідника буде визначатись формулою:

$$\boxed{B_A = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot R}.} \tag{19.6}$$

Відповідно:

$$H_A = \frac{I}{2\pi \cdot R}. \tag{19.7}$$

Інтерактивна симуляція:

https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=mag_vodic&l=ua

19.4. Магнітне поле в центрі колового струму

Знайдемо індукцію та напруженість магнітного поля в центрі круглого витка радіуса R, по якому тече струм I (рис. 19.3).

$$d\vec{B}_O = \frac{\mu \cdot \mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot [d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}$$

або

$$dB_O = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin\alpha}{r^2} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{R^2}.$$

Тут $\alpha = 90^\circ$, тому $\sin\alpha = 1$, також $r = R$, тоді

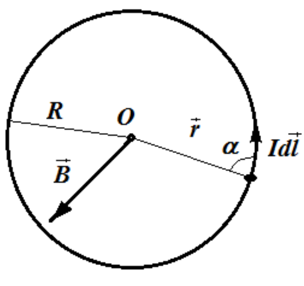


Рис. 19.3

$$B_O = \int_L dB = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot R^2} \cdot \int_L dl,$$

але інтеграл в цій формулі – це просто довжина кола:

$$\int_L dl = 2\pi \cdot R.$$

Отже, ***індукція магнітного поля в центрі круглого витка радіуса*** R ***по якому тече струм*** I:

$$\boxed{B_O = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I}{2R}.} \quad (19.8)$$

Відповідно, ***напруженість магнітного поля***:

$$H_O = \frac{I}{2R}. \quad (19.9)$$

Звичайно, направлено це поле перпендикулярно площині витка (в його центрі)

19.5. Взаємодія паралельних провідників із струмом

Як свідчать експериментальні дані, якщо по паралельним провідникам пропустити струм, то вони будуть взаємодіяти. Причому якщо струм направлений однаково, то провідники притягуються, якщо ж ні, то відштовхуються (рис. 19.4). Причину цього явища можна коротко пояснити наступним чином: провідники із струмом створюють навколо себе магнітне поле. Тому, кожен із них знаходиться в магнітному полі іншого провідника. За законом Ампера на провідник із струмом в магнітному полі діє сила Ампера.

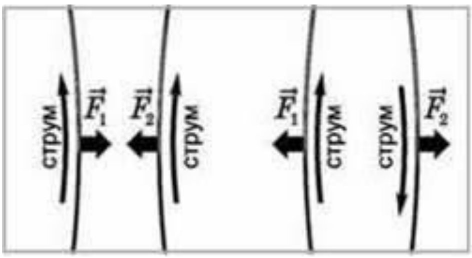


Рис. 19.4

Сила Ампера і є тією силою, що діє на провідник в цьому випадку. Звичайно, за третім законом Ньютона що діють на провідники мають однакову величину і протилежний напрямок:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

Отже, визначимо величину цих сил (рис. 19.5). За законом Біо–Савара–Лапласа перший провідник створює магнітне поле з індукцією $\vec{B}_1$ в місці розташування другого провідника (на відстані R від першого).

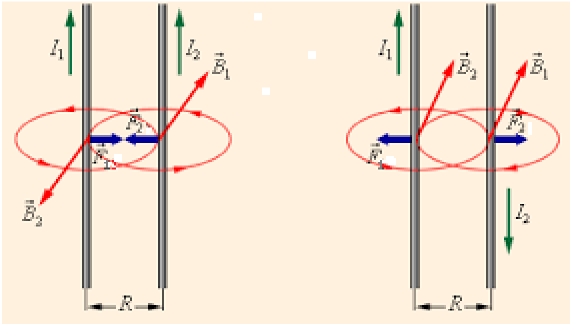


Рис. 19.5

Значення магнітної індукції B_1 визначають за формулою (19.6) для індукції нескінченого провідника із струмом, яка в нашому випадку набуде вигляду:

$$B_1 = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot R}. \qquad (19.10)$$

Напрям цього вектора можна визначити за допомогою правила правої руки. Отже, другий провідник із струмом I_2 знаходиться в магнітному полі першого провідника з індукцією $\vec{B}_1$, відповідно на нього буде діяти сила Ампера, величину якої можна визначити за формулою (17.2) – ***закон Ампера***:

$$\vec{F}_2 = I_2 \cdot [\vec{l} \times \vec{B}_1].$$

Напрям сили визначається правилом лівої руки. Оскільки, як видно з рис. 19.5, напрями струму і магнітної індукції взаємно перпендикулярні, то кут між ними $\alpha = 90^\circ$ і для величини сили Ампера можна записати:

$$F_2 = I_2 \cdot l \cdot B_1. \qquad (19.11)$$

Підставимо в формулу (19.11) значення магнітної індукції із формули (19):

$$\boxed{F_2 = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot l}{2\pi \cdot R}.} \qquad (19.12)$$

Таку ж величину матиме і сила, що діє на перший провідник із струмом, тільки напрямок її буде протилежний. Отже, ми ***отримали***

силу взаємодії паралельних відрізків провідників із струмами I_1 ***і*** I_2 ***довжини*** l ***на відстані*** R.

На основі взаємодії провідників із струмом введено еталон величини струму в системі СІ – ***Ампер.***

∆ **–** ***Один Ампер*** **– сила постійного струму, який при проходженні по двох прямолінійних паралельних провідниках нескінченої довжини і малого поперечного перерізу розміщених у вакуумі на відстані 1 м один від одного, викликає між ними силу взаємодії в** $2\cdot 10^{-7}$ Í **на кожен метр довжини.**

З цього визначення випливає значення μ_0 – ***магнітної сталої***

$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Í /À^2 = Ãí /ì .

Взаємодія паралельних провідників із струмом:
https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/templateimg.php?s=ele_amper&l=ua

Контрольні питання

1. Як визначити величину магнітного поля в речовині?
2. Як формулюється закон Біо–Савара–Лапласа?
3. Як знайти магнітне поле відрізка прямолінійного провідника?
4. Як знайти магнітне поле в центрі колового струму?
5. Як визначити силу взаємодії паралельних провідників із струмом?

Література: [**1**, с. 229–242; **4**, с. 158–160]

Лекція 20.
Закон (теорема) повного струму

- **Циркуляція вектора індукції магнітного поля**
- **Приклади застосування закону повного струму для розрахунку магнітного поля**

20.1. Циркуляція вектора індукції магнітного поля

Δ – ***Циркуляцією вектора індукції магнітного поля*** $\vec{B}$ називають інтеграл: $\oint_L (\vec{B} \cdot d\vec{l})$.

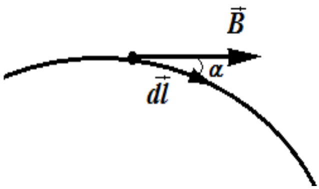


Рис. 20.1

В цій формулі $d\vec{l}$ – ***вектор елементарної довжини контуру***. На рис. 20.1 зображено частину деякого контуру L довільної форми і вектор індукції магнітного поля $\vec{B}$ в деякій точці цього контуру.

З рис. 20.1 видно, що скалярний добуток, що стоїть під знаком інтеграла в визначенні циркуляції:

$$(\vec{B} \cdot d\vec{l}) = B \cdot dl \cdot \cos\alpha = B_l \cdot dl,$$

де $B_l = B \cdot \cos\alpha$ – проекція вектора індукції магнітного поля $\vec{B}$ на напрям елементу контуру $d\vec{l}$.

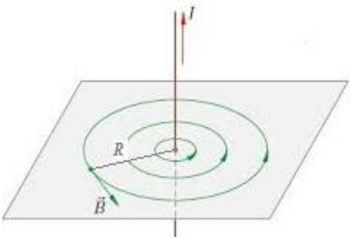


Рис. 20.2

Розглянемо прямолінійний провідник із струмом I (рис. 20.2). Розрахуємо циркуляцію магнітного поля $\vec{B}$ вздовж колового контуру радіуса R з центром на провіднику. В цьому випадку, вектор індукції завжди напрямлений по дотичній до колового контуру і його величина не змінюється вздовж всього контуру.

Напрям ***елементарної довжини контуру*** $d\vec{l}$ в кожній точці контуру збігається з напрямом ліній індукції магнітного поля $\vec{B}$, тобто кут між ними $\alpha = 0$. Отже, циркуляція індукції магнітного поля $\vec{B}$ вздовж колового контуру радіуса R навколо провідника із струмом *I*:

$$\oint_L (\vec{B} \cdot d\vec{l}) = \oint_L B \cdot dl \cdot \cos\alpha = \oint_L B \cdot dl.$$

Підставимо в цю формулу вираз для індукції магнітного поля провідника із струмом I на відстані R з формули (19.6):

$$B_R = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot R}.$$

Отже, $\oint_L (\vec{B} \cdot d\vec{l}\,) = \oint_L \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot R} \cdot dl = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot R} \oint_L dl.$

Тут всі сталі величини винесені за знак інтеграла. Однак, чому дорівнює інтеграл $\oint_L dl$ в цій формулі? Це просто сума по всій довжині контуру елементарних довжин dl. Тому, цей інтеграл буде дорівнювати довжині контуру: $\oint_L dl = L = 2\pi \cdot R.$

Отже, ***циркуляція індукції магнітного поля*** $\vec{B}$ ***вздовж колового контуру радіуса*** R ***навколо провідника із струмом*** *I*:

$$\oint_L (\vec{B} \cdot d\vec{l}\,) = \mu \cdot \mu_0 \cdot I. \qquad (20.1)$$

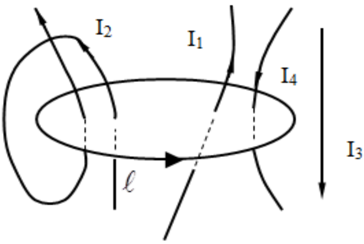


Рис. 20.3

Можна довести, що значення циркуляції не залежить від форми контуру, а залежить тільки від тих струмів, які охоплює даний контур (рис. 20.3). Тобто, якщо контур охоплює не один струм, а декілька, то циркуляція буде дорівнювати алгебраїчній сумі струмів помноженій на $\mu\mu_0$.

Додатним вважають струм, напрям якого утворює з напрямом контуру правогвинтову систему.

Наприклад, для рис. 20.3:

$$\oint_L (\vec{B} \cdot d\vec{l}\,) = \mu \cdot \mu_0 (I_1 + 2 \cdot I_2 - 0 \cdot I_3 - I_4).$$

Цей закон називають ***законом повного струму:***

Δ – ***Циркуляція вектора індукції магнітного поля постійного електричного струму вздовж довільного замкненого контуру дорівнює алгебраїчній сумі струмів, що охоплює цей контур, помноженій на магнітну сталу*** μ_0 ***і відносну магнітну проникність середовища*** μ.

$$\boxed{\oint_L (\vec{B} \cdot d\vec{l}\,) = \mu \cdot \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i,} \qquad (20.2)$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Ãí /ì .

Для вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}$:

$$\boxed{\oint_L (\vec{H} \cdot d\vec{l}\,) = \sum_{i=1}^{N} I_i} \qquad (20.3)$$

20.2. Приклади застосування закону повного струму для розрахунку магнітного поля

Магнітне поле соленоїда

Соленоїд **–** котушка з багатьох витків (рис. 20.4). Такі котушки широко застосовують в радіотехніці. Один виток із струмом створює навколо себе магнітне поле, формула (19.8):

$$B_O = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I}{2R}.$$

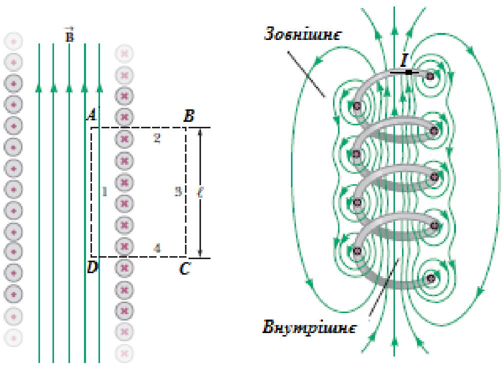


Рис. 20.4 – Магнітне поле соленоїда

Якщо таких витків багато, то і магнітне поле буде значно більшим, особливо якщо розмістити всередині магнітне осердя.

Розрахуємо індукцію магнітного поля всередині соленоїда. Щоб знехтувати неоднорідністю поля на краях котушки, будемо вважати, що її довжина набагато більша діаметра. Як видно з рис. 20.4, магнітне поле між витками практично відсутнє, бо воно напрямлене в протилежну сторону між сусідніми витками і взаємно компенсується. Магнітне поле зосереджується всередині соленоїда і виходить з нього назовні тільки з його країв, замикаючи свої силові лінії ззовні в області, що має розміри набагато більші, чим внутрішній об'єм котушки. Тому назовні магнітна індукція набагато слабша, ніж всередині.

Оберемо замкнений контур інтегрування $ABCD$ (рис. 20.4). Тоді циркуляція по контуру буде розбита на чотири інтеграли:

$$\oint_{ABCD} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_{AB} \vec{B}\cdot d\vec{l} + \oint_{BC} \vec{B}\cdot d\vec{l} + \oint_{CD} \vec{B}\cdot d\vec{l} + \oint_{DA} \vec{B}\cdot d\vec{l}.$$

Інтеграли по AB і CD дорівнюють нулю, тому що вектори $d\vec{l}$ та $\vec{B}$ взаємно перпендикулярні $\cos\alpha = \cos 90^\circ = 0$. Інтеграл по BC також ≈ 0 (приблизно нульовий), тому що BC можна вибрати на великій відстані від соленоїда і поле $\vec{B}$ має там невелике значення. Лишається інтеграл вздовж сторони DA всередині соленоїда. Як видно з рис. 20.4, напрям індукції магнітного поля і напрям ділянки контуру інтегрування DA всередині паралельні $\cos\alpha = \cos 0^\circ = 1$. Отже:

$$\oint_{ABCD} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_{DA} \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cdot l,$$

де $l = |DA|$, $B = |\vec{B}|$ – величина індукції магнітного поля всередині соленоїда. Якщо для контуру $ABCD$ застосувати теорему повного струму, то отримаємо:

$$\oint_{ABCD} \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cdot l = \mu\cdot\mu_0\cdot N\cdot I,$$

тут N – число витків із струмом I що перетинають площу контуру $ABCD$. Якщо довжину контура інтегрування поширити на всю довжину котушки, тобто вважати що l – довжина котушки і N – число витків котушки, то для ***індукції магнітного поля всередині соленоїда*** отримаємо формулу:

$$\boxed{B = \frac{\mu\cdot\mu_0\cdot N\cdot I}{l}.} \tag{20.4}$$

Для ***напруженості магнітного поля*** $\vec{H}$:

$$\boxed{H = \frac{NI}{l}.} \tag{20.5}$$

Магнітне поле тороїда

Тороїд **–** це котушка з багатьох витків намотана на осерді у вигляді кільця (рис. 20.5). Котушки такої форми дуже розповсюджені в радіотехніці. На відміну від соленоїдів, магнітне поле зосереджено повністю в середині тороїда, що дозволяє покращити багато технічних характеристик, особливо якщо використовувати спеціальне магнітне осердя всередині тороїда.

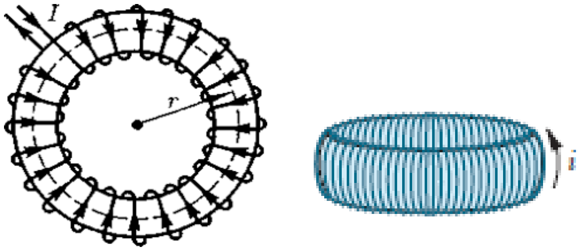


Рис. 20.5

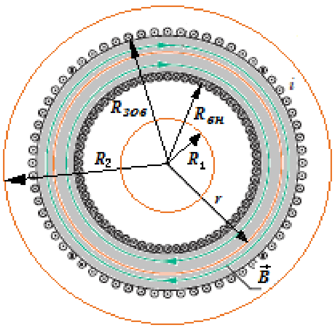


Рис. 20.6

Силові лінії індукції магнітного поля тороїда мають форму кілець, що знаходяться всередині витків (блакитні кола на рис. 20.6), тому відсутнє розсіювання магнітного поля в просторі.

Розглянемо три кругових контури (рис. 20.6 – помаранчевий колір) внутрішній r, зовнішній R_2 і контур, який весь знаходиться всередині тороїда R_1.

Для контуру радіусу R_1 циркуляція вектора $\vec{B}$ вздовж нього дорівнює нулю згідно з теоремою повного струму, бо жоден струм не перетинає площину певного контуру.

Отже, всередині тороїда ($0 < r < R_{âí}$, де $R_{âí}$ – внутрішній радіус обмотки) магнітне поле відсутнє. Для зовнішнього контуру R_2 циркуляція також дорівнює нулю, тому що цей контур охоплює однакове число провідників з додатним і від’ємним струмом. Ці струми перетинають площину контуру в протилежних напрямках (рис. 20.6). Для контуру радіуса r, що знаходиться всередині витків, напишемо теорему повного струму:

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cdot\oint_L dl = B\cdot L = \mu\cdot\mu_0\cdot N\cdot I.$$

Тут враховано, що величина вектора $\vec{B}$ однакова вздовж контуру інтегрування, який як і лінії індукції також є колом, крім того в кожній точці цього контуру вектори $\vec{B}$ та $d\vec{l}$ напрямлені паралельно. $L = 2\pi \cdot r$ – довжина контуру інтегрування.

Отже, для ***величини індукції магнітного поля всередині тороїда*** отримуємо формулу:

$$\boxed{B = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot N \cdot I}{2\pi \cdot r},} \tag{20.6}$$

де N – число витків; I – струм, r – відстань контуру від центру.

Як видно з формули (20.6), індукція буде найбільша для внутрішнього радіусу обмотки $R_{âí}$ і менша біля зовнішнього краю $R_{çî â}$. Поза межами інтервалу $R_{âí} < r < R_{çî â}$ індукція буде нульовою.

Контрольні питання

1. Що таке циркуляція вектора індукції магнітного поля?
2. Як формулюється закон повного струму?
3. Як визначити магнітне поле соленоїда?
4. Як визначити магнітне поле тороїда?

Література: [**1**, с. 233–242; **4**, с. 163–164]

Лекція 21.
Магнітний потік. Робота поля

- **Магнітний потік.**
  Теорема Гауса–Остроградського для індукції магнітного поля
- **Робота з переміщення провідника і контуру із струмом у магнітному полі**
- **Робота з переміщення у магнітному полі замкненого контуру із струмом**

21.1. Магнітний потік. Теорема Гауса–Остроградського для індукції магнітного поля

Δ – ***Потоком вектора магнітної індукції*** $\vec{B}$ ***через площадку*** $d\vec{S}$ ***називають скалярну величину, яка дорівнює*:**

$$d\hat{O} = (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = B \cdot dS \cdot \cos\alpha = B_n \cdot dS, \qquad (21.1)$$

де вектор $d\vec{S}$ – вектор елементу поверхні dS (рис. 21.1):

$$d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS,$$

тут $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до поверхні dS; B_n – проекція вектора $\vec{B}$ на напрям нормалі $\vec{n}$:

$$B_n = B \cdot \cos\alpha,$$

де α – кут між вектором нормалі і вектором магнітної індукції $\vec{B}$.

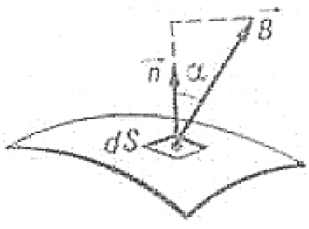


Рис. 21.1

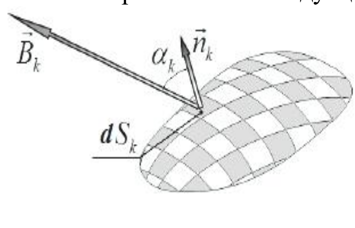


Рис. 21.2

Визначення таке саме як і для потоку вектора напруженості електростатичного поля $\vec{E}$. Щоб знайти потік вектора магнітної індукції через довільну поверхню S, цю поверхню розбивають на елементарні поверхні dS_k, щоб виконувались дві вимоги в межах цих малих ділянок (див. рис. 21.2):

1) dS_k – поверхню можна вважати плоскою;

2) dS_k – вектор індукції $\vec{B}_k$ можна вважати сталим.

Якщо ці вимоги виконані, то для кожної ділянки можна порахувати елементарний потік за формулою (21.1) і оскільки елементарні потоки $d\hat{O}_k$ скалярні величини, їх можна додати для знаходження повного потоку через велику поверхню S, що математично записується у вигляді:

$$\boxed{\hat{O} = \int_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = \int_S B_n \cdot dS.} \qquad (21.2)$$

Якщо поверхня S замкнена, то $\hat{O} = \oint_S (\vec{B} \cdot d\vec{S})$.

У системі СІ магнітний потік вимірюють у ***веберах***:

$$[\hat{O}] = \text{Òë} \cdot \text{ì}^2 = \text{Âá}.$$

Δ – ***Теорема Гауса–Остроградського для магнітного поля***: ***магнітний потік крізь довільну замкнену поверхню дорівнює нулю***:

$$\boxed{\hat{O} = \oint_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = 0.} \qquad (21.3)$$

Ця теорема є наслідком того, що в природі нема магнітних зарядів і лінії індукції магнітного поля є замкненими.

Для порівняння теорема Гауса–Остроградського для потоку електростатичного поля через замкнену поверхню:

$$\hat{O} = \oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} Q_i.$$

21.2. Робота з переміщення провідника і контуру із струмом у магнітному полі

На провідник із струмом в магнітному полі буде діяти сила Ампера. Якщо ж провідник не закріплений і може рухатись, то під дією сили Ампера він буде переміщуватись, під час чого ця сила буде виконувати певну роботу (за рахунок енергії джерела струму). Розглянемо провідник довжиною l із струмом I (див. рис. 21.3).

Нехай контур струму перпендикулярний до напряму індукції поля $\vec{B}$. Права частина провідника може вільно переміщатись вздовж контуру.

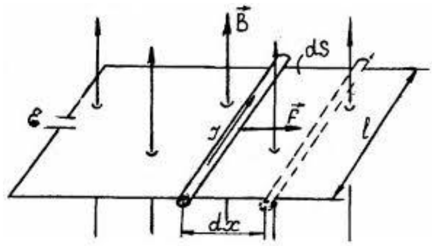


Рис. 21.3

В цьому випадку сила Ампера буде напрямлена вправо (правило лівої руки), її величина буде (формула (17.2)), $\vec{F}_A = I \cdot [\vec{l} \times \vec{B}]$):

$$F_A = I \cdot B \cdot l.$$

Якщо під дією цієї сили провідник переміститься на відстань dx, то величина роботи:

$$dA = F_A \cdot dx = I \cdot B \cdot l \cdot dx = I \cdot B \cdot dS,$$

але $B \cdot dS = d\hat{O}$ – потік вектора індукції магнітного поля через поверхню, яку описав провідник під час свого руху.

$$\boxed{dA = I \cdot d\hat{O}.} \tag{21.4}$$

Δ – ***Робота під час переміщення в ньому провідника з постійним струмом, дорівнює добутку сили струму на величину магнітного потоку крізь поверхню, яку описує провідник під час свого руху.***

Дія сили Ампера на рухомий провідник із струмом:

https://www.thephysicsaviary.com/Physics/Programs/Labs/RailGunLab/

21.3. Робота з переміщення у магнітному полі замкненого контуру із струмом

Розглянемо замкнений контур $ABCD$ із струмом I в зовнішньому магнітному полі з індукцією $\vec{B}$ перпендикулярною площині контуру і напрямленою від спостерігача (рис. 21.4). Нехай контур перемістився в положення $A'B'C'D'$. Розіб’ємо контур на два провідника ABC та CDA, як показано на рисунку. Тоді робота при переміщенні цілого контуру:

$$dA = dA_1 + dA_2, \tag{21.5}$$

де dA_1 – робота з переміщення провідника CDA (додатна); dA_2 – робота з переміщення провідника ABC (від'ємна).

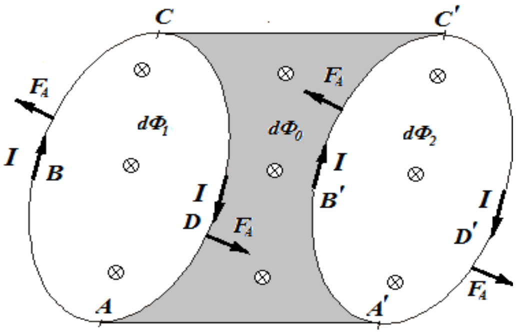


Рис. 21.4

Робота з переміщення провідника CDA буде дорівнювати добутку сили струму в ньому на потік індукції магнітного поля, який він перетнув:

$$dA_1 = I \cdot (d\hat{O}_0 + d\hat{O}_2). \tag{21.6}$$

Аналогічно, для провідника ABC:

$$dA_2 = -I \cdot (d\hat{O}_1 + d\hat{O}_0). \tag{21.7}$$

Підставимо вирази (21.6) та (21.7) у формулу (21.5):

$$dA = dA_1 + dA_2 = I \cdot (d\hat{O}_0 + d\hat{O}_2) - I \cdot (d\hat{O}_1 + d\hat{O}_0) = I \cdot (d\hat{O}_2 - d\hat{O}_1),$$

або:

$$\boxed{dA = I \cdot d\hat{O},} \tag{21.8}$$

де $d\hat{O} = d\hat{O}_2 - d\hat{O}_1$ – ***зміна магнітного потоку через поверхню контуру***.

Інтегруючи формулу (21.8) отримаємо:

$$\boxed{A = I \cdot \Delta\hat{O}.} \tag{21.9}$$

Δ – ***Робота, при переміщенні в магнітному полі замкненого контуру з постійним струмом*** I ***дорівнює добутку сили струму на зміну магнітного потоку крізь поверхню, обмежену контуром.***

Слід відмітити, що формула (21.9) справедлива також і для довільної деформації контуру із струмом. Якщо є зміна потоку індукції магнітного поля через поверхню контуру внаслідок деформації, то на таку деформацію додатково потрібно затратити роботу, яка визначається формулою (21.9). Головне, щоб в контурі і в рухомому провіднику зовнішнє джерело підтримувало струм сталим.

Контрольні питання

1. Як визначають магнітний потік?
2. Як формулюється теорема Гауса–Остроградського для індукції магнітного поля?
3. Як розрахувати роботу з переміщення провідника і контуру із струмом у магнітному полі?

Література: [**1**, с. 235–250; **4**, с. 169–170]

Лекція 22.
Електромагнітна індукція. Правило Ленца

- **Явище електромагнітної індукції Фарадея. Правило Ленца**
- **Дослідження явища електромагнітної індукції**

22.1. Явище електромагнітної індукції Фарадея. Правило Ленца

У 1831 р. Майклу Фарадею вдалось за допомогою змінного магнітного поля отримати електричний струм. Для того, щоб отримати струм потрібне замкнене провідне коло.

Δ – **Струм, який виникає при зміні магнітного потоку через замкнений провідний контур називається *індукційним.***

За допомогою чисельних і різноманітних експериментів Фарадей встановив:

1. ***Індукційний струм*** у замкненому провідному колі виникає всякий раз при зміні магнітного потоку через цей контур (нерухомий магніт струм не викликає, рис. 22.1).
2. Напрям ***індукційного струму*** в контурі залежить від того збільшується магнітний потік через контур чи зменшується.
3. Сила ***індукційного струму*** залежить від того, як швидко змінюється магнітний потік через контур.

Інтерактивна симуляція:
https://phet.colorado.edu/en/simulation/faradays-law)

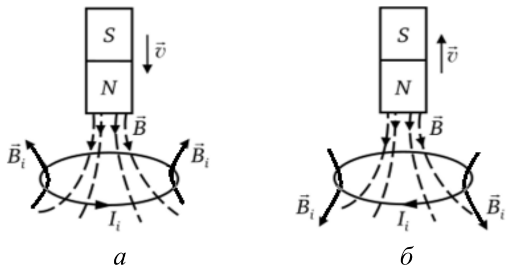
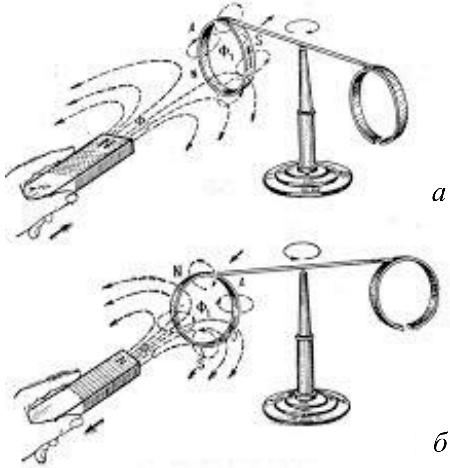


Рис. 22.1

Досліджуючи напрям індукційного електричного струму, Ленц у 1834 р. встановив закон, який пізніше назвали правилом Ленца:

Δ – ***Правило Ленца*: при будь-якій зміні магнітного потоку крізь поверхню обмежену замкненим контуром, у контурі виникає індукційний струм такого напряму, що його магнітне поле протидіє зміні магнітного потоку.**

Наприклад, на рис. 22.1, *а* магніт рухається вниз з деякою швидкістю $\vec{\upsilon}$. Магнітний потік крізь кільце зростає, тому якщо кільце замкнене і провідне, в ньому виникне ***індукційний струм*** I_i такого напрямку, що за правилом Ленца його магнітне поле $\vec{B}_i$ буде протидіяти зміні магнітного потоку. Отже, індукційне поле буде напрямлене проти ліній індукції зростаючого зовнішнього поля. Напрям ***індукційного струму*** можна визначити за допомогою правила правої руки.



а

б

Рис. 22.2

На рис. 22.1, *б* магніт рухається вверх від контуру. Магнітний потік зменшується, і за правилом Ленца в контурі виникне ***індукційний струм*** такого напрямку, що його магнітне поле буде підтримувати зовнішнє магнітне поле, щоб протидіяти його зменшенню. Лінії індукції магнітного поля $\vec{B}$ виходять з північного полюса магніту і входять в його південний полюс. Кільце із струмом також можна розглядати як невеликий магніт. Якщо подивитись на рис. 22.1, *а*, то видно, що до північного полюса магніту що наближається, індукційний струм утворює північний полюс кільця. Це буде викликати відштовхування кільця від магніту. Якщо ж магніт віддаляється, то індукційний струм утворює південний полюс із сторони північного полюсу магніту, що буде викликати притягання кільця. Все це можна спостерігати за допомогою класичного досліду зображеного на рис. 22.2. Два легких провідних кільця закріплено на коромислі, яке може обертатись навколо вертикальної осі, що проходить через його центр. Ліве кільце замкнене і може проводити струм, праве кільце має розріз.

Якщо намагатись вставити магніт в ліве суцільне кільце, в ньому виникне індукційний струм, поле якого буде протидіяти наближенню магніту, кільце буде віддалятись (рис. 22.2, вверху). Якщо магніт навпаки віддаляти від кільця, воно буде рухатись слідом (рис. 22.2, знизу). Якщо ж підносити магніт до правого кільця з розрізом, нічого відбуватись не буде, тому що індукційний струм в ньому виникнути не може, і ніяких індукційних полів немає [1, 6].

Індукційний струм в кільці показує, що в ньому виникла індукційна електрорушійна сила, і що ця електрорушійна сила пов'язана із змінним магнітним потоком. Пізніше Джеймс Максвел показав, що навколо змінних магнітних полів завжди виникають вихрові електричні поля. Це відбувається і в речовинах, і в вакуумі, а провідне замкнене кільце може слугувати лише індикатором цього явища. Також Максвел показав, що цей процес взаємний, і навколо змінних електричних полів виникають вихрові магнітні поля (рис. 22.3).

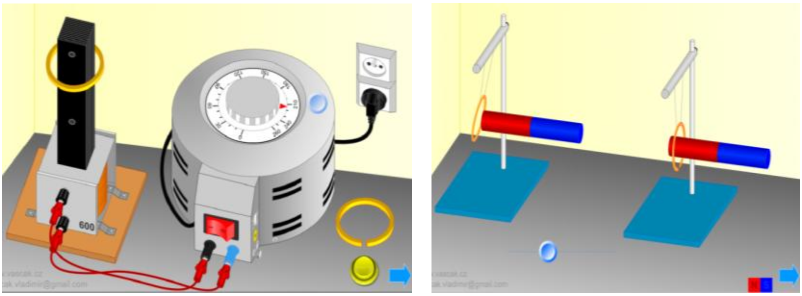


Рис. 22.3

Інтерактивна симуляція:

https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=mag_lenz&l=ua

Δ – ***Явищем електромагнітної індукції* – називають виникнення електрорушійної сили (е.р.с.) в замкненому контурі під дією змінного магнітного поля що пронизує цей контур. Таку електрорушійну силу називають *індукційною.***

Розглянемо провідник, який рухається в однорідному магнітному полі із швидкістю υ напрямленою під кутом α до вектора магнітної індукції $\vec{B}$ (рис. 22.4). На електрони, які рухаються з провідником, діє сила Лоренця:

$$\vec{F}_{ё} = e\cdot[\vec{\upsilon}\times\vec{B}],$$

де e – заряд електрона.

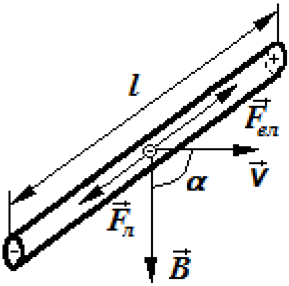


Рис. 22.4

Абсолютна величина сили Лоренца:

$$F_{ё} = e \cdot \upsilon \cdot B \cdot \sin\alpha,$$

де α – кут між векторами швидкості $\vec{\upsilon}$ і індукції магнітного поля $\vec{B}$.

Ця сила, що діє на електрони в провіднику під час його руху в магнітному полі (рис. 22.4) буде зміщувати їх до ближнього краю провідника. Це приведе до того, що з протилежної сторони електронів не вистачатиме, і цей край провідника зарядиться позитивно.

У провіднику виникне електричне поле, яке буде діяти на електрони з силою $\vec{F}_{åë} = e \cdot \vec{E}$, напрямленою в протилежному до сили Лоренца напрямку. В стані рівноваги:

$$\vec{F}_{ё} + \vec{F}_{åë} = 0.$$

Отже, провідник, який рухається у магнітному полі, являє собою джерело струму. Електрорушійна сила цього джерела за визначенням дорівнює роботі сторонніх сил по переміщенню одиничного позитивного заряду вздовж джерела струму. Сторонніми тут є сили Лоренца і тому:

$$\varepsilon = \frac{A_{ñò}}{q} = \frac{1}{q} \cdot \int_l (\vec{F}_{ё} \cdot d\vec{l}\,) = \frac{1}{q} \cdot \int_l F_{ё} \cdot dl = \frac{1}{q} \cdot \int_l q \cdot \left|[\vec{\upsilon} \times \vec{B}]\right| \cdot dl = \upsilon \cdot B \cdot \sin\alpha \int_l dl.$$

Звідси отримуємо:

$$\boxed{\varepsilon = \upsilon \cdot B \cdot l \cdot \sin\alpha,} \qquad (22.1)$$

ε **– електрорушійна сила індукції що виникає в провіднику довжиною** l, **що рухається із швидкістю** $\vec{\upsilon}$ **напрямленою під кутом** α **до ліній індукції магнітного поля** $\vec{B}$ **.**

Розглянемо замкнений контур, площина якого перпендикулярна лініям однорідного магнітного поля. Одна сторона являє собою провідник, який може рухатись з деякою швидкістю $\vec{\upsilon}$ (див. рис. 22.5).

Інтерактивна симуляція:
https://www.thephysicsaviary.com/Physics/Programs/Labs/InducedCurrentLab/.

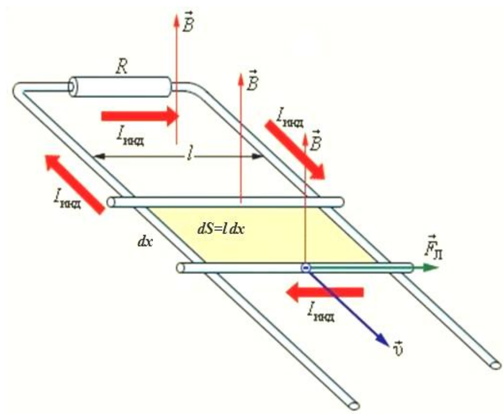


Рис. 22.5

У рухомому провіднику виникає е.р.с.:

$$\varepsilon = \upsilon \cdot B \cdot l \cdot \sin\alpha = \upsilon \cdot B \cdot l = \frac{dx}{dt} \cdot B \cdot l.$$

$$\varepsilon = B \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{d\hat{O}}{dt},$$

де dS – площа, яку описав провідник за час dt; $d\hat{O} = B \cdot dS$ – магнітний потік через цю площу.

З урахуванням правила Ленца цю формулу записують так:

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{d\hat{O}}{dt}.} \tag{22.2}$$

Δ – ***Закон електромагнітної індукції Фарадея*** **– електрорушійна сила електромагнітної індукції в замкненому контурі чисельно дорівнює і протилежна за знаком швидкості зміни магнітного потоку крізь поверхню обмежену контуром.**

Цей закон справедливий не тільки у випадку зміни площі контуру, а завжди, коли через контур змінюється потік індукції магнітного поля. Якраз ця електрорушійна сила індукції викликає появу струму у дослідах Фарадея. Також експериментально встановлено, що якщо взяти не один провідний контур а кілька, то індукційна е.р.с. буде більшою в N раз, де N – кількість таких контурів, тобто:

$$\varepsilon = -N \cdot \frac{d\hat{O}}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}, \tag{22.3}$$

де Ψ – ***потокозчеплення***:

$$\Psi = N \cdot \hat{O}. \qquad (22.4)$$

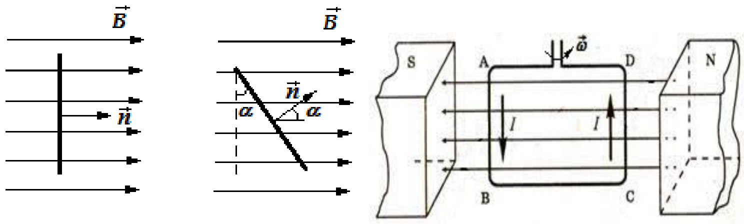
Зміна потоку через рамку:
https://www.thephysicsaviary.com/Physics/Programs/Labs/MagneticFlux/

22.2. Дослідження явища електромагнітної індукції

Приклад. Розглянемо обертання витка площею S в однорідному магнітному полі індукція якого $\vec{B}$, коли вісь обертання витка перпендикулярна до вектора магнітної індукції (рис. 22.6).

Для елементарного потоку за визначенням:

$$d\hat{O} = (\vec{B} \cdot d\vec{S}).$$



а) вигляд зверху б) вигляд збоку

Рис. 22.6 – Виток в магнітному полі

Оскільки контур плоский і поле однорідне, то цей вираз можна застосувати до всього витка, отримаємо:

$$\hat{O} = (\vec{A} \cdot \vec{S}) = B \cdot S \cdot \cos\alpha.$$

Якщо кут α рівномірно змінюється із кутовою швидкістю ω, то $\alpha = \omega t$, отже потік:

$$\hat{O} = B \cdot S \cdot \cos\alpha = B \cdot S \cdot \cos\omega t. \qquad (22.5)$$

Отже, електрорушійна сила індукції в контурі відповідно до закону електромагнітної індукції:

$$\varepsilon = -\frac{d\hat{O}}{dt} = -\frac{d}{dt}(B \cdot S \cdot \cos\omega t) = B \cdot S \cdot \omega \sin\omega t. \qquad (22.6)$$

Отримали в контурі ***змінну в часі електрорушійну силу з амплітудою*** $\varepsilon_m = B \cdot S \cdot \omega$.

Якщо для обертання рамки використовувати механічну силу, то отримаємо перетворювач механічної енергії в електричну, або простий ***генератор змінного струму***. Звичайно, в генераторах використовують не рамки, а котушки що містять N витків. В цьому випадку потрібно використовувати в попередніх формулах не ***магнітний потік*** $\hat{O}$, а ***потокозчеплення*** Ψ. Амплітуда електрорушійної сили буде в N раз більше $\varepsilon_m = N \cdot B \cdot S \cdot \omega$.

Обертання рамки в магнітному полі:
https://www.thephysicsaviary.com/Physics/Programs/Labs/SpinningCoilwGraphLab/

Рамка обертається в магнітному полі (рис. 22.7) зліва, силу якого можна міняти, також змінюється швидкість обертання і площа рамки. Праворуч на графіку можна відслідкувати вплив цих параметрів на електрорушійну силу що виникає в рамці. Якщо потік змінюється за косинусоїдальним законом, як в формулі (22.5), синя крива на графіку, то е.р.с. буде змінюватись за синусом як у формулі (22.6), червона крива на графіку (рис. 22.7).

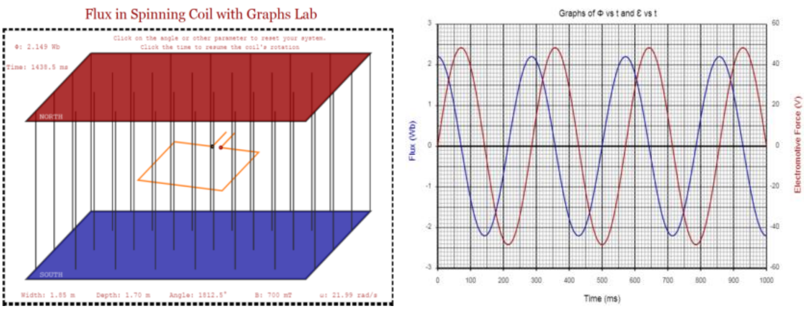


Рис. 22.7

Отже, щоразу, коли потік магнітного поля через замкнений контур змінюється, в контурі виникає електрорушійна сила індукції. Причому вона виникне і у випадку, коли контур нерухомий, тобто сили Лоренца немає. Джеймс Максвел узагальнив дослідні дані Фарадея і відкрив новий закон про зв'язок електричних і магнітних полів:

Δ – ***В областях, де змінюється магнітне поле, виникає вихрове електричне поле.***

Саме це поле спричиняє рух електронів в провідному кільці – індукційний струм, який і виявив Фарадей. Робота цього поля вздовж замкненого контуру не дорівнює нулю. І якщо цю роботу віднести до одиничного позитивного заряду, то отримаємо електрорушійну силу індукції. Робота електричної сили вздовж замкненого контуру:

$$\Delta A = \oint dA = \oint_L (\vec{F} \cdot d\vec{l}\,) = q_0 \cdot \oint_L (\vec{E} \cdot d\vec{l}\,).$$

Тому індукційна е.р.с.:

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta A}{q_0} = \oint_L (\vec{E} \cdot d\vec{l}\,).$$

Індукційна електрорушійна сила це є циркуляція вектора напруженості електричного поля вздовж замкненого контуру. В електростатиці циркуляція вектора напруженості вздовж замкненого контуру завжди нульова. Якщо ж поля змінюються, то для циркуляції маємо:

$$\oint_L (\vec{E} \cdot d\vec{l}\,) = -\frac{d\hat{O}}{dt}.$$

Якщо згадати, що потік через деяку поверхню S обмежену контуром можна записати у вигляді (формула (21.2)):

$$\hat{O} = \int_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}).$$

То можна записати ***рівняння Максвела для циркуляції електричного поля*:**

$$\boxed{\oint_L (\vec{E} \cdot d\vec{l}\,) = -\frac{d}{dt} \int_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}).} \qquad (22.7)$$

В цьому рівнянні L – замкнений контур, що обмежує ділянку площею S через яку проходить магнітна індукція $\vec{B}$. Якщо вектор індукції від часу не залежить, тобто магнітний потік через контур сталий, то похідна обернеться в нуль, і ми отримаємо випадок електростатичного поля.

Контрольні питання

1. У чому полягає явище електромагнітної індукції?
2. Що таке індукційний струм?
3. Як формулюють правило Ленца?
4. Як формулюється закон електромагнітної індукції Фарадея?
5. Як записати рівняння Максвела для циркуляції електричного поля?

Література: [**1**, с. 243–252; **4**, с. 183–185]

Лекція 23.
Самоіндукція. Індуктивність. Енергія поля

- **Явище самоіндукції. Енергія магнітного поля**
- **Енергія провідника із струмом. Енергія магнітного поля**

23.1. Явище самоіндукції. Енергія магнітного поля

Явище самоіндукції є окремим випадком явища електромагнітної індукції. За дослідними даними, будь-яке провідне коло із струмом оточене магнітним полем. Якщо струм в колі збільшувати або зменшувати, то буде відповідно змінюватись напруженість магнітного поля, що пронизує контур. Будь-яка зміна напруженості магнітного поля в свою чергу призведе до зміни магнітного потоку, що пронизує контур. Будь-яка зміна магнітного потоку через контур, за законом індукції Фарадея, приведе до появи в контурі індукційної електрорушійної сили, яка за законом Ленца буде протидіяти зміні струму в контурі.

Δ – ***Явищем самоіндукції*** **називають виникнення електрорушійної сили індукції внаслідок зміни струму в електричному колі.**

Індукція магнітного поля за законом Біо–Савара–Лапласа прямо пропорційна величині струму в контурі. Тому і магнітний потік буде пропорційним силі струму. Отже:

$$\boxed{\hat{O} = L \cdot I,} \qquad (23.1)$$

де L – ***індуктивність контуру***, коефіцієнт пропорційності, який не залежить від сили струму і індукції магнітного поля, а є однозначною характеристикою провідного контуру. Індуктивність залежить від ***форми і розмірів контуру***, а також від ***магнітних властивостей середовища*** навколо контуру. Для ***електрорушійної сили самоіндукції*** отримуємо:

$$\boxed{\varepsilon_i = -\frac{d\hat{O}}{dt} = -L\frac{dI}{dt}.} \qquad (23.2)$$

З цієї формули можна визначити одиницю вимірювання індуктивності: $[L] = \text{В} \cdot \text{ñ} / \text{À=Ãí}$.

Ця величина називається «генрі» на честь американського фізика Дж. Генрі. Як видно із формули (23.2):

Δ – **Один генрі – індуктивність контуру, в якому при зміні сили струму із швидкістю 1 ампер на секунду, виникає електрорушійна сила самоіндукції 1 вольт.**

Для одного витка в контурі справедлива формула (23.1), якщо ж витків $N,$ то формула буде наступною:

$$\boxed{\Psi = L \cdot I,} \tag{23.3}$$

де Ψ – ***потокозчеплення*** $(\Psi = N \cdot \hat{O})$.

Наприклад, для соленоїда, індукція магнітного поля всередині визначається формулою (20.4):

$$B = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot N \cdot I}{l}.$$

Отже, ***індуктивність соленоїда***:

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N \cdot \hat{O}}{I} = \frac{N \cdot B \cdot S}{I}.$$

$$\boxed{L = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot N^2 \cdot S}{l}.} \tag{23.4}$$

Якщо позначити $n = N / l$ – кількість витків на одиницю довжини котушки, то формулу для індуктивності можна записати у вигляді:

$$L = \mu \cdot \mu_0 \cdot n^2 \cdot V, \tag{23.5}$$

де S – площа поперечного перетину і $V = S \cdot l$ – об’єм соленоїда.

Слід відмітити, що ця формула справедлива тоді, коли μ – ***магнітна проникність середовища*** не залежить від струму в контурі $I,$ тобто не для феромагнітних середовищ.

Явище самоіндукції особливо проявляється у виникненні так званих екстраструмів розмикання і замикання. Індуктивність контуру є мірою його інерції щодо зміни струму в ньому.

Встановимо закон зміни сили струму $I(t)$ в електричному колі (див. рис. 23.1), що складається із зовнішнього джерела струму $\varepsilon_0,$ ключа $K,$ активного опору $R,$ котушки індуктивності $L.$ Коли ключ знаходився в положенні «*a*» на схемі, в електричному колі протікав постійний струм $I_0,$ величину якого легко визначити із закону Ома:

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R}.$$

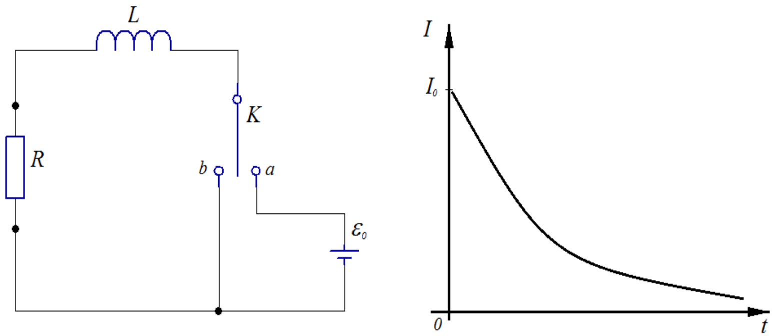


Рис. 23.1

Опором котушки тут нехтуємо, бо зазвичай для ***постійного струму*** він досить малий. Якщо ж перекинути перемикач в положення «*b*», то струм не зменшиться відразу до нуля, а буде повільно спадати (див. рис. 23.1) праворуч. Встановимо закон зміни струму після розмикання. Струм через котушку почне спадати. Це приведе до появи в колі електрорушійної сили самоіндукції ε_i. На основі другого правила Кірхгофа [1, 3]:

$$\varepsilon_i = R \cdot I.$$

З формули (23.2) для величини е.р.с. самоіндукції випливає:

$$-L\frac{dI}{dt} = R \cdot I,$$

або

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt.$$

Інтегруємо це рівняння зліва і справа:

$$\int_{I_0}^{I}\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\int_{0}^{t}dt, \quad \ln\frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L}t.$$

Залежність струму від часу для електричного кола буде мати вигляд:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \tag{23.6}$$

Струм не зменшується раптово до нуля, а спадає за експонентою (рис. 23.1, праворуч). Якщо $t = 0,$ то $I = I_0 = \varepsilon_0 / R.$

Часто формулу (23.6) записують у вигляді:

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-t/\tau}, \qquad (23.7)$$

де $\tau = L / R$ – ***це час релаксації*, тобто час, впродовж якого сила струму в колі зменшується в *e* раз (*e* = 2,718…).**

Струм, що виникає в колі з індуктивністю після його розмикання, називають ***екстраструмом розмикання***. Слід знати, що якщо в колі є індуктивність, то струм в будь-якому випадку миттєво не зупиниться навіть після розмикання. Наприклад, якщо на рис. 23.1 перемикач розімкнути в проміжне положення між «*a*» і «*b*», тобто взагалі розірвати коло, то екстраструм розмикання призведе до різкого сплеску напруги на перемикачі. Може статись іскровий пробій між контактами. Звичайно це небажано, тому що погано впливає на стан самих контактів.

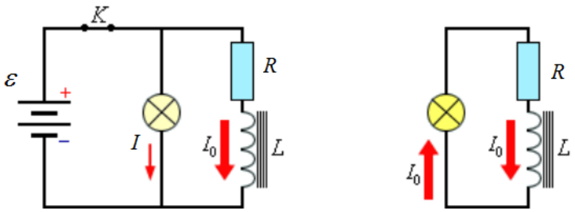


Рис. 23.2

Інший приклад екстраструму розмикання наведено на рис. 23.2. Коли ключ K замкнений (зліва), в колі встановиться деякий сталий струм. Через лампочку буде протікати струм I, через котушку індуктивності $I_0 = \varepsilon / R$. Якщо розімкнути ключ K праворуч, то струм котушки індуктивності I_0 продовжить протікати, і в цьому електричному колі він замкнеться через лампочку. Струм в лампочці зміниться в протилежний бік, його величина стрибком зросте з початкового значення I до I_0. Якщо $I_0 \gg I$ лампочка яскраво спалахне, чи перегорить.

Якщо перемикач на рис. 23.1 замкнути в положення «а», то із другого правила Кірхгофа випливає:

$$-L\frac{dI}{dt} + \varepsilon_0 = R \cdot I.$$

Розв'язок цього диференціального рівняння має вигляд:

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \qquad (23.8)$$

Залежність екстраструму замикання від часу наведено на рис. 23.3. Як видно, струм через індуктивність ніколи не змінюється стрибком, а поступово зростає від нуля до деякої сталої величини I_0, яка визначається е.р.с. джерела струму і активними опорами в колі.

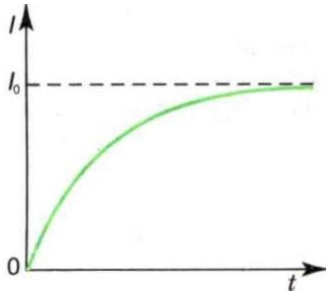


Рис. 23.3

Отже, струм через індуктивність внаслідок явища самоіндукції **ніколи не зростає стрибком, але ніколи також не зникає раптово**. Це може стати причиною появи екстраструмів розмикання, які можуть призвести до руйнівних наслідків в електричному колі.

23.2. Енергія провідника із струмом. Енергія магнітного поля

Магнітне поле, як і електричне, є носієм певної енергії. Саме ця енергія вивільняється в момент розриву електричного кола і підтримує екстраструм розмикання через соленоїд. Енергія магнітного поля дорівнює роботі, яку виконує електричний струм для утворення магнітного поля.

Розглянемо контур з індуктивністю L по якому тече струм I. З даним контуром зчеплений магнітний потік: $\Psi = L \cdot I$.

Якщо струм змінити на невелику величину dI, то потік зміниться на $d\Psi = L \cdot dI$. Але для зміни потоку на $d\Psi$ в контурі із струмом I потрібно виконати роботу: $dA = I \cdot d\Psi = I \cdot L \cdot dI$.

Тоді робота по утворенню магнітозчеплення Ψ буде:

$$A = \int dA = \int_0^I I \cdot L \cdot dI = L \cdot \int_0^I I \cdot dI = \frac{L \cdot I^2}{2}. \qquad (23.9)$$

Оскільки робота зі створення магнітного поля дорівнює його енергії $A = W$, то для енергії магнітного поля контуру із струмом отримуємо формулу:

$$\boxed{W = \frac{L \cdot I^2}{2}.} \tag{23.10}$$

Розглянемо випадок однорідного магнітного поля всередині довгого соленоїда.

$$W = \frac{L \cdot I^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot N^2 \cdot S}{l} \cdot I^2.$$

Індукція магнітного поля в соленоїді:

$$B = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot N \cdot I}{l}.$$

Для енергії магнітного поля соленоїда отримуємо:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu \cdot \mu_0} \cdot V, \tag{23.11}$$

тут $V = S \cdot l$ – об'єм соленоїда.

Об'ємна густина енергії $\omega = W / V$ становить:

$$\boxed{\omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu \cdot \mu_0} = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot H^2}{2} = \frac{B \cdot H}{2}.} \tag{23.12}$$

Ця формула виведена для однорідного поля всередині соленоїда, але вона справедлива для будь-яких інших магнітних полів. Якщо в просторі існує магнітне поле, то воно несе в собі певну енергію, об'ємна густина якої може бути розрахована за формулою (23.12).

Контрольні питання

1. У чому полягає явище самоіндукції?
2. Як визначають енергію магнітного поля?
3. Як можна знайти енергію провідника із струмом?
4. Що таке густина енергії магнітного поля?
5. Що таке потокозчеплення?

Література: [**1**, с. 247–252; **4**, с. 187–189]

Частина 5.

КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

Лекція 24.
Гармонічні коливання

- **Вступ**
- **Види коливань**
- **Приклади власних коливань фізичних систем**
  – пружинний маятник;
  – фізичний маятник;
  – математичний маятник;
  – контур Томсона

24.1. Вступ

Одними із найпоширеніших рухів в природі є ***коливальні рухи***.

Δ – ***Коливальним рухом*** **або** ***коливанням*** **називають процес, в якому одна або декілька його характеристик послідовно відхиляються в один або інший бік від свого рівноважного значення.**

Δ – ***Коливання*** **називають** ***періодичними,*** **якщо значення фізичних величин, які змінюються в процесі коливань, повторюються через однакові проміжки часу:**

$$f(t) = f(t + n \cdot T), \tag{24.1}$$

де найменший час повторення значення фізичної величини називається ***періодом коливань*** T , n – довільне ціле число [1].

Таким чином, ***період*** дорівнює часу одного повного коливання.

Нехай за час t система здійснила N повних коливань. Тоді період коливань $T = t / N$.

Δ – Число повних коливань, які здійснюються за одиницю часу, називають ***частотою коливань*****:**

$$f = \frac{N}{t}. \tag{24.2}$$

Звідси випливає, що ***частота*** і ***період коливань*** – величини взаємно обернені:

$$f=\frac{1}{T}. \tag{24.3}$$

Частота в системі СІ вимірюється в ***герцах*:** $[\,f\,]=1\,/\,\text{с}=\text{Ãö}$.

Δ – Один герц – частота періодичного руху, в якому за одну секунду відбувається одне повне коливання.

Найпростішим типом періодичних коливань є ***гармонічні.***

Δ – *Гармонічні коливання* – це коливання, при яких значення фізичної величини змінюється в часі за законом косинуса або синуса.

Математика дає засоби для представлення будь-якого коливання у вигляді суми простих гармонічних коливань. Якщо коливання періодичне, то його можна представити у вигляді ряду з простих гармонічних коливань з кратними частотами. Якщо ж коливання неперіодичне, то його можна представити у вигляді інтегралу Фур'є від простих гармонічних складових.

Фізична система в якій можуть відбуватись коливання завжди має положення чи стан в якому може перебувати нескінченно довго. Такий стан системи називається ***положенням рівноваги***. Якщо систему вивести із нього і надати їй можливість здійснювати коливання під дією тільки внутрішніх сил, то такі коливання називають ***вільними.*** Вільні коливання, якщо внутрішні сили системи є консервативними і її повна енергія зберігається (відсутні такі сили як тертя і подібні), називають ***власними***. Вони відбуваються в ізольованих системах і тривають нескінченно довго. Якщо коливання відбуваються під дією зовнішніх сил, то їх називають ***вимушеними.*** У реальних системах, що здійснюють коливний рух, часто діють сили внутрішнього тертя та опору середовища. Тому такі рухи відбуваються з поступовою втратою енергії коливань і їх називають ***затухаючими.***

24.2. Види коливань

Щоби описати коливальний рух фізичної системи, потрібно обрати характерний для системи параметр що коливається і знайти залежність відхилень цього параметра від часу [2, 7].

Для ***гармонічного коливання*** ця залежність має вигляд:

$$\boxed{x(t)=A\cdot\cos(\omega_0 t+\varphi_0),} \tag{24.4}$$

де $x(t)$ – параметр системи що коливається (зміщення, кут, заряд, струм, напруга – будь-що); A – ***амплітуда коливань*** – дорівнює максимальному зміщенню; $\omega_0 t+\varphi_0$ – ***фаза коливань*** в момент часу t; φ_0 – ***початкова фаза коливань*** в момент часу $t=0$; ω_0 – ***циклічна частота*** **– число радіан, на яке змінюється фаза в одиницю часу:**

$$\boxed{\omega_0=2\pi\cdot f_0.} \qquad (24.5)$$

Дійсно, одне коливання змінює фазу на 2π радіан, а в одиницю часу система здійснює f_0 коливань.

Формула (24.5) пов'язує ***циклічну*** (ω_0) і ***лінійну*** (f_0) ***частоту.***

Вимірюється циклічна частота в системі СІ:

$$[\omega]=\frac{\text{ðàä}}{\text{ñ}}=\frac{1}{\text{ñ}}=\text{ñ}^{-1}.$$

Також можна виразити ***циклічну частоту*** через ***період коливань***, якщо використати вираз (24.3). Отже:

$$\boxed{\omega_0=\frac{2\pi}{T}.} \qquad (24.6)$$

Потрібно чітко усвідомлювати різницю між ***циклічною частотою*** ω_0 і ***кутовою швидкістю***, яка характеризує обертальний рух в механіці (кутова швидкість дорівнює похідній кута обертання до часу $\omega=d\alpha/dt)$. Хоч одиниці вимірювання в цих величин однакові і позначаються однаковою літерою ω, фізичний зміст вони мають різний. Циклічна частота – величина що характеризує коливання в системі, і якщо коливання відбуваються без затухань в замкненій системі, то ω_0 буде сталою величиною**.**

Кутова швидкість може весь час змінюватись впродовж коливального руху. Наприклад, маятник що здійснює незатухаючі коливання має певну незмінну кутову частоту, а кутова швидкість руху постійно змінюється впродовж періоду коливань, досягаючи максимуму в точці рівноваги і нульового значення в крайніх точках найбільшого відхилення. Слід відмітити, що гармонічні коливання можна записати також у вигляді:

$$x(t)=A\cdot\sin(\omega_0 t+\varphi_0). \qquad (24.7)$$

Таке коливання відрізняється від коливання (24.4) тільки початковою фазою φ_0. Дійсно, у тригонометрії доведена формула:

$$\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

тобто косинус випереджає синус на $\pi / 2$ (рис. 24.1):

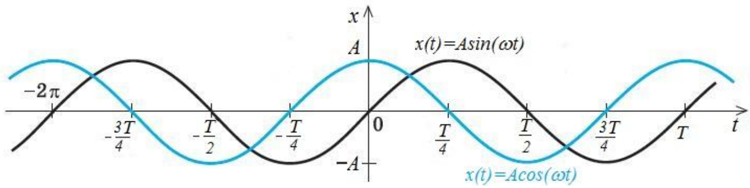


Рис. 24.1

Принципової різниці між формулами (24.4) та (24.7) немає, тому для визначеності в подальшому будемо використовувати функцію косинус – формулу (24.4).

Знайдемо диференціальне рівняння, розв’язком якого є гармонічні функції. Для визначеності припустимо, що в рівнянні (24.4) $x(t)$ – це зміщення (координата). Диференціюємо це рівняння:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{24.8}$$

З цього рівняння видно, що швидкість коливань також буде здійснювати гармонічне коливання із такою ж циклічною частотою ω_0 і амплітудою:

$$\upsilon_m = \omega_0 \cdot A. \tag{24.9}$$

Диференціюємо вираз (24.8) ще раз:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{24.10}$$

Прискорення, яке дорівнює похідній швидкості за часом або другій похідній зміщення за часом, також здійснює гармонічні коливання з частотою ω_0 і амплітудою:

$$a_m = \omega_0^2 A. \tag{24.11}$$

Рівняння (24.10) можна записати у вигляді: $\ddot{x} = -\omega_0^2 \cdot x,$ або

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0.} \tag{24.12}$$

Цей вираз називають ***диференціальним рівнянням незатухаючих гармонічних коливань.*** Розв'язком цього рівняння є гармонічні функції (24.4) та (24.7), а також їх комбінації. Отже, якщо для деякого параметра фізичної системи отримано рівняння (24.12), то можна одразу записати його розв'язок у вигляді рівняння (24.4). Сталі A та φ_0 визначають з початкових умов.

Δ – Механічну систему, закон руху якої описується рівнянням $x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, називають *одномірним гармонічним осцилятором.*

Оскільки за другим законом Ньютона $F = ma,$ то для гармонічних коливань сила в фізичній системі має змінюватись за законом:

$$F = -m\omega_0^2 \cdot x = -kx, \tag{24.13}$$

де

$$k = m\omega_0^2. \tag{24.14}$$

Тобто сила має бути пропорційною зміщенню і напрямленою в протилежний до зміщення бік – до положення рівноваги. Така сила називається ***вертальною***. Подібна залежність сили від зміщення є відмінною рисою всіх систем в яких відбуваються гармонічні коливання. Прикладом сил, що задовольняють співвідношенню (24.13) є пружні сили (закон Гука). Сили, що не є пружними і мають іншу природу, але все ж задовольняють вимогу (24.13) називають ***квазіпружними,*** а коефіцієнт k (формула 24.14) **–** ***коефіцієнтом квазіпружної сили.***

Широке розповсюдження гармонічних коливань в природі пояснюється тим, що більшість сил при ***малих зміщеннях*** фізичного параметра системи ведуть себе як квазіпружні, тобто пропорційні зміщенню і напрямлені до положення рівноваги. Якщо зміщення велике, починає проявлятись нелінійна природа залежності сили від зміщення. В такому випадку коливання вже гармонічними не будуть [3, 7].

Механічна енергія коливань ізольованої консервативної системи повинна залишатися сталою:

$$E = E_{\hat{e}} + E_{\ddot{i}}. \tag{24.15}$$

Кінетична енергія коливань:

$$E_{\hat{e}} = \frac{1}{2} m\upsilon^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{4} m\omega_0^2 A^2 (1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)). \tag{24.16}$$

Потенціальна енергія:

$$E_k = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2 (1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)). \quad (24.17)$$

З формул (24.16) та (24.17) випливає, що енергія здійснює коливання з частотою $2\omega_0$, тобто з частотою вдвічі більшою за зміщення і довкола середнього значення $\frac{1}{4}m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2$.

Якщо підставити отримані виразив формулу (24.15), то для повної енергії системи отримаємо:

$$E = E_{\hat{e}} + E_{\ddot{i}} = \frac{1}{2}m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2 = \frac{1}{2}k \cdot A^2. \quad (24.18)$$

24.3. Приклади власних коливань фізичних систем

24.3.1. Пружинний маятник

Пружинний маятник – це тіло маси m, що коливається навколо свого положення рівноваги під дією пружної сили (рис. 24.2).

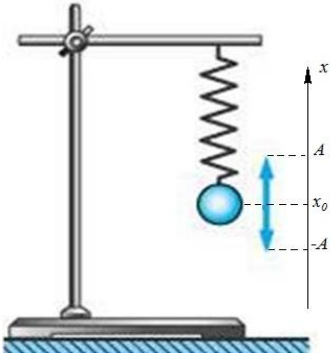


Рис. 24.2

Масою пружини і силами опору середовища знехтуємо. Нехай пружина має коефіцієнт жорсткості k. Тоді, відповідно до ***закону Гука***, при зміщенні тіла від положення рівноваги x_0 на величину x, на нього буде діяти пружна сила, яка буде намагатися повернути тіло в положення рівноваги:

$$F = -kx. \quad (24.19)$$

За другим законом Ньютона:

$$ma = F.$$

Враховуючи, що прискорення є другою похідною зміщення за часом, отримуємо:

$$ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = F.$$

Підставимо цей вираз в рівняння (24.19):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Отримали ***диференціальне рівняння коливань пружинного маятника***:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0.} \tag{24.20}$$

Якщо прийняти $\omega_0^2=k/m$, то отримаємо рівняння незатухаючих гармонічних коливань (24.12). Це диференціальне рівняння має наступний розв'язок:

$$x(t)=A\cdot\cos(\omega_0 t+\varphi_0)=A\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right), \tag{24.21}$$

де

$$\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}},} \tag{24.22}$$

циклічна частота коливань пружинного маятника. Сталі величини A та φ_0 визначаються з початкових умов. Коливання є ***вільними***, а оскільки немає опору, то такі коливання є **власними гармонічними коливаннями пружинного маятника.**

Період власних коливань пружинного маятника визначають за формулою:

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.} \tag{24.23}$$

Пружинний маятник:

https://www.thephysicsaviary.com/Physics/Programs/Labs/OscillationLab/

https://phet.colorado.edu/en/simulation/masses-and-springs-basics

24.3.2. Фізичний маятник

Δ – ***Фізичний маятник* – це абсолютно тверде тіло довільної форми, що здійснює коливання під дією сили тяжіння навколо горизонтальної осі що не проходить через його центр мас** (рис. 24.3).

На рисунку позначено: O – точка, через яку перпендикулярно до площини рисунка проходить вісь коливань; C – центр мас тіла; O' – центр коливань; l – відстань від осі коливання до центру мас; L – відстань від осі коливання до центру коливання O'.

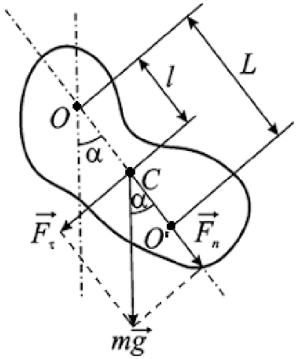


Рис. 24.3

Фізичний маятник коливається під дією сили тяжіння $m\vec{g}$, яка прикладена до центру мас тіла. Проведемо пряму через точку O і центр мас C. В стані рівноваги, центр мас розташується точно під точкою підвісу маятника. Якщо ж відхилити маятник на кут α від його положення рівноваги, з'явиться перпендикулярна до осі OC складова сили тяжіння $\vec{F}_\tau$ (тангенціальна до траєкторії руху центру мас), яка напрямлена до положення рівноваги. Ця сила і є вертальною силою для цієї фізичної системи.

Момент цієї сили відносно осі обертання (добуток відстані від осі до точки прикладання сили на перпендикулярну складову сили) $M_0 = -F_\tau \cdot l = -mg \cdot l \cdot \sin\alpha$. Якщо кут α невеликий, приблизно не перевищує 10°, то $\sin\alpha \approx \alpha$ (в цій формулі кут α – в радіанах!) і для моменту сили тяжіння відносно осі обертання:

$$M_0 = -m \cdot g \cdot l \cdot \alpha. \qquad (24.24)$$

Знак «мінус» вказує на те, що $\vec{F}_\tau$ напрямлена завжди протилежна відхиленню. Відповідно до рівняння обертального руху твердого тіла навколо осі, що проходить перпендикулярно через точку O:

$$J_0 \cdot \beta = M_0, \qquad (24.25)$$

де J_0 – момент інерції тіла відносно осі коливання, що проходить через O; M_0 – момент зовнішніх сил відносно осі коливання; β – кутове прискорення тіла.

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

тут ω – кутова швидкість (не плутати з циклічною частотою!)

Підставляючи цей вираз і формулу (24.24) в рівняння (24.25), отримуємо:

$$J_0 \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -m \cdot g \cdot l \cdot \alpha.$$

***Диференціальне рівняння гармонічних коливань для фізичного маятника*:**

$$\boxed{\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{m\cdot g\cdot l}{J_0}\alpha=0.} \qquad (24.26)$$

Якщо порівняти це рівняння з рівнянням (24.12), то можна побачити, що рівняння (24.26) записано відносно кута α а не зміщення. Тобто, фізичною величиною, що здійснює гармонічні коливання в даному випадку буде кут α. Крім того, порівнюючи ці формули можна записати для власної циклічної частоти:

$$\omega_0^2=\frac{m\cdot g\cdot l}{J_0}.$$

Циклічна частота власних коливань фізичного маятника:

$$\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{m\cdot g\cdot l}{J_0}}.} \qquad (24.27)$$

Рівняння власних гармонічних коливань фізичного маятника:

$$\alpha(t)=A\cos\left(\sqrt{\frac{m\cdot g\cdot l}{J_0}}\cdot t+\varphi_0\right). \qquad (24.28)$$

Період таких коливань:

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{J_0}{mgl}}.} \qquad (24.29)$$

Період записують також у вигляді:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \qquad (24.30)$$

У цій формулі $L=\dfrac{J_0}{m\cdot l}$ – ***зведена довжина фізичного маятника***. Задає положення ***центру коливань*** O' відносно точки O. Можна довести, що якщо фізичний маятник підвісити в ***центрі коливань*** O', то частота його коливань не зміниться. Для кожної точки підвісу O

існує свій центр коливань O'. Формула (24.30) записана у вигляді, що нагадує аналогічну формулу для ***математичного маятника***.

24.3.3. Математичний маятник

Δ – ***Математичним маятником*** **називають матеріальну точку, яка підвішена на невагомій і нерозтяжній нитці, що коливається у вертикальній площині під дією сил тяжіння** (рис. 24.4):

У формулі (24.29) позначено: l – довжина маятника; m – маса матеріальної точки; F_τ – вертальна сила (проекція сили тяжіння на перпендикулярний до нитки напрям), $F_\tau = -m \cdot g \sin\alpha$; α – кут відхилення маятника від вертикалі.

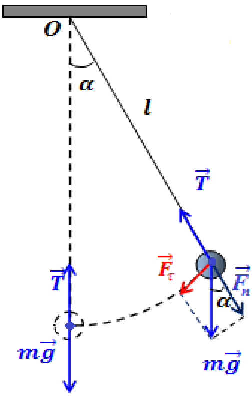


Рис. 24.4

Математичний маятник є окремим випадком фізичного, для якого вся маса зосереджена в центрі мас, що знаходиться на відстані l від осі обертання (точка підвісу O). Отже, момент інерції матеріальної точки відносно осі коливань що проходить через точку O:

$$J_0 = m \cdot l^2.$$

Якщо підставити цей вираз до формули (24.27) для фізичного маятника, отримаємо ***циклічну частоту власних гармонічних коливань математичного маятника***:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.} \tag{24.31}$$

Період власних гармонічних коливань математичного маятника:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.} \tag{24.32}$$

З формули (24.32) випливає, що період математичного маятника не залежить від маси, а визначається його довжиною і прискоренням вільного падіння (за умови невеликих кутів відхилення α).

Математичний маятник:
https://phet.colorado.edu/en/simulation/pendulum-lab

24.3.4. Контур Томсона

Контур Томсона – це електричне коло, що складається з конденсатора ємністю C і котушки індуктивністю L (рис. 24.5). Активним опором котушки і з'єднувальних дротів нехтуємо.

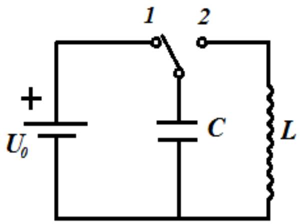


Рис. 24.5

Якщо заряджений до різниці потенціалів джерела напруги U_0 конденсатор (перемикач в положенні 1), замкнути на котушку індуктивності L (перемикач в положенні 2), то в контурі виникнуть електромагнітні коливання. Змінюватись в часі будуть: струм в контурі, напруга на конденсаторі і котушці, заряд конденсатора, електричне поле конденсатора і магнітне поле котушки, а також енергія цих полів.

Розглянемо спочатку коливання заряду конденсатора q. Напруга на конденсаторі пов'язана із зарядом співвідношенням:

$$U = \frac{q}{C}. \tag{24.33}$$

Згідно закону Фарадея під час протікання змінного струму через котушку на ній виникне електрорушійна сила самоіндукції:

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}. \tag{24.34}$$

Відповідно до ***другого правила Кірхгофа,*** **сума напруг у замкненому електричному колі дорівнює сумі електрорушійних сил у цьому колі.** Тому:

$$\frac{q}{C} = -L\frac{dI}{dt}.$$

Електричний струм за визначенням це похідна заряду за часом $I = dq/dt$. Отже попередній вираз можна переписати у вигляді

$$\frac{1}{LC}q = -\frac{d^2q}{dt},$$

або у вигляді:

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0.} \tag{24.35}$$

Рівняння (24.35) є ***диференціальним рівняння власних коливань в контурі Томсона.***

Параметром аналогічним зміщенню x в рівнянні (24.12) в даному випадку є заряд конденсатора q. Параметр аналогічний швидкості – це сила струму в контурі I. Отже, з вигляду рівняння (24.35) можна зробити висновок, що величина заряду конденсатора здійснює в часі гармонічні коливання з циклічною частотою:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}.} \tag{24.36}$$

Частоту ω_0 називають ***циклічною частотою власних коливань в контурі Томсона.***

Період власних електромагнітних коливань в контурі $T = 2\pi / \omega_0$:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{L \cdot C}.} \tag{24.37}$$

Формулу (24.37) називають ***формулою Томсона для коливального контуру.***

Коливання заряду відбуваються за законом:

$$\boxed{q(t) = q_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0).} \tag{24.38}$$

Сталі величини q_0 та φ_0 визначаються з початкових умов. Наприклад, якщо в початковий момент часу, коли перемикач тільки перекинули в положення 2, напруга на конденсаторі дорівнювала напрузі джерела струму U_0, то $q_0 = C \cdot U_0$ та $\varphi_0 = 0$.

Якщо відомий закон коливань заряду конденсатора, то легко визначити коливання струму в контурі:

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -q_0 \cdot \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{24.39}$$

У контурі Томсона коливається також енергія електричного поля конденсатора C:

$$E_C = \frac{CU^2}{2}.$$

Оскільки $U = q / C$, то

$$E_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{24.40}$$

Енергія магнітного поля котушки також змінюється в часі. Для енергії поля котушки:

$$E_L = \frac{L \cdot I^2}{2} = \frac{L \cdot q_0^2 \cdot \omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Підставимо в останню формулу значення квадрату циклічної частоти $\omega_0^2 = 1/LC$:

$$E_L = \frac{q_0^2}{2C} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{24.41}$$

Повна енергія контуру буде:

$$\boxed{E = E_C + E_L = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{C \cdot U_0^2}{2} = \frac{L \cdot I_m^2}{2}.} \tag{24.42}$$

де I_m – максимальний струм через котушку; U_0 – максимальна напруга на конденсаторі; q_0 – максимальний заряд конденсатора.

В коливальному контурі відбуваються перетворення енергії електричного поля конденсатора в магнітне поле котушки і навпаки відповідно до формул (24.40) та (24.41). Але оскільки розсіювання енергії немає, то повна енергія контуру буде в будь-який момент сталою величиною.

Контрольні питання

1. Коливання, коливальний рух. Що таке гармонічні коливання?
2. Що таке період і частота коливань; циклічна частота?
3. Як записати диференціальне рівняння незатухаючих гармонічних коливань?
4. Як визначити період власних коливань пружинного маятника?
5. Як записати диференціальне рівняння власних коливань в контурі Томсона?
6. Як записати формулу Томсона?

Література: [**1**, с. 269–278; **4**, с. 29–34]

Лекція 25.
Затухаючі механічні та електромагнітні коливання

- **Затухаючі коливання**
- **Затухаючі коливання пружинного маятника**
- **Затухаючі електромагнітні коливання**

25.1. Затухаючі коливання

Δ – Коливання, які відбуваються з поступовою втратою енергії коливальної системи називають *затухаючими.*

Зменшення механічної енергії проявляється в тому, що з часом зменшується амплітуда коливань, оскільки енергія пропорційна квадрату амплітуди $E \sim A^2$.

***Диференціальне рівняння затухаючих коливань має вигляд*:**

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,} \qquad (25.1)$$

де ω_0 – циклічна частота власних коливань системи; β – коефіцієнт затухання коливань.

Вимірюється в обернених секундах як і циклічна частота:

$$\beta = \frac{1}{\text{с}} = \text{с}^{-1}.$$

Загальний розв'язок цього диференціального рівняння має вигляд:

$$\boxed{x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0),} \qquad (25.2)$$

де A_0 – початкова амплітуда.

З рівняння (25.2) випливає, що амплітуда затухаючих коливань експоненціально зменшується з часом:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \qquad (25.3)$$

де φ_0 – початкова фаза; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклічна частота затухаючих коливань.

Частота затухаючих коливань завжди менша за частоту власних коливань ω_0, тому що затухаючі коливання відбуваються в середовищі де існує певний опір коливальним рухам.

На рис. 25.1 наведено графік затухаючого гармонічного коливання, що визначається рівнянням (25.2).

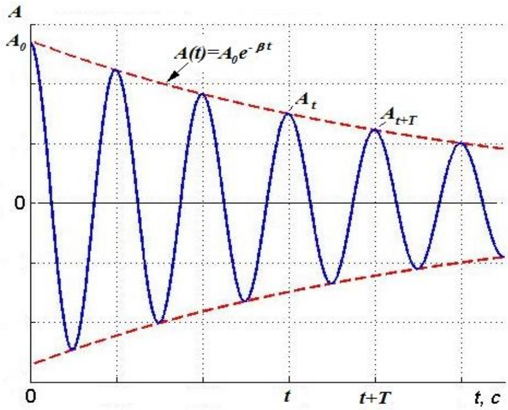


Рис. 25.1

Затухаючі коливання не є в повній мірі періодичними, бо стан системи який вона мала в деякий час t більше не повторюється. Але умовно таке коливання можна характеризувати періодом T, якщо визначити його, наприклад, як проміжок часу між сусідніми максимумами.

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.} \tag{25.4}$$

Амплітуда затухаючих коливань $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ зменшується з часом тим швидше, чим більший коефіцієнт затухання β.

Δ – Відрізок часу $t = \tau$, протягом якого амплітуда затухаючих коливань зменшується в e раз, називають *часом релаксації* $(e = 2,71828...)$.

Отже, за визначенням:

$$\frac{A_0}{A(\tau)} = e \quad \text{або} \quad \frac{A_0}{A_0 e^{-\beta\tau}} = e.$$

Звідки можна записати: $e^{\beta\tau} = e$ або $\beta\tau = 1$. Отже, справедливе співвідношення:

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\beta}.} \tag{25.5}$$

Тобто, ***час релаксації*** τ є оберненою величиною до ***коефіцієнту затухання*** β.

Δ – ***Логарифмічним декрементом затухання*** δ **називають логарифм відношення амплітуд двох послідовних коливань що йдуть одне за одними через один період коливань:**

$$\boxed{\delta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)}.} \tag{25.6}$$

Для ***логарифмічного декременту*** справедливі співвідношення:

$$\delta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln\frac{A_0 \cdot e^{-\beta t}}{A_0 \cdot e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T}.$$

Отже,

$$\boxed{\delta = \beta \cdot T = \frac{T}{\tau} = \frac{T}{N_e \cdot T} = \frac{1}{N_e},} \tag{25.7}$$

де N_e – число коливань, протягом яких амплітуда зменшується в e раз: $\tau = N_e \cdot T$.

Δ – ***Добротністю*** Q – ***коливальної системи*** **називають відношення енергії коливальної системи в певний момент часу до втрат енергії за один період, помножене на** 2π.

$$\boxed{Q = 2\pi\frac{E_t}{E_t - E_{t+T}}.} \tag{25.8}$$

Оскільки енергія системи пропорційна квадрату амплітуди $E \sim A^2$, то:

$$Q = 2\pi \frac{E_t}{E_t - E_{t+T}} = 2\pi \frac{e^{-2\beta t}}{e^{-2\beta t} - e^{-2\beta(t+T)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}}. \qquad (25.9)$$

Для експоненціальної функції справедливе представлення у вигляді ряду Тейлора $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots$:

Отже, $e^{-2\beta T} \approx 1 - 2\beta \cdot T$ (якщо $2\beta \cdot T \ll 1$).

Якщо підставити це значення в формулу (25.9), то для добротності отримаємо:

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}} = \frac{2\pi}{1 - (1 - 2\beta \cdot T)} = \frac{2\pi}{2\beta \cdot T} = \frac{\pi}{\beta \cdot T}.$$

Для **добротності коливальної системи справедливі** наступні співвідношення:

$$\boxed{Q = \frac{\pi}{\beta \cdot T} = \frac{\pi}{\delta} = \pi \cdot N_e.} \qquad (25.10)$$

$$Q = \frac{\pi}{\beta \cdot T} = \frac{\pi \cdot \omega}{\beta 2\pi} = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\beta}. \qquad (25.11)$$

Чим менший коефіцієнт затухань коливальної системи β, тим більша добротність. Отримані рівняння можна застосувати для затухаючих коливань різних фізичних систем.

25.2. Затухаючі коливання пружинного маятника

Визначимо рівняння руху механічного пружинного маятника із затуханням (рис. 25.2).

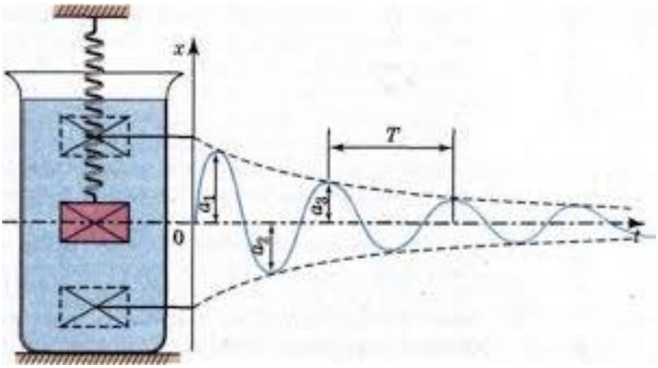


Рис. 25.2

Якщо швидкість руху невелика, то можна вважати що сили тертя пропорційні швидкості руху, тобто:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -r\vec{\upsilon}, \qquad (25.12)$$

де r – коефіцієнт опору; $\vec{\upsilon}$ – швидкість руху.

Тоді другий закон Ньютона для затухаючих коливань маятника вздовж осі x буде мати вигляд:

$$ma = F_{\text{пр}} + F_{\text{тр}} = -kx - r\upsilon,$$

де m – маса тіла що коливається; k – коефіцієнт жорсткості пружини; r – коефіцієнт опору.

Це рівняння можна переписати у вигляді:

$$m\frac{d^2x}{dt} = -kx - r\frac{dx}{dt}.$$

Диференціальне рівняння затухаючих коливань пружинного маятника має вигляд:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0.} \qquad (25.13)$$

Введемо наступні позначення: $\beta = r/2m$ – коефіцієнт затухання і $\omega_0^2 = k/m$ – квадрат циклічної частоти пружинного маятника. Тоді закон руху пружинного маятника із затуханням:

$$x(t)=A_0\cdot e^{-\frac{r}{2m}t}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{r^2}{4m^2}}\cdot t+\varphi_0\right), \qquad (25.14)$$

де A_0 та φ_0 визначають з початкових умов.

Для добротності Q справедлива формула: $Q=\omega/2\beta$. Якщо затухання незначні $\beta \ll \omega_0$, то:

$$Q=\frac{\omega_0}{2\beta}=\frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{2\cdot\frac{r}{2m}}.$$

Добротність пружинного маятника що здійснює затухаючі коливання:

$$\boxed{Q=\frac{\sqrt{k\cdot m}}{r}.} \qquad (25.15)$$

Затухаючі коливання пружинного маятника:

https://www.thephysicsaviary.com/Physics/Programs/Labs/HorizontalOscillationswDampingLab/

https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=kv_tlumene_kmitani&l=en

25.3. Затухаючі електромагнітні коливання

Розглянемо коливальний контур активний опір якого R не дорівнює нулю (рис. 25.3). Зарядимо конденсатор C від батареї до напруги U_0 (ключ у першому положенні).

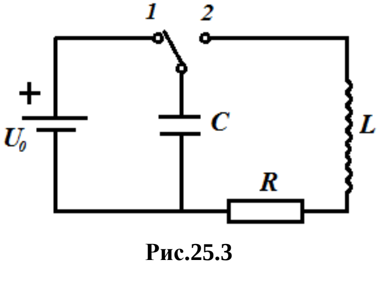


Рис.25.3

Після перемикання ключа у друге положення в контурі почнуть відбуватись затухаючі електромагнітні коливання. Напишемо друге правило Кірхгофа для замкненого контуру (сума напруг в контурі дорівнює сумі електрорушійних сил в контурі):

$$U_C+U_R=\varepsilon. \qquad (25.16)$$

Напруга на конденсаторі $U_C = q / C.$ Напруга на активному опорі $U_R = I \cdot R.$ Електрорушійна сила самоіндукції в контурі $\varepsilon = -L\dfrac{dI}{dt}$.

Підставляючи ці вирази в формулу отримуємо:

$$\frac{q}{C} + IR = -L\frac{dI}{dt}.$$

Враховуючи, що $I = dq / dt$, вираз можна записати у вигляді:

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\cdot\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0.} \qquad (25.17)$$

Це і є ***диференціальне рівняння затухаючих електромагнітних коливань у контурі***.

Порівнюючи формулу (25.17) із загальною формулою затухаючих коливань (25.1), можна зробити висновок, що в коливальному контурі відбуваються затухаючі гармонічні коливання заряду конденсатора q з наступними параметрами:

$\beta = \dfrac{R}{2L}$ – ***коефіцієнт затухання***;

$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ – циклічна частота власних коливань контуру;

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}$ – циклічна частота затухаючих коливань в контурі.

Якщо затухання в контурі дуже велике, таке що виконується умова $\dfrac{R^2}{4L^2} \geq \dfrac{1}{LC}$, то вираз під коренем в формулі для циклічної частоти стане від'ємним. Це означає, що коливання в такому контурі відбуватись не зможуть. Заряджений конденсатор просто повільно розрядиться і його енергія розсіється і перетвориться в тепло в активному опорі R. Граничне значення опору, при перевищенні якого коливання відбуватися не будуть, називається критичним опором R_k. Його можна визначити з умови $\omega = 0$, тобто:

$$\frac{R_k^2}{4L^2} = \frac{1}{L \cdot C}.$$

Звідки для критичного опору отримуємо [7]:

$$\boxed{R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.} \tag{25.18}$$

Якщо опір контуру перевищить критичний опір, в контурі буде відбуватись ***аперіодичний процес*** (рис. 25.4).

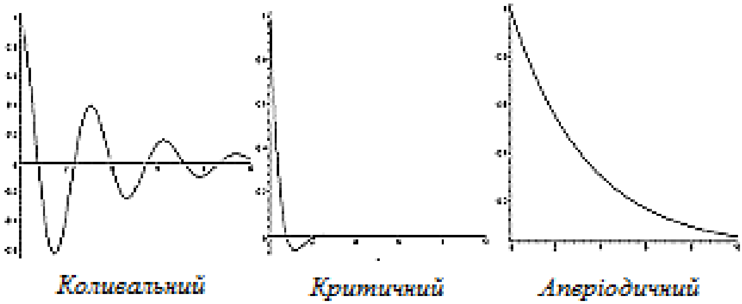


Рис. 25.4

Якщо затухання незначні, $\beta \ll \omega_0$, то частоти власних і затухаючих коливань приблизно однакові $x(t) = 3\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$. Для добротності отримаємо $Q = \frac{\omega}{2\beta} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \frac{L}{R}$.

Для ***добротності коливального контуру*** справедливо:

$$\boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.} \tag{25.19}$$

Рівняння затухаючих електромагнітних коливань матиме вигляд:

$$q(t) = C \cdot U_0 \cdot e^{-\frac{R}{2L}} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{4L^2}} \cdot t + \varphi_0\right). \tag{25.20}$$

З цієї формули легко визначити і інші величини і закони їх коливань в контурі, наприклад:

– струм $I(t) = \frac{dq(t)}{dt}$;

– напругу на конденсаторі $U(t) = \dfrac{q(t)}{C}$;

– енергію електричного поля конденсатору $E_C = \dfrac{q^2(t)}{2C}$;

– енергію магнітного поля котушки $E_L = \dfrac{L \cdot I^2(t)}{2}$;

– електрорушійну силу самоіндукції $\varepsilon = -L\dfrac{dI}{dt}$.

Контрольні питання

1. Як записати диференціальне рівняння затухаючих коливань?
2. Що таке час релаксації?
3. Як визначають логарифмічний декремент затухання?
4. Що таке добротність коливальної системи?
5. Диференціальне рівняння затухаючих коливань пружинного маятника.
6. Диференціальне рівняння затухаючих електромагнітних коливань.

Література: [**1**, с. 283–294; **4**, с. 38–39]

Лекція 26.
Метод обертального вектора амплітуди

- **Векторне зображення гармонічних коливань**
- **Додавання взаємно перпендикулярних коливань однакової частоти**

26.1. Векторне зображення гармонічних коливань

Гармонічні коливання зображують графічно ***обертовим вектором амплітуди*** (або ***методом векторних діаграм***).

1. Рівняння гармонічних коливань мають вигляд:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (26.1)$$

В початковий момент часу $t = 0$ це рівняння буде мати вигляд:

$$x(0) = x_0 = A\cos\varphi_0. \qquad (26.2)$$

Із точки O на осі x під кутом φ_0 що дорівнює початковій фазі коливань, відкладемо вектор $\vec{A}$, модуль якого дорівнює амплітуді коливань (на рис. 26.1 показана тільки верхня половина траєкторії руху вектора амплітуди). Проекція цього вектора на вісь x, як видно з рисунка буде $x_0 = A\cos\varphi_0$, тобто буде відповідати рівнянню (26.2).

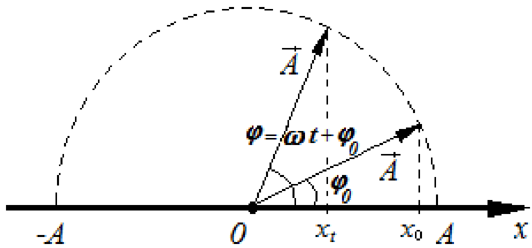


Рис. 26.1

Будемо обертати вектор $\vec{A}$ проти годинникової стрілки навколо точки O з кутовою швидкістю обертання ω. Кут, який обертальний вектор $\vec{A}$ утворює з віссю x буде змінюватись з часом відповідно до рівняння $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$. Тому проекція цього вектора на вісь x буде дорівнювати $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, тобто в будь-який момент часу відповідатиме рівнянню (26.1).

Проекція обертового вектора амплітуди на вісь x в певний момент часу буде дорівнювати зміщенню фізичної величини $x(t)$ що здійснює гармонічні коливання за рівнянням (26.1).

Обертальним вектором амплітуд можна визначати коливальний рух будь-яких фізичних величин, не тільки зміщення.

Розглянемо рух матеріальної точки, що бере участь у двох гармонічних коливаннях однакової частоти ω, які напрямлені вздовж однієї осі.

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1);$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Рис. 26.2

Наприклад, рух поплавка на поверхні води, який знаходиться між двома точковими джерелами хвиль (рис. 26.2). Поплавок рухається вздовж вертикальної осі під дією суперпозиції зміщень викликаних першою і другою хвилями.

Результуюче коливання буде визначатись рівнянням:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Частота ω буде тією ж, а амплітуду результуючого коливання A і фазу φ визначимо методом обертального вектора амплітуд. Зобразимо на векторній діаграмі два вектори амплітуд $\vec{A}_1$ та $\vec{A}_2$ (рис. 26.3).

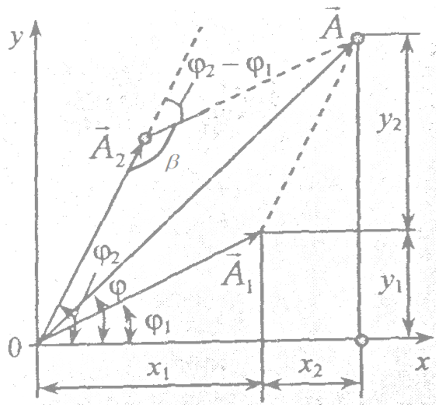


Рис. 26.3

Оскільки вектори $\vec{A}_1$ та $\vec{A}_2$ обертаються з однаковою кутовою швидкістю, то різниця фаз між ними стала $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}$.

Результуюче коливання можна представити вектором

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2,$$

який обертається навколо точки O з тією ж кутовою швидкістю ω. Як видно з рис. 26.3: $A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\beta$, також, $\beta = 180^\circ - (\varphi_2 - \varphi_1)$.

Отже, для ***амплітуди результуючого коливання*** справедлива формула:

$$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1),} \qquad (26.3)$$

тут використана відома з тригонометрії формула: $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$).

Залежно від різниці фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ амплітуда результуючого коливання буде змінюватись від $|A_1| + |A_2|$ (коли $\varphi_2 - \varphi_1 = 0^\circ$, коливання відбуваються у фазі) до $|A_1| - |A_2|$ (коли $\varphi_2 - \varphi_1 = 180^\circ$, коливання відбуваються протифазно).

Фазу результуючого коливання можна визначити за формулою (див. рис. 26.3):

$$\boxed{\mathrm{tg}\varphi = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}.} \quad (26.4)$$

Отримані формули (26.3) та (26.4) важливі для розрахунків руху частинок в середовищі під час накладання хвиль. Таке накладання називається ***інтерференцією*** і це явище можна спостерігати не тільки для механічних хвиль, але і для електромагнітних хвиль, де накладаються напруженості електричного поля. Одним з проявів накладання електромагнітних хвиль є інтерференційні явища в оптиці.

26.2. Додавання взаємно перпендикулярних коливань однакової частоти

Такі коливання буде здійснювати матеріальна точка, яка під’єднана до пружин, як зображено на рис. 26.4. Розглянемо випадок, коли коефіцієнти жорсткості пружин однакові $(k_1 = k_2)$, тобто однакові власні частоти коливань вздовж осей x та y.

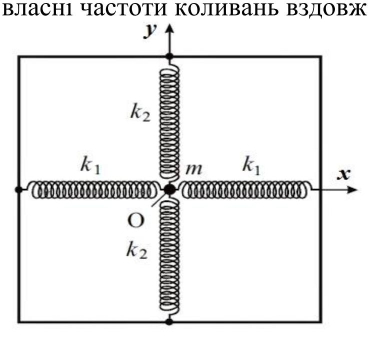


Рис. 26.4

Матеріальна точка буде здійснювати складне коливання, яке буде суперпозицією гармонічних коливань вздовж відповідних осей:

$$\begin{cases} x(t) = A\cos\omega t \\ y(t) = B\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}. \quad (26.5)$$

Взагалі, якщо крива на площині задана рівнянням типу:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad (26.6)$$

то це ***параметрично задана крива*** (параметр тут t).

Щоб перейти до ***рівняння траєкторії***: ***в явному вигляді*** $y = f(x)$ або у ***неявному –*** $f(x, y) = 0$ потрібно виключити з рівнянь (26.6) параметр t. Для цього потрібно розв’язати одне з рівнянь відносно невідомої величини t і підставити цей вираз в друге рівняння.

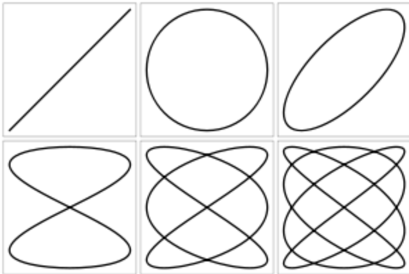


Рис. 26.5

Якщо жорсткість вертикальних і горизонтальних пружин однакова, тобто однакові частоти коливань вздовж осей x та y, то траєкторією руху матеріальної точки може бути ***еліпс, коло*** або ***пряма лінія*** (рис. 26.5. верхній ряд). Якщо ж ці частоти різні, то матеріальна точка буде описувати **фігури Ліссажу** (рис. 26.5, ряд внизу).

Утворення фігур Ліссажу:

https://www.compadre.org/osp/EJSS/4524/298.htm

https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=kv_lissajousovy_obrazce&l=ua

або переглянувши відео:

https://www.youtube.com/watch?v=aUi8SnGGfG8

Приклад

Матеріальна точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, що визначають за рівняннями $x(t)=3\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$ та $y(t)=2\sin\omega t$. Амплітуди коливань надані в сантиметрах. Знайти рівняння траєкторії і накреслити її зі збереженням масштабу.

Дано:	***Розв'язок***:
$x(t)=3\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$ $y(t)=2\sin\omega t$	

$f(x,y)=0 \ -?$

Отже, матеріальна точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях вздовж осей x та y.

Рівняння траєкторії задано параметрично:

$$\begin{cases} x(t)=3\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right); \\ y(t)=2\sin\omega t. \end{cases}$$

Перш за все, застосуємо відому з тригонометрії формулу $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha$ до першого рівняння і отримаємо

$$\begin{cases} x(t)=3\cos\omega t; \\ y(t)=2\sin\omega t. \end{cases}$$

Тепер можна розв'язати одне з рівнянь системи, наприклад перше відносно параметра $t=t(x)$ і підставити в друге рівняння і отримати рівняння траєкторії в явному вигляді $y=f(x)$. Але в цьому випадку простіше знайти рівняння траєкторії руху в неявному вигляді $f(x,y)=0$. Для цього скористаємось відомим з тригонометрії співвідношенням $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

Перепишемо систему параметричних рівнянь у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{x(t)}{3}=\cos\omega t; \\ \dfrac{y(t)}{2}=\sin\omega t. \end{cases}$$

Підведемо ліві і праві частини в квадрат:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2(t)}{9}=\cos^2\omega t; \\ \dfrac{y^2(t)}{4}=\sin^2\omega t. \end{cases}$$

Тепер додаємо верхнє і нижнє рівняння і отримуємо рівняння траєкторії в неявному вигляді:

$$\frac{x^2(t)}{9}+\frac{y^2(t)}{4}=1.$$

В нашому випадку матеріальна точка буде рухатись по еліптичній орбіті (рис. 26.6).

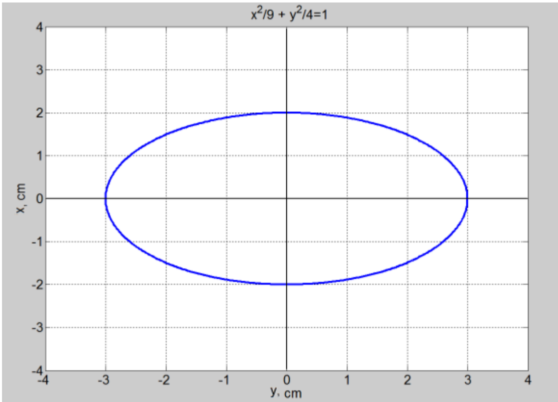


Рис. 26.6

Рух відбувається вздовж осі x в межах [–3, 3], осі y – в межах [–2, 2].

Контрольні питання

1. Що таке метод векторних діаграм?
2. Як можна знайти суму взаємно перпендикулярних коливань однакової частоти?
3. Як можна знайти суму взаємно перпендикулярних коливань з різними частотами?
4. У чому полягає явище інтерференції?
5. Як утворюються фігури Ліссажу?

Література: [1, с. 278–282; 4, с. 36–38]

Лекція 27.
Хвильові процеси

- **Поширення хвиль у пружному середовищі**
- **Звукові хвилі**

27.1. Поширення хвиль у пружному середовищі

Коливання, що виникають в деякій точці середовища часто не залишаються локалізованими у місці їх збудження і поширюються в середовищі з певною швидкістю.

Δ – *Пружне середовище* складається із частинок, між якими існують сили взаємодії що перешкоджають тому або іншому виду його деформації.

Δ – Процес поширення коливань в суцільному пружному середовищі називають *механічною хвилею.*

Будемо розглядати хвилі під час поширення яких частинки середовища не рухаються разом з хвилею, а коливаються біля свого положення рівноваги. Таким хвилям притаманна властивість переносу енергії без переносу речовини. Залежно від напряму коливання частинок середовища відносно напряму поширення хвилі розрізняють ***поперечні*** (рис. 27.1. зверху) і ***поздовжні хвилі*** (рис. 27.1, знизу).

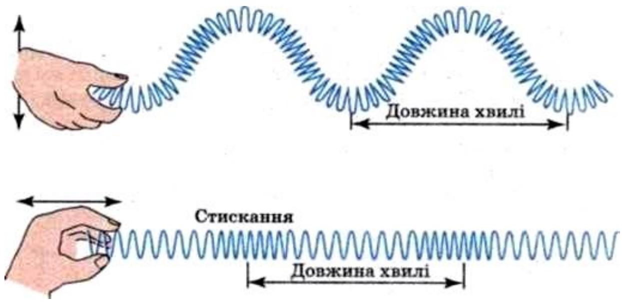


Рис. 27.1

Δ – *Поперечними* називають хвилі, в яких частинки коливаються у перпендикулярному до швидкості поширення хвилі напрямку.

Δ – *У поздовжніх хвилях* частинки коливаються в напрямку поширення хвилі.

Поперечні хвилі можуть поширюватись у середовищах, в яких виникають пружні сили при деформаціях зсуву, тобто лише у твердих тілах. Поздовжні хвилі можуть поширюватися у середовищах, в яких виникають пружні сили при деформації стиску, тобто у твердих тілах, рідинах і газах. Швидкість поширення поперечних і поздовжніх хвиль в одному і тому ж середовищі різна. Наприклад, для кварцу швидкість поперечних хвиль $\upsilon_{\perp} = 3762$ м/с, а швидкість поздовжніх $\upsilon_{\parallel} = 5970$ м/с.

Ця різниця швидкостей використовується для вимірювання відстані до епіцентру землетрусу спеціальними приладами – сейсмографами. Спочатку фіксуються поздовжні хвилі. Якщо виміряти час між появою перших поштовхів і приходом поперечних хвиль, то якщо відома різниця швидкостей цих хвиль в земній корі, можна виміряти відстань до епіцентру [3, 5].

Δ – *Довжиною хвилі* λ називають відстань між найближчими частинками що коливаються в однаковій фазі. *Довжина хвилі* λ дорівнює тій відстані, на яку поширюється хвиля за період

$$\boxed{\lambda = \upsilon \cdot T = \frac{\upsilon}{f},} \qquad (27.1)$$

де υ – швидкість хвилі; T – період хвилі; f – її частота.

Δ – Поверхню, до якої доходить коливання в деякий момент часу, називають *фронтом хвилі.*

Δ – Поверхню, в якій всі частинки коливаються в однаковій фазі, називають *хвильовою поверхнею.*

Фронт хвилі – поверхня, яка відокремлює частину простору уже залучену у хвильовий процес від області в якій коливання ще не виникли. В залежності від форми фронту розрізняють хвилі плоскі, сферичні, циліндричні та інші.

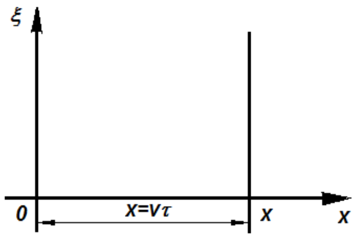
Δ – *Біжучими* називають хвилі, що переносять у просторі енергію. Хвилі що не переносять в просторі енергію називають *стоячими.*

Δ – Рівнянням хвилі називається вираз, який дає зміщення частинки середовища що коливається як функцію її координат і часу:

$$\xi = \xi(x, y, z, t). \qquad (27.2)$$

У цій формулі ξ – ***зміщення частинки середовища від її рівноважного положення.***

Розглянемо плоску хвилю, яка поширюється вздовж осі OX в додатному напрямку і збуджується в площині $\xi = \xi(x,t)$, рис. 27.2.



Для плоскої хвилі що поширюється вздовж x рівняння (27.2) набуде вигляду:

$$\xi = \xi(x,t). \qquad (27.3)$$

Для площини $x = 0$:

Рис. 27.2

$$\xi = \xi(0, t).$$

Нехай коливання в площині $x = 0$ є гармонічними, тобто зміщення частинок цієї площини в часі визначається рівнянням:

$$\xi(0, t) = A\cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (27.4)$$

Цей вираз є рівнянням плоскої хвилі в площині $x = 0$. Знайдемо рівняння хвилі, що відповідає довільному x. Щоб подолати шлях від площини $x = 0$ до деякої площини x хвилі потрібен час $\tau = x / \upsilon$, де υ – швидкість поширення хвилі. Отже, коливання в площині x будуть повторювати коливання в площині $x = 0$ із запізненням τ:

$$\xi(x, t) = A\cos[\omega(t - \tau) + \varphi_0] = A\cos[\omega t - \omega \frac{x}{\upsilon} + \varphi_0]. \qquad (27.5)$$

Введемо величину, що називається ***хвильовим числом*:**

$$\boxed{k = \frac{\omega}{\upsilon}.} \qquad (27.6)$$

Якщо згадати, що $\omega = 2\pi / T$, то формулу для ***хвильового числа*** k можна записати у вигляді: $k = 2\pi / T \cdot \upsilon$. Але, за (27.1) період помножений на швидкість хвилі дорівнює довжині хвилі λ. Отже, отримуємо для ***хвильового числа*** ще одну формулу:

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}.} \qquad (27.7)$$

Рівняння біжучої плоскої хвилі що поширюється вздовж додатного напрямку осі x (27.5) тепер можна записати у вигляді:

$$\boxed{\xi(x, t) = A\cos[\omega t - kx + \varphi_0].} \qquad (27.8)$$

Порівняємо формулу (27.7) з формулою для циклічної частоти $\omega = 2\pi / T$. Хвиля є процесом, який відбувається і в часі і в просторі. Добуток циклічної частоти на час $\omega t = \frac{2\pi}{T} t$ визначає зміну фази хвилі із зміною часу, а добуток хвильового числа на координату $kx = \frac{2\pi}{\lambda} x$ визначає зміну фази із зміною координати. Тому **хвильове число** грає ту саму роль по відношенню до координати як і ***циклічна частота*** по відношенню до часу.

Якщо ***плоска хвиля поширюється у довільному напрямку в просторі***, то її рівняння буде:

$$\boxed{\xi(x,y,z,t) = A\cos[\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0],} \qquad (27.9)$$

де $\vec{k} = k\cdot\vec{n}$ – вектор, модуль якого дорівнює хвильовому числу і має напрям нормалі до хвильової поверхні (вектор $\vec{n}$ – одиничний перпендикулярний до хвильової поверхні вектор).

Плоскі хвилі:
https://www.compadre.org/osp/EJSS/4417/212.htm

У випадку ***сферичної хвилі***:

$$\boxed{\xi(r,t) = \frac{A}{r}\cdot\cos[\omega t - k\cdot r + \varphi_0],} \qquad (27.10)$$

де r – відстань від центру хвилі (джерела) до точки середовища, що розглядається.

Для сферичних хвиль амплітуда обернено пропорційна відстані до джерела хвилі на відміну від плоскої хвилі, де амплітуда від відстані не залежить.

Зафіксуємо в рівнянні плоскої хвилі (27.8) певне значення фази:

$$\varphi = \omega t - kx + \varphi_0 = \text{const}.$$

Диференціюємо цей вираз і отримаємо $\omega\cdot dt - k\cdot dx = 0$ або:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \upsilon.$$

Швидкість хвилі співпадає із швидкістю поширення поверхні сталої фази або *хвильової поверхні*.

Δ – Залежність фазової швидкості хвилі в середовищі від її частоти (або довжини хвилі) називається *дисперсією.*

Дисперсія визначається залежністю: $\upsilon = \upsilon(\lambda)$.

Хвилі, які зустрічаються в природі у більшості випадків є періодичними але не гармонічними. Але як відомо з курсу математики, будь-який періодичний процес можна представити рядом Фур'є, тобто у вигляді суми гармонічних складових, або як кажуть в фізиці – у вигляді ***хвильового пакета***. Кожна така гармонічна складова називається

гармонікою. Гармоніки мають частоти, кратні основній частоті $\omega_n = n\omega_0 \quad n \in N$, де основна частота $\omega_0 = 2\pi / T$, де T – період періодичного але не гармонічного процесу.

Прямокутне коливання у вигляді гармонічних складових: https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=kv_obdelnikovy_kmit&l=ua

Якщо середовище, де поширюється ***хвильовий пакет*** має ***дисперсію***, то різні складові цього пакету будуть мати різні швидкості, а отже буде змінюватись форма хвилі. При цьому швидкість поширення фази хвилі ***(фазова швидкість***) і амплітуди (***групова швидкість***) не будуть однаковими.

Швидкість поширення енергії в негармонічній хвилі визначається *груповою швидкістю,* яка дорівнює:

$$\boxed{u = \frac{d\omega}{dk}.} \tag{27.11}$$

Між фазовою і груповою швидкостями існує співвідношення:

$$\boxed{u = \upsilon - \lambda \frac{d\upsilon}{d\lambda}.} \tag{27.12}$$

Отже, залежно від знаку дисперсійної залежності $d\upsilon / d\lambda$ групова швидкість може бути як більше так і менше фазової. Групова швидкість визначає швидкість поширення енергії хвилі, саме вона має значення в радіолокації, в системах керування віддаленими об'єктами. В теорії відносності доводиться, що групова швидкість завжди менше швидкості світла в вакуумі $u \leq c$. Якщо в середовищі немає дисперсії, то фазова і групова швидкості збігаються.

Рівняння будь-якої хвилі є розв'язком диференціального рівняння, яке називаю ***хвильовим.*** Хвильове рівняння, яке визначає поширення хвилі в однорідному ізотропному середовищі має вигляд [1]:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},} \tag{27.13}$$

де υ – фазова швидкість. Часто хвильове рівняння записують у вигляді:

$$\Delta \xi = \frac{1}{\upsilon^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – диференціальний оператор Лапласа.

27.2. Звукові хвилі

Звук в повітрі являє собою поздовжню хвилю. Частинки повітря коливаються в напрямку поширення хвилі, створюючи вздовж цього напрямку зони підвищеного і пониженого тиску. Ньютон теоретично вивів формулу для швидкості звукової хвилі в повітрі:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{RT}{M}}, \qquad (27.14)$$

де $R = 8,31$ Äæ/(ì î ëü$\cdot$ $^\circ$Ê) – універсальна газова стала; $T = 273^\circ$K – абсолютна температура для 0 °C; $M = 0,029$ êã/ì î ëü – молярна маса повітря.

Якщо підставити ці значення в формулу (27.14), то для швидкості звука отримаємо: $\upsilon_{çâ} \approx 280$ ì /c. Це значення менше за швидкість звуку визначену експериментально.

Ньютон в своїх розрахунках вважав, що звукова хвиля поширюється ізотермічно. Пізніше Лаплас показав, що звукова хвиля поширюється адіабатно. Тепло не встигає перейти від більш нагрітих ділянок з підвищеним тиском до ділянок з меншою температурою – там де є розрідження. Для швидкості звуку Лаплас отримав

$$\boxed{\upsilon_{çâ} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}},} \qquad (27.15)$$

де γ – ***показник адіабати***; $\gamma = C_P / C_V \approx 1,4$ – відношення теплоємностей при сталому тиску і сталому об’ємі.

Ця формула дає правильне значення для швидкості звуку.

$$\upsilon = \sqrt{1,4\frac{8,31\cdot 273}{0,029}} = 331 \text{ ì /ñ.}$$

З формули (27.15) випливає, що швидкість звуку залежить від температури. При ***підвищенні температури швидкість звуку зростає.*** Також швидкість звуку залежить від молярної маси газу. Чим менше молярна маса, тим більша швидкість звуку.

Швидкість звуку $\upsilon = 331\,\text{ì /ñ} \approx 1200\,\text{êì /ãî ä}$. Якщо літак перевищує цю швидкість, то він долає звуковий бар'єр. Коли швидкість наближається до швидкості звуку, перед ним утворюється зона підвищеного тиску. Коли швидкість літака продовжує зростати, він пробиває цю зону. Під час цього утворюється потужна ударна звукова хвиля.

Долання звукового бар'єру літаками:
http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Sound/soubar.html#c1
або відеофрагмент:
https://www.youtube.com/watch?v=roydK5n4BhM

Контрольні питання

1. Що таке механічні, поперечні та поздовжні хвилі?
2. Як визначають довжину та фронт хвилі?
3. Що таке біжучі хвилі?
4. Як записати рівняння плоскої хвилі; хвильове число?
5. Як записати рівняння сферичної хвилі?
6. Що таке дисперсія, групова швидкість?
7. Що таке звукові хвилі? Як визначають швидкість звуку у повітрі?

Література: [**1**, с. 295–300; **4**, с. 42–47]

Лекція 28.
Інтерференція хвиль

- **Явище інтерференції когерентних хвиль**

▪ **Стоячі хвилі**

28.1. Явище інтерференції когерентних хвиль

Δ – ***Лінійним*** **називають середовище, яке не змінює свої характеристики під час проходження хвилі.**

Для лінійних середовищ виконується ***принцип суперпозиції*** **(*або накладання*):**

Δ – Якщо в середовищі є декілька джерел хвиль, то хвилі які поширюються від цих джерел, розповсюджуються незалежно одна від одної.

Під час розповсюдження в лінійному середовищі хвилі можуть виявляти два характерних хвильових явища – ***дифракцію*** та ***інтерференцію***.

Δ – ***Дифракцією хвиль*** **називають явище зміни напряму розповсюдження хвиль і перерозподіл їх інтенсивності під час огинання об’єктів, або під час проходження через отвори лінійний розмір яких порівняний з довжиною хвилі** (рис. 28.1).

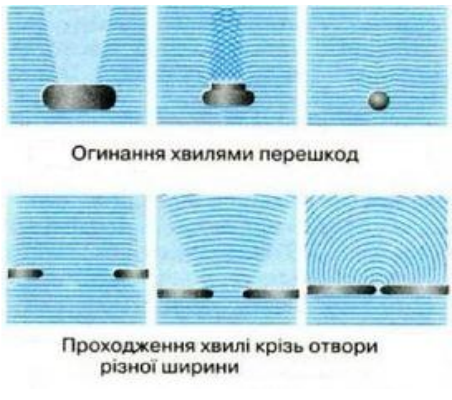


Рис. 28.1

За певних умов, яким повинні відповідати хвилі, що накладаються у лінійному середовищі, можна спостерігати явище ***інтерференції хвиль***.

Δ – ***Інтерференцією хвиль*** **називають явище, яке відбувається при накладанні двох або кількох *когерентних хвиль*, при якому має місце стійке в часі їх взаємне підсилення в одних точках**

простору і ослаблення в інших залежно від співвідношення між фазами цих хвиль.

Δ – ***Хвилі називають*** **когерентними, якщо вони відповідають наступним умовам:**

– коливання частинок середовища, що збуджуються хвилями, повинні відбуватися в однакових напрямках;

– частоти їхніх коливань мають бути однаковими;

– зсув фаз між хвилями у даній точці середовища з часом не змінюється.

На рис. 28.2 ліворуч зображена хвильова поверхня, утворена одним точковим джерелом. Праворуч – хвильова поверхня від двох точкових джерел. Під час розповсюдження хвилі накладаються одна на одну, внаслідок цього утворюються точки з різними амплітудами коливання частинок середовища. В деяких точках, до яких хвилі доходять в фазі, коливання відбуваються з сумарною амплітудою, а в точках до яких хвилі доходять з протилежними фазами, коливання будуть відбуватись з амплітудою, що дорівнює різниці амплітуд хвиль [7].

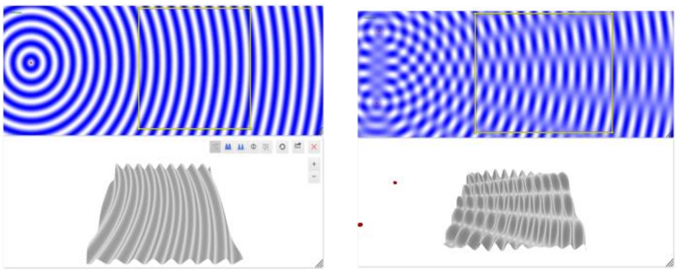


Рис. 28.2

Явища інтерференції і дифракції хвиль:
https://phet.colorado.edu/en/simulation/wave-interference
http://physics.bu.edu/~duffy/HTML5/2Dinterference_point.html

Розглянемо накладання двох гармонічних когерентних хвиль, які збуджуються точковими джерелами S_1 та S_2 у деякій точці C (див. рис. 28.3).

Припустимо для простоти, що початкові фази коливань $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

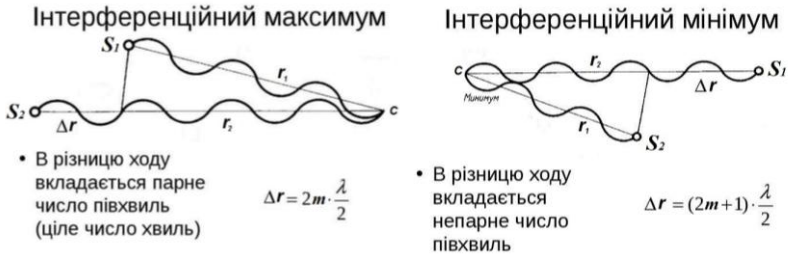


Рис. 28.3

Тоді коливання частинки середовища в точці C збуджене першою і другою хвилями будуть визначатись згідно формули сферичної хвилі (27.10):

$$\xi_1(r,t) = \frac{A_1}{r_1} \cdot \cos[\omega t - k \cdot r_1] \text{ та } \xi_2(r,t) = \frac{A_2}{r_2} \cdot \cos[\omega t - k \cdot r_2].$$

Результуюче коливання в точці C можна визначити за допомогою методу обертового вектора амплітуд – формула (26.3):

$$A^2 = \frac{A_1^2}{r_1^2} + \frac{A_2^2}{r_2^2} + 2\frac{A_1}{r_1}\frac{A_2}{r_2}\cos[k(r_2 - r_1)]. \qquad (28.1)$$

Отже, амплітуда результуючого коливання в точці С не залежить від часу, а залежить тільки від різниці фаз $\Delta\varphi = k(r_2 - r_1)$, яка визначається геометричною різницею ходу хвиль до точки C: $\Delta r = r_2 - r_1$ ($k = \frac{\omega}{\upsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$ – ***хвильове число***).

В точках, де

$$k(r_2 - r_1) = 2\pi m,\ m \in Z, \qquad (28.2)$$

а у формулі (28.1) $\cos[k(r_2 - r_1)] = 1$, тобто в цих точках амплітуда результуючого коливання буде дорівнювати сумі амплітуд:

$$A = \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2}. \qquad (28.3)$$

Оскільки, $k = \frac{\omega}{\upsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$, то формулу (28.2) можна записати у вигляді:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = 2\pi m, \; m \in Z.$$

Звідси можна отримати ***умову інтерференційного максимуму***:

$$\boxed{r_2 - r_1 = 2m\frac{\lambda}{2}, \; m \in Z.} \qquad (28.4)$$

Δ – *У деякій точці середовища буде спостерігатись інтерференційний* максимум*, якщо геометрична різниця ходу хвиль до цієї точки дорівнює* парному числу *півхвиль.*

В точках, де виконується умова:

$$k(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = (2m+1)\pi, \; m \in Z. \qquad (28.5)$$

У формулі (28.1) $\cos[k(r_2 - r_1)] = -1$, тобто в цих точках амплітуда результуючого коливання буде дорівнювати різниці амплітуд:

$$A = \left| \frac{A_1}{r_1} - \frac{A_2}{r_2} \right|. \qquad (28.6)$$

Умову інтерференційного мінімуму (28.5) можна переписати у вигляді:

$$\boxed{r_2 - r_1 = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \; m \in Z.} \qquad (28.7)$$

Δ – *У деякій точці середовища буде спостерігатись інтерференційний* мінімум*, якщо геометрична різниця ходу хвиль в цю точку дорівнює* непарному числу *півхвиль.*

28.2. Стоячі хвилі

Особливим випадком інтерференції хвиль є ***стоячі хвилі.***

Δ – *Стоячі хвилі* – це хвилі, які утворюються під час накладання двох біжучих хвиль, що поширюються назустріч одна одній з однаковими частотами і амплітудами.

На практиці стоячі хвилі отримують шляхом накладання падаючої і відбитої від перешкоди хвиль (рис. 28.4). Падаюча хвиля розповсюджується вправо із швидкістю $\vec{\upsilon}$ (суцільна крива) і відбивається від перешкоди. Утворюється відбита хвиля тієї ж частоти і амплітуди, яка поширюється в зворотному напрямку (пунктирна лінія) і інтерферує з падаючою хвилею.

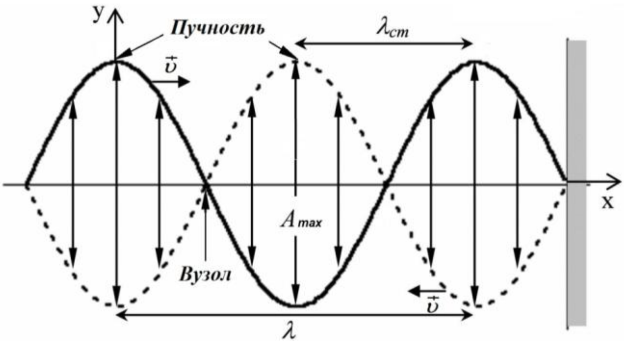


Рис. 28.4

Якщо знехтувати втратами енергії під час відбивання і затуханням хвиль в середовищі, то енергія що переноситься падаючою хвилею вправо дорівнює енергії що переноситься відбитою хвилею вліво. Тому стояча хвиля, яка утворюється внаслідок накладання цих двох хвиль енергію не переносить. Якщо рівняння плоскої хвилі що розповсюджується вздовж осі X:

$$\xi_{\ddot{\imath}}(x,t) = A\cos(\omega t - kx),$$

то рівняння хвилі тієї ж частоти і амплітуди що розповсюджується у зворотному напрямку осі (початкові фази не враховуємо):

$$\xi_{\hat{a}}(x,t) = A\cos(\omega t + kx).$$

Оскільки частинки в падаючій і відбитій хвилях коливаються в одному напрямку, то для зміщення частинки в стоячій хвилі отримуємо:

$$\xi(x,t) = \xi_{\ddot{\imath}}(x,t) + \xi_{\hat{a}}(x,t) = A\cos(\omega t - kx) + A\cos(\omega t + kx). \quad (28.8)$$

Якщо використати відому з тригонометрії формулу:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

то з рівняння (28.8) отримуємо ***рівняння стоячої хвилі:***

$$\boxed{\xi(x,t) = 2A\cos kx \cdot \cos\omega t.} \quad (28.9)$$

З ***рівняння стоячої хвилі*** (28.9) випливає, що частинки середовища коливаються в часі з тією ж частотою ω, що і падаюча хвиля (множник $\cos\omega t$).

Амплітуда стоячої хвилі:

$$A_{ñò} = \left|2A\cos kx\right|. \qquad (28.10)$$

Як видно з формули (28.10), амплітуда стоячої хвилі не залежить від часу, а залежить від координати x. В точках, де

$$kx = \frac{2\pi}{\lambda}x = \pi m, \quad m \in Z \qquad (28.11)$$

амплітуда стоячої хвилі досягає максимуму.

Δ – **Точки стоячої хвилі, де амплітуда коливань максимальна, називаються *пучностями.***

Амплітуда в ***точках пучності***, як випливає з (28.10) – $A_{ñò} = 2A$.

Умову (28.11) ***для точок пучності стоячої хвилі*** можна записати у вигляді:

$$\boxed{x_{ï} = 2m\frac{\lambda}{4}, \quad m \in Z.} \qquad (28.12)$$

В точках, для яких

$$kx = \frac{2\pi}{\lambda}x = \pi m + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(2m+1), \qquad (28.13)$$

амплітуда стоячої хвилі (28.10) буде нульовою.

Δ – **Точки стоячої хвилі де амплітуда коливань дорівнює нулю, називаються *вузлами.***

Умову (28.13) для точок вузлів стоячої хвилі можна записати у вигляді:

$$\boxed{x_{â} = (2m+1)\frac{\lambda}{4}, \qquad m \in Z.} \qquad (28.14)$$

Відстань між сусідніми максимумами стоячої хвилі – ***пучностями*** (рис. 28.4), як випливає з (28.12):

$$x_{ï}(m+1) - x_{ï}(m) = 2(m+1)\frac{\lambda}{4} - 2m\frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}.$$

Така ж відстань і між сусідніми ***вузлами*** стоячої хвилі.

Стоячі хвилі:
https://www.thephysicsaviary.com/Physics/Programs/Labs/InterferingWaves/

Контрольні питання

1. У чому полягає явище інтерференції?
2. Що таке дифракція хвиль?
3. Що таке когерентні хвилі?
4. Як записати умову для інтерференційного максимуму?
5. Як записати умову для інтерференційного мінімуму?
6. Що таке стоячі хвилі? Як записати рівняння стоячої хвилі?

Література: [**1**, с. 300–305; **4**, с. 47–50]

ПІСЛЯМОВА

Фізику часто називають фундаментальною природничою наукою. Ця фундаментальність проявляється не тільки у тому факті, що всі сучасні технології ґрунтуються на фізичних законах. Так, це дуже важливий аспект цієї науки, недарма вона є невід'ємною частиною освіти спеціалістів в різних галузях техніки, інженерних наук і новітніх технологій. Фундаментальність фізики має ще один аспект – це предмет досліджень цієї науки – фундаментальні закони природи. Сучасна цивілізація пройшла складний і тривалий шлях від накопичення даних до осмислення результатів спостережень, до розробки гіпотез, експериментальної перевірки цих гіпотез, передбачення нових невідомих результатів. І останній крок, встановлення меж застосування отриманих знань. Людство рухається вперед тільки наближаючись у своєму розумінні до законів, що лежать в основі будови і функціонування Всесвіту. Деякі факти ми знаємо точно. Так, Земля не є центром Всесвіту, вона рухається навколо Сонця, яке в свою чергу є однією з мільярдів зірок Чумацького Шляху. В свою чергу, у Всесвіті існують мільярди інших галактик. Але незважаючи на скромність нашого положення і малу тривалість розвитку цивілізації, відкриті закони фізики справедливі не тільки на Землі, але і у всьому доступному для спостережень просторі. Ці закони були задовго до людей і будуть справедливі в далекому майбутньому. Це і зумовлює їх фундаментальність.

Фізика не є чимось сталим і незмінним, наука розвивається і вдосконалюється, народжуються численні нові галузі досліджень, які просувають людство вперед в розвитку уявлень про будову навколишнього світу. Відкриті закони є рушійною силою новітніх технологій і розвитку людської цивілізації.

Запропонований курс лекцій є збіркою самих основних фізичних законів. Матеріал викладено відповідно до історичного розвитку цієї науки. Викладені основні факти, які необхідно знати не тільки сучасному спеціалісту, але й будь-якій освіченій людині.

Новітні технології надають нові можливості в методичному забезпеченні навчального матеріалу. Курс лекцій є електронним, що надало змогу авторам використовувати інтерактивні симуляції фізичних дослідів. Студенти можуть не тільки читати про перебіг фізичного процесу, а мають можливість самим проводити дослідження, спостерігати процеси у розвитку, змінювати важливі параметри і спостерігати результати. Крім того, курс містить багато посилань на доступні в інтернеті відеоматеріали, де докладно задокументовані відомі досліди. Сучасні тенденції розвитку інтернет-технологій не обмежуються симуляціями. В останній час з'явилась можливість студентам проводити досліди в реальній лабораторії що знаходиться в іншій країні, вони мають можливість керувати перебігом фізичного процесу за допомогою цифрових інтерфейсів і спостерігати за результатами online.

Видання не претендуючи на вичерпність і докладність викладених матеріалів, як у відомих друкованих курсах, є спробою застосувати новітні технології до методичного забезпечення навчального матеріалу. Це є особливо важливим в умовах дистанційного навчання і за таким підходом майбутнє.

Автори сподіваються, що цей курс лекцій зацікавить сучасну молодь яскравим оформленням і великою кількістю посилань на різноманітні вебресурси, зробить предмет живим і цікавим, надасть поштовху для подальшого (або паралельного) поглибленого ознайомлення за допомогою класичних підручників.

ЛІТЕРАТУРА

1. Голонжка В. М. Фізика. Курс лекцій / В. М. Голонжка, В. Б. Дроздовський, Г. І. Костишина. – Хмельницький : ХНУ, 2012. – 531 с.

2. Кучерук І. М. Загальний курс фізики / І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук, П. П. Луцик. – Київ : Техніка, 2001. – Т. 2.

3. Кучерук І. М. Загальний курс фізики / І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук, П. П. Луцик. – Київ : Техніка, 2004. – Т. 3.

4. Лопатинський І. Є. Фізика : підручник / І. Р. Зачек, Г. А. Ільчук, Б. М. Романишин. – Львів : Афіша, 2005. – 394 с.

5. Чертіщева Т. В. Фізика: Схеми і таблиці / Т. В. Чертіщева. – Харків : ФОП Співак В.Л., 2010. – 416 с.

6. Чолпан П. П. Фізика : підручник / П. П. Чолпан. – Київ : Вища школа, 2004. – 567 с.

7. Збірник задач з фізики : навч. посіб. / І. Є. Лопатинський, І. Р. Зачек, В. М. Середа [та ін.]. – Львів : НУ «Львівська політехніка», 2003. – 124 с.

8. Голонжка В. М. Фізика. Збірник задач для контрольних робіт та колоквіумів / В. М. Голонжка, В. Б. Дроздовський. – Хмельницький : ТУП, 2002. – 50 с.

9. Яворський Б. М. Довідник з фізики для інженерів та студентів вищих навчальних закладів / А. А. Детлаф, А. К. Лебедєв ; пер. з 8-го, перероб. і випр., рос. вид. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2007. – 1040 с.

ЗМІСТ

4. Магнетизм

5. Коливання і хвилі

Навчальне видання

Ткачук Андрій Васильович,

Гула Ігор Володимирович

ФІЗИКА

Курс лекцій з дисципліни

Відповідальний за випуск: ***В. С. Яремчук***

Технічне редагування і верстка: ***О. В. Чопенко***

Оформлення обкладинки: ***О. В. Станіславова***

Підписано до випуску 29.06.2021.
Ум. друк. арк. – 13,07. Обл.-вид. арк. – 8,38.
Зам. № 43е/21